שבבים - עלון למורי מתמטיקה, תיק מס' 24

"הרפתקאות הנדסיות" בעזרת מושג הפונקציה.

מאת: רינה הרשקוביץ ואברהם הרכבי
מכון ויצמן למדע

מבוא

בהוראת המתמטיקה, בחטיבות ביניים ובתי ספר תיכוניים, נפוצה ביותר הגישה לפיה מלמדים אלגברה והנדסה כשני נושאים נפרדים.
נראה לנו כי גישה זו מצרה את יכולת החשיבה המתמטית של התלמיד, ומגבילה לכן את יכולתו לפתור בעיות.

נראה לנו כי השימוש באסטרטגיות אלגבריות והנדסיות יחדיו בפתרון אותה בעיה, ישפר וירחיב את ראיתו המתמטית של התלמיד, ויעזור לו להשתחרר מהנחות מתמטיות מוטעות.

את השקפתינו זו נדגים בעזרת הצגת דוגמא לעבודת חקר. עבודות חקר פותחו במסגרת המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן, לתלמידי כיתות ט' בשלוש הרמות. העבודות יצאו לאור כשלוש חוברות בשם קובץ עבודות סיכום (I עד III), המלוות במדריכים למורה. במדריכים מובא תאור האופי והמטרות של עבודות מסוג זה, בנוסף למיגוון תשובות אפשריות.
(ראה גם Zehavi-1979, Bruckheimer and Hershkowitz-1977).
תוכנה של הבעיה הינו שילוב כלשהו של אלגברה - מושג הפונקציה, ושל הנדסה - "משפחת" המרובעים.
בדוגמא זו משמשת ההנדסה מצד אחד כמציאות שיש להתחשב בה (Usiskin, 1980), ובכך נותנת טעם למושגים האלגבריים הקשורים במושג הפונקציה. מצד שני דרך החשיבה האלגברית, הקשורה במושג הפונקציה, ויישומה במציאות ההנדסית, עוזרת לתהליך דינמי של פיתוח המושגים ההנדסיים.

תאור העבודה

להלן המהלך המתמטי של הבעיה, וכן כמה מן האסטרטגיות בהן עשוי לתקוף התלמיד את השלבים השונים שלה. כל זאת תוך זריקת אור על האנטראקציה שבין הפעילויות הגיאומטריות והאלגבריות בכל שלב וצעד ועל התרומה הכרוכה בכך, לבניה נכונה של המושגים משני התחומים.

שלב I - מריבוע לריבוע על-ידי הגדלה בגודל קבוע.

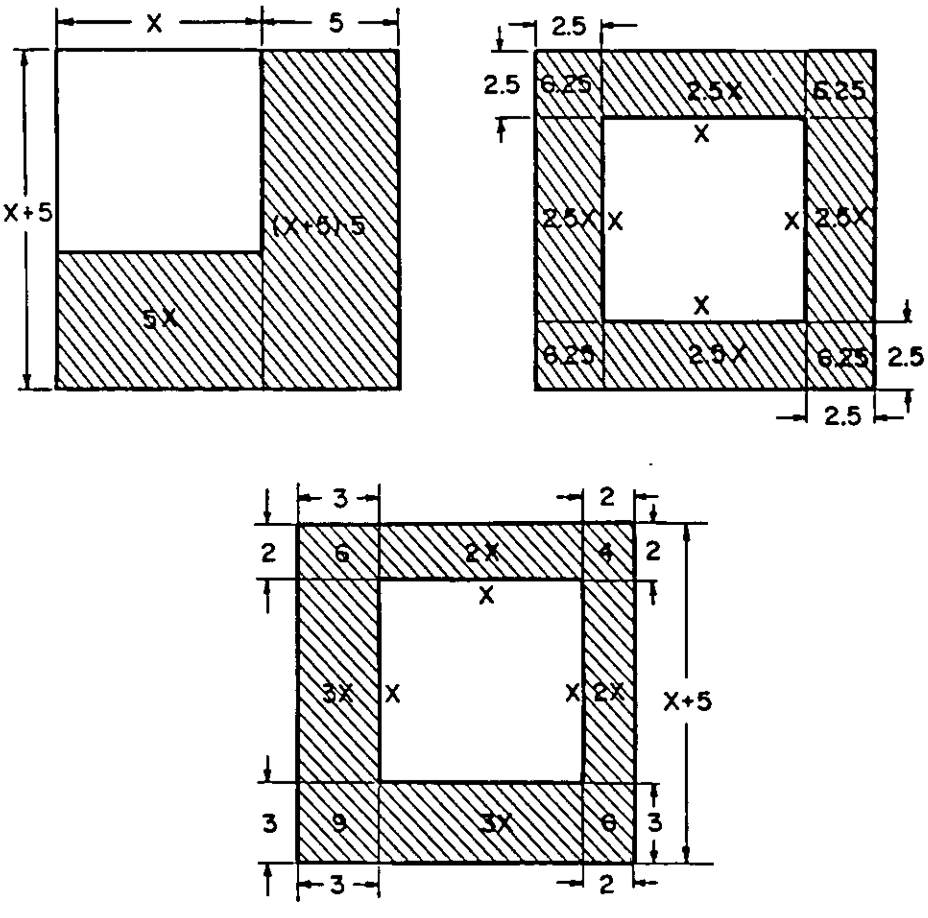
נתון ריבוע שאורך צלעו x (ס"מ). נקבל ריבוע חדש על-ידי הגדלת אורך הצלע ב 5 ס"מ.

* - מצא פונקציה הקושרת לכל x את "שינוי השטח" המתאים. (ההפרש בין שטח הריבוע החדש לשטח הריבוע הנתון).

** - ציין את תחום הפונקציה המתאים לבעיה.

*** - האם השינוי בשטח גדול יותר, (שווה, קטן) משטח הריבוע הנתון?

* - שלב זה הוא שלב מבוא. התלמיד יכול להתחיל לעסוק בו דרך פעילות גיאומטרית, כלומר לצייר את השינוי בשטח ולהגיע בעזרתו לתיאור האלגברי. בשרטוט 1 מופיעות מספר דרכים אפשריות:



שרטוט 1

תלמידים אחרים יתחילו מיד לתאר את השינוי בשטח בצורה אלגברית.

בכל מקרה יגיעו התלמידים לתיאור האלגברי בעזרת הפונקציה שחוק ההתאמה שלה הוא:

$$f(x) = (x + 5)^2 - x^2$$

או:

$$f(x) = 10x + 25$$

** - ומהו תחום הפונקציה?

אם אנחנו מתייחסים לפונקציה ללא קשר לתוכן אותו היא מייצגת, נקבל כי התחום הוא קבוצת כל המספרים הממשיים. אך, כאן, שוב נכנסת הגיאומטריה לתמונה:

x מייצג אורך ולכן איננו שלילי. זו ההגבלה ששמה המציאות ההנדסית על תחום הפונקציה, כלומר התחום הוא: $\{x|\ x > 0\}$.

*** - השאלה השלישית בדבר ההשוואה של "השינוי בשטח", לשטח הריבוע הנתון, יכולה להעשות בדרכים וברמות חשיבה שונות.

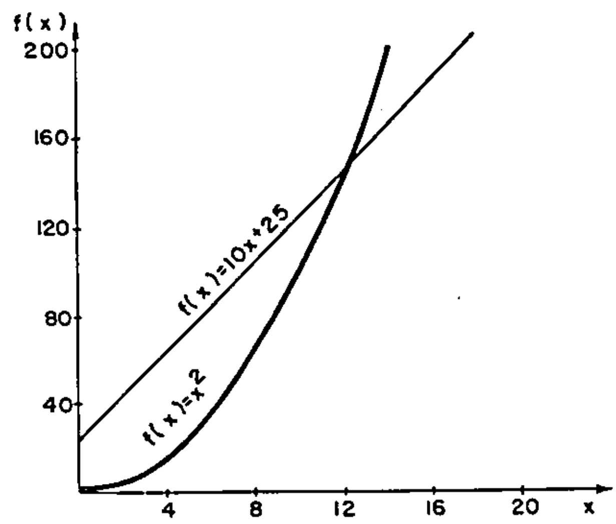
יהיו תלמידים שיציבו מספרים עבור x, וכך, על-ידי ניסוי וטעיה יגיעו לפתרונות חלקיים.

דוגמא: אם יכנסו ריבועים שאורך צלעותיהם קטן מ 10 למשל, יקבלו כי השינוי בשטח גדול משטח הריבוע המקורי.

לתלמידים הפועלים ברמה זו כדאי לתת לנסות אורכי צלע הגדולים מ 13 למשל.

יהיו תלמידים שינסו לפתור את תבניות הפסוק: $x^2 \gtreqless 10x + 25$, ואם לא למדו עדיין את תבנית הפסוק הריבועית יתקשו בזאת.

לעומתם, תלמידים שיגשו לבעיה בגישה של פונקציות ויראו גם את שטח הריבוע הנתון, וגם את השינוי בשטח כגדלים משתנים לפי x, יקבלו את "כל התמונה" משרטוט הגרפים של שתי הפונקציות (ראה שרטוט 2):



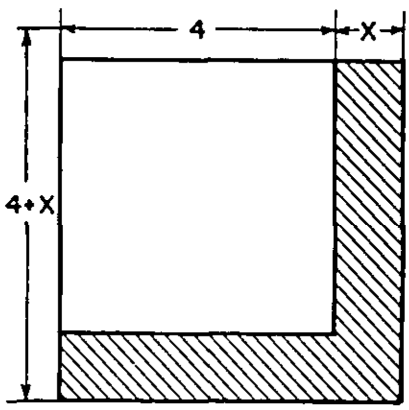
שרטוט 2

תלמידים אלה יקבלו הן את התחומים בהם ערכי הפונקציה האחת גדולים (קטנים, שווים), מערכי הפונקציה השניה, והן את המשמעויות הגיאומטריות של תחומים אלה.

שלב II - מריבוע לריבוע על-ידי הגדלה משתנה.

בשלב הקודם היה אורך צלע הריבוע גודל משתנה, והשינוי באורך הצלע גודל קבוע. עתה נבחן בעיה שונה במקצת - לצלע הריבוע יהיה אורך קבוע למשל, 4 ס"מ, והשינוי באורך הצלע יהיה גודל משתנה,
מה תוכל לומר עתה על השינוי בשטח (הן מבחינה גיאומטרית והן מבחינה אלגברית)?

תלמידים שיתחילו שוב משרטוט גיאומטרי, יקבלו כמעט אותה תמונה כמו קודם (ראה שרטוט 3):



שרטוט 3

ויהיו תלמידים שיתחילו מיד מהתיאור האלגברי. בכל מקרה כאשר ינסו לתאר את השינוי בשטח,כפונקציה של השינוי באורך צלע הריבוע, יקבלו את חוק ההתאמה:

$$f(x) = (4 + x)^2 - 4^2$$

או: $$f(x) = x^2 + 8x$$

הפעם "השינוי בשטח" הינו פונקציה ריבועית של השינוי באורך צלע הריבוע.

מהו תחום ההגדרה של פונקציה זו?

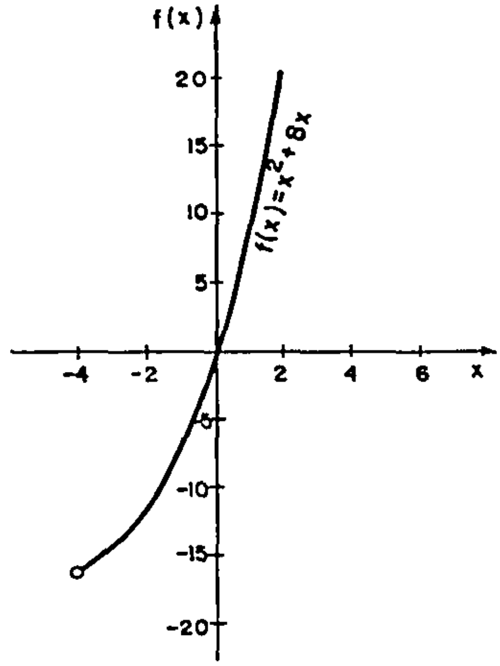
- האם בדומה לבעיה הקודמת יכול x לקבל רק ערכים חיוביים?

כאן הגישה האלגברית לפונקציה כחוק התאמה בין שתי קבוצות היא המדריכה את התלמיד לחפש את תחום ההגדרה הגדול ביותר האפשרי לפונקציה, ובכך דוחפת את התלמיד לכיוונים גיאומטריים חדשים;

- מובן מאליו כי התחום כולל את המספרים החיוביים, אך מה לגבי האפס והמספרים השליליים?

בחיפוש אחר גבולות התחום יגיע התלמיד למסקנה כי בעצם אין כל סיבה שלא לכלול מספרים שליליים בתחום, כי הרי השטח יכול ללכת ולקטון, כלומר השינוי בשטח יכול להיות שלילי עד ל....

וכך יקבל את התחום: $\{x|\ -4 < x\}$ וגרף הפונקציה יהיה (ראה שרטוט 4):



שרטוט 4

קבלנו פונקציה המבטאת משמעות גיאומטרית: כאשר נקטין את אורך הצלע של הריבוע הנתון, נקטין גם את שטחו, ואז השינוי בשטח הוא שלילי. אך לא נוכל להמשיך ולהקטין את השינוי בשטח מעבר לשטח הריבוע הנתון, כלומר להקטין את אורך צלע הריבוע ביותר מאשר 4 ס"מ, שהוא אורך הצלע המקורי.

עד עתה פעלנו רק בריבועים. מה יקרה אם נרחיב את פעילותינו?

שלב III - מריבוע ל...

נתחיל שוב מריבוע נתון ונבחן מה קורה אם משנים את אורך האלכסונים של באופנים הבאים:

* שינוי באלכסון אחד בלבד.

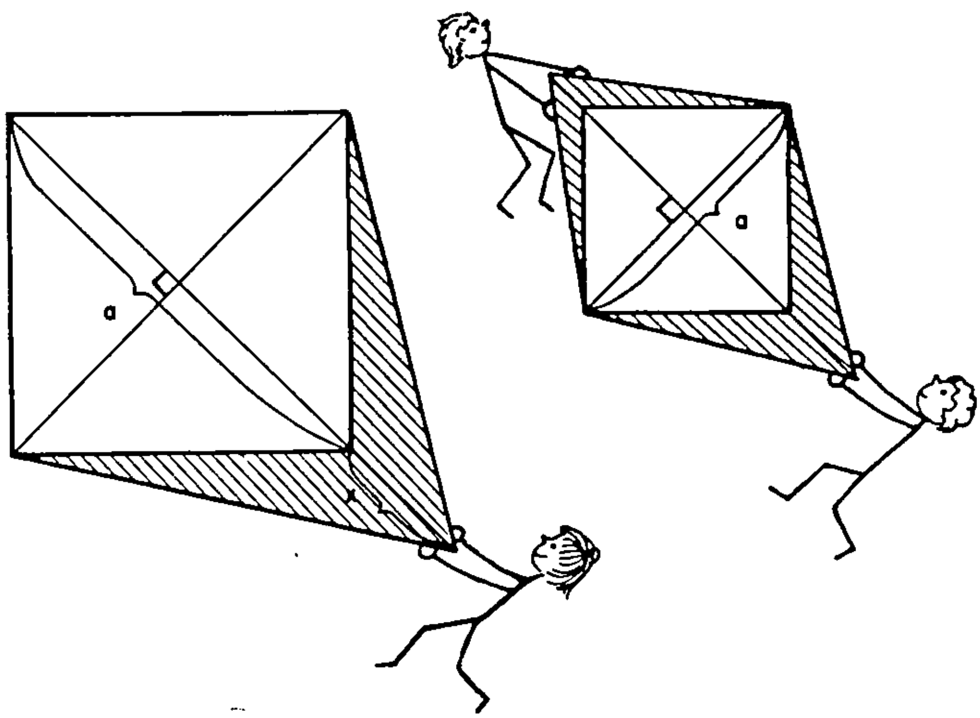
** שינוי שווה בשני האלכסונים באופן סימטרי.

- מהן הצורות הגיאומטריות המתקבלות עקב שינויים אלו?
- מהן הפונקציות המתארות את השינוי בשטח בכל אחד מהמקרים?

בבעיה זו, הריבוע נתון, כלומר האורך הראשוני של אלכסוני הריבוע הוא גודל קבוע. נקרא לו a (ס"מ).

* המקרה הראשון — שינוי באורך אחד האלכסונים בלבד.

באופן אינטואיטיבי יחשוב התלמיד על התארכות האלכסון. כלומר, השינוי באורך האלכסון (x) הינו גודל חיובי. לערכים שונים של x יקבלו התלמידים באופן גיאומטרי משפחה של דלתונים (ראה שרטוט 5):



שרטוט 5

השינוי בשטח הוא ההפרש בין שטח הדלתון לשטח הריבוע הנתון.
חלק מהתלמידים יחשבו את שטח הדלתון כסכום של שני משולשים, חלק יגיעו למסקנה כי שטחו שווה למכפלת האלכסונים מחולק בשניים, כיוון שהאלכסונים מאונכים זה לזה. בשני המקרים חוק ההתאמה של הפונקציה יהיה:

$$f(x) = \frac{a(a+x)}{2} - \frac{a^2}{2}$$

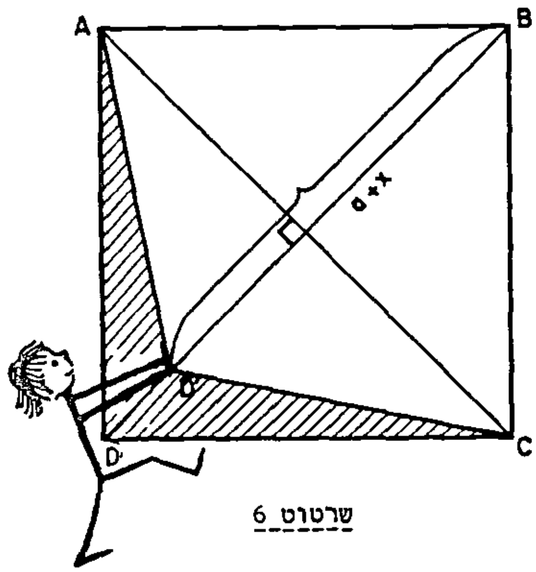
יתכן כי יהיו תלמידים אשר יחשבו את השינוי בשטח ישירות, כסכום שני משולשים קהי-זוית אשר בסיסם x וגובהם $\frac{a}{2}$ ויקבלו:

$$f(x) = \frac{x \cdot a/2}{2} \cdot 2$$

בכל מקרה:

$$f(x) = \frac{a \cdot x}{2}$$

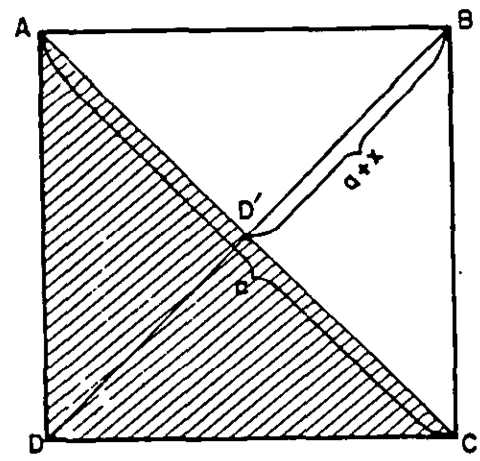
ועתה כמו בשלבים קודמים, תלמידים שרואים את הפונקציה כשתי קבוצות וחוק התאמה ביניהן, ינסו לאתר במדויק את הקבוצה שהיא תחום הפונקציה.
אחרי השלב הקודם, לא יהיה בזה משום חידוש לחשוב על ערכים שליליים ל x אך ב"יצורים הגיאומטריים" החדשים שנקבל על-ידי "כיווץ" האלכסון יש בודאי משום חידוש (ראה שרטוט 6):



שרטוט 6

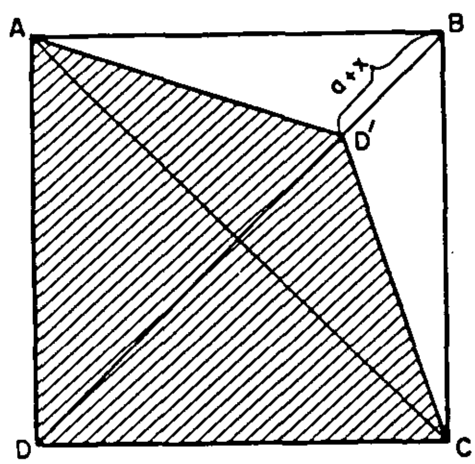
עבור $-\frac{a}{2} < x < 0$ הדלתון נעשה יותר ויותר "שטוח".

עבור $x = -\frac{a}{2}$, נעלם הדלתון! "לרגע" מקבל התלמיד משולש:



<u>שרטוט 7</u>

עבור $-a < x < -\frac{a}{2}$ מקבל התלמיד... דלתונים קעורים!!! (ראה שרטוט 8):



<u>שרטוט 8</u>

קשה להאמין כי בסיטואציה שונה היה התלמיד חושב מרובעים קעורים אלה לדלתונים. אבל בתהליך דינמי זה, המאחד דלתונים קעורים עם דלתונים קמורים, יצטרך התלמיד לבחון את הגדרת הדלתון ולבחון את מידת ההתאמה של כל הצורות הגיאומטריות המתקבלות במקרים השונים להגדרה זו.

התלמיד יגמור תהליך זה כשלרשותו "משפחה גדולה" של דלתונים. במלים אחרות, "דימוי המושג" שלו לגבי "מושג הדלתון", יורחב.

מה הלאה, האם אפשר "לדחוף" את x מעבר ל a-?
נקרא לעליסה ונכנס עימה לארץ המראה...(Carroll, 1965).

מבחינה גיאומטרית, השינוי בשטח אף הוא "עשוי" ממשפחה של דלתונים המשנה את צורתה באופן הפוך: מדלתונים קעורים (שרטוטים 5 ו 6 דרך שינוי השווה ל 0 - כלומר, "דלתון מנוון"), דרך משולש (שרטוט 7), דרך דלתונים קמורים (שרטוט 8), ועד לדלתון קמור שתופס את מקומו של הריבוע המקורי.

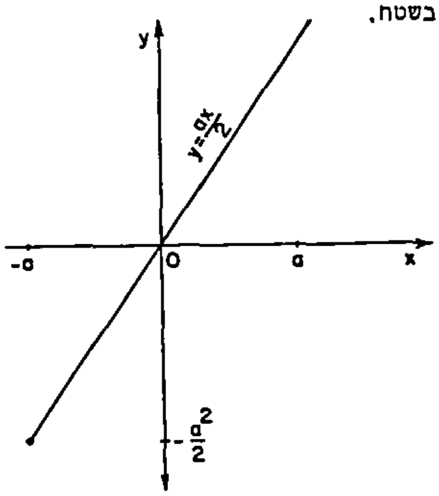
כל זה, כמובן, רק כאשר השינוי ייעשה בצידו האחד של האלכסון. כאשר נשנה את אורך האלכסון בשני קצותיו, נקבל...

כפי שראינו מבחינה אלגברית הפונקציה המתארת את השינוי בשטח היא:

$$f : \{x \mid x \geq -a\} \longrightarrow \{y \mid y \geq -\frac{a^2}{2}\}$$

$$f(x) = \frac{ax}{2}$$

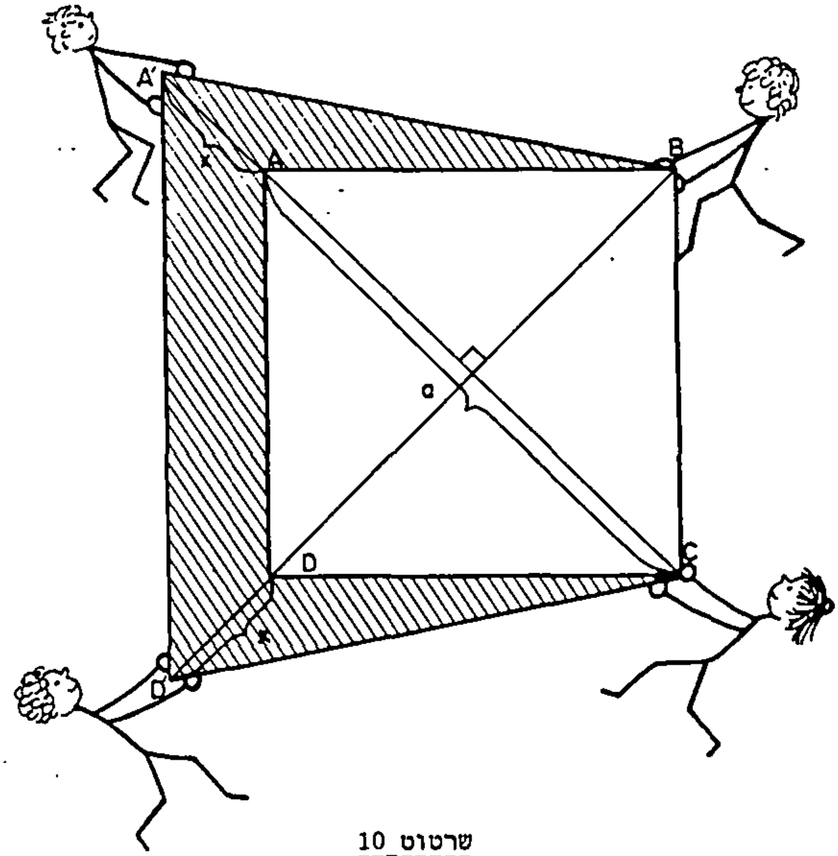
כלומר, פונקציה לינארית (ראה שרטוט 9) המבטאה יחס ישר בין שינוי אורך האלכסון לשינוי בשטח.



שרטוט 9

**המקרה השני — שינוי אורך האלכסונים באופן סימטרי

במקרה זה יקבל התלמיד קבוצה של טרפזים שווי שוקיים שאלכסוניהם מאונכים זה לזה (ראה שרטוט 10).



שרטוט 10

מהו חוק הפונקציה המתאר את השינוי בשטח?

לשם כך צריך לחשב את שטח המרובעים החדשים המתקבלים. התלמיד יהנה למצוא, כי גם כאן שטח המרובעים החדשים שווה למחצית מכפלת האלכסונים כיוון שהאלכסונים נשארים מאונכים זה לזה.

בכל מקרה חוק הפונקציה הינו:

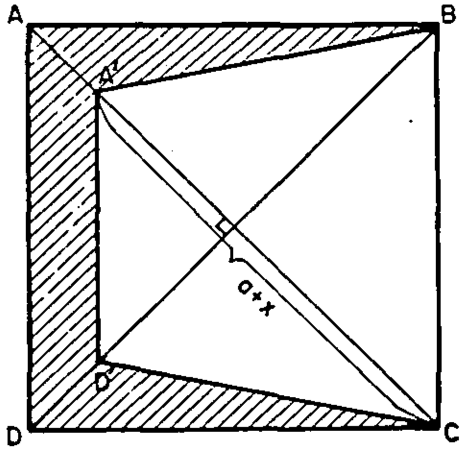
$$g(x) = \frac{(a + x)^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

או:

$$g(x) = \frac{2ax + x^2}{2}$$

כדי להגדיר את התחום, התלמיד בעל הנסיון מפתירת השלב הקודם, ינסה לא רק ל"משוך" את האלכסונים אלא גם ל"דחוף" אותם, כלומר לקצר את אורכם או בקצת דמיון כאילו ל"קפל" את x כלפי פנים. אבל עד לאיזו נקודה?

עבור $-\frac{a}{2} < x \leq 0$, התלמיד ימשיך ויקבל טרפזים שווי שוקיים A'BCD', (ראה שרטוט 11):



<u>שרטוט 11</u>

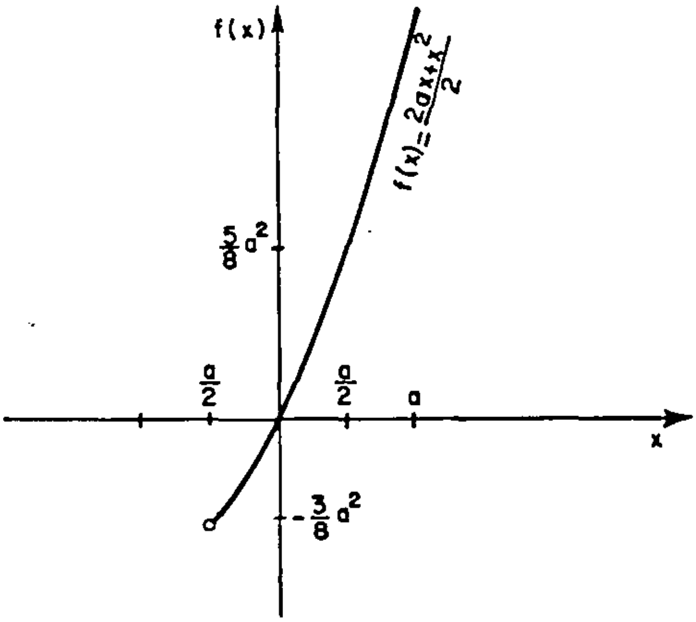
אך, מה לאחר מכן?

- תלמידים רבים יעצרו כאן ויגדירו את תחום הפונקציה כך: $\{x|\ -\frac{a}{2} < x\}$
  עבורם הפונקציה תהיה:

$$g : \{x|\ -\frac{a}{2} < x\} \longrightarrow \{y|\ y > -\frac{3}{8}a^2\}$$

$$g(x) = \frac{(a+x)^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{2ax + x^2}{2}$$

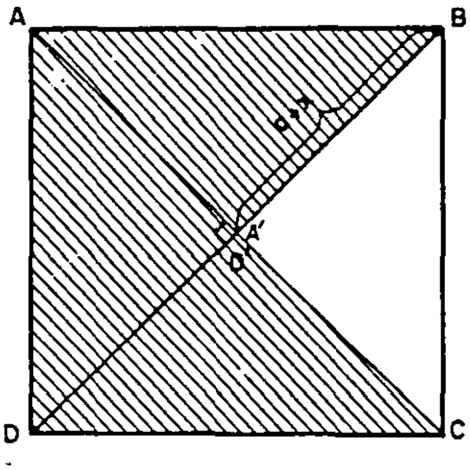
והגרף:



שרטוט 12

תלמיד בעל העזה וסקרנות ינסה "לדחוף" את האלכסונים לנקודה $x = -\frac{a}{2}$.
כלומר x יהיה בתחום $-\frac{a}{2} \leq x \leq 0$.

נלך בעקבותיו ונעקוב אחרי הצורות הגיאומטריות המתקבלות במקרים אלו.
אם נשמור על הכלל כי הקודקוד A עבר אחרי שינוי אורך האלכסון ב x ל 'A
וכן D עבר ל 'D נקבל כי עבור $x = -\frac{a}{2}$, 'A ו 'D מתלכדים (שרטוט 13).



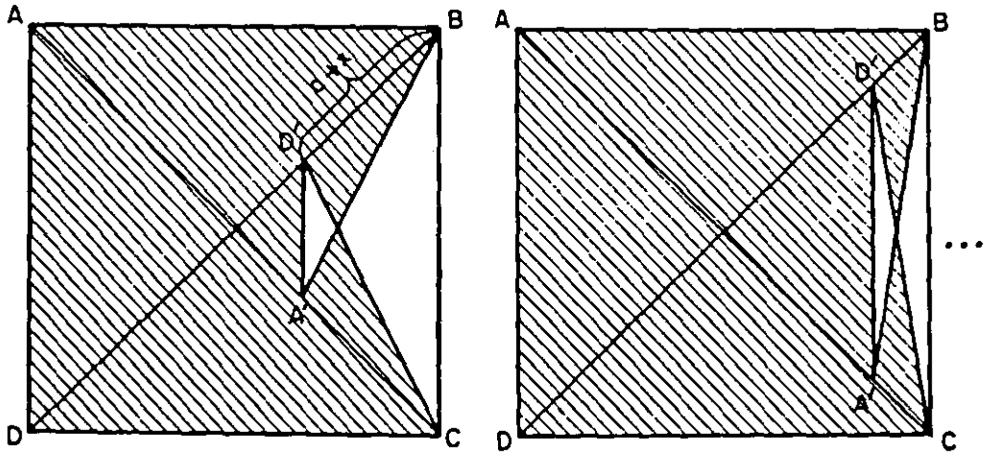
שרטוט 13

כלומר,הצורה החדשה המתקבלת הינה משולש ישר זוית ששטחה מתקבל שוב ממכפלת "האלכסונים" חלקי שניים, (כאן האלכסונים הם בסיס וגובה של המשולש).

$$\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}=\frac{a^2}{8}$$

והשינוי בשטח בנקודה זו שווה ל: $g(x) = -\frac{3}{8}a^2$. ומה מעבר ל $x = -\frac{a}{2}$?

עבור שינוי באורך אלכסון בתחום: $-a \leq x < -\frac{a}{2}$ נקבל צורות A'BCD' כמו בשרטוט 14.



שרטוט 14

האם גם צורות חדשות אלה הינן מרובעים?
זה כמובן תלוי בהגדרה למושג המרובע או,למושג הכללי יותר,מצולע.
אם ניקח הגדרה רחבה כמו זו בה השתמש Galbraith (1981):
מרובע הוא הצורה המתקבלת כאשר מחברים 4 נקודות A, B, C, D במישור, בקווים ישרים AB, BC, CD ו DA, נקבל כי הצורות שקיבלנו הינן מרובעים.

ואם כך, האם הן גם טרפזים שווי-שוקיים? מדוע לא?

- יש להן זוג צלעות מקבילות BC || A'D', ושתי שוקיים שוות A'B = D'C.
  בנוסף לכך האלכסונים..
  כן! האלכסונים הם D'B ו A'C והם על קווים מאונכים זה לזה.

האם שטח טרפזים אלה שווה גם הוא למחצית מכפלת האלכסונים? נסה למצוא תשובה בעצמך. (הרחבה ותשובה מלאה תמצא בנספח.)

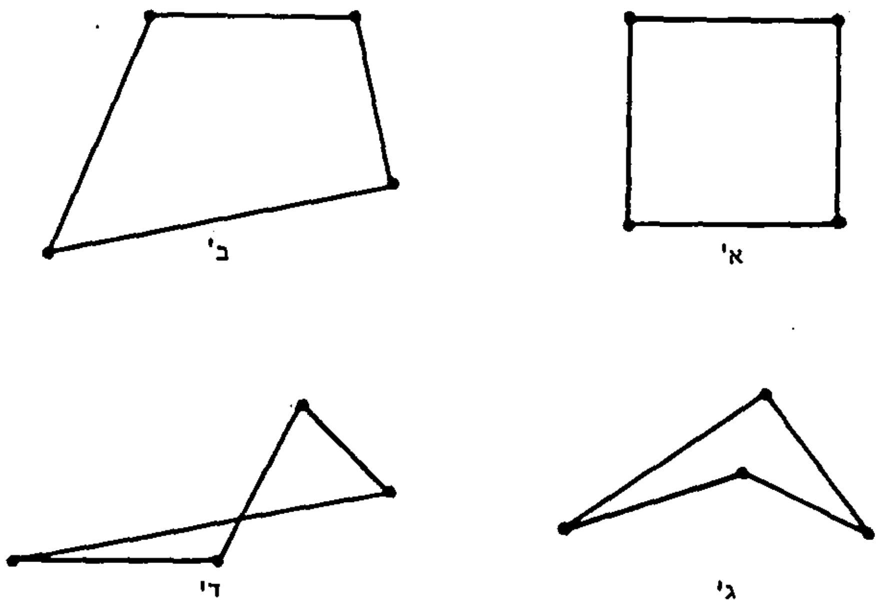
סוף - דבר

מושגים מתמטיים נבנים במוחות תלמידינו בדרכים שונות בין כותלי ביה"ס וגם מחוצה לו.

בבואנו ל"צלם" את הקיים במוחו של תלמיד לגבי מושג מתמטי מסויים, נמצא לרוב רק תמונה חלקית של אותו מושג ואולי אף תמונה מעוותת שלו, כלומר מכילה אלמנטים שאינם נכונים.

אם ניקח את המושג מרובע בו עסקנו בעבודה זו, נמצא כי בשביל תלמיד מסוים הינו כולל רק ריבועים (א' בשרטוט 15), בשביל תלמיד שני, את כל המרובעים הקמורים כולל הריבוע (א' ו-ב' בשרטוט 15).

תלמיד נוסף יכלול גם את צורה ג' (שרטוט 15) בין המרובעים ואילו אצל תלמידים אחרים המושג בנוי בצורה הרחבה ביותר שלו, כלומר עבורם גם המרובעים הקעורים וגם המרובעים ה"חותכים את עצמם" (צורות ג' ו-ד' שרטוט 15) נכללים בין המרובעים.



שרטוט 15

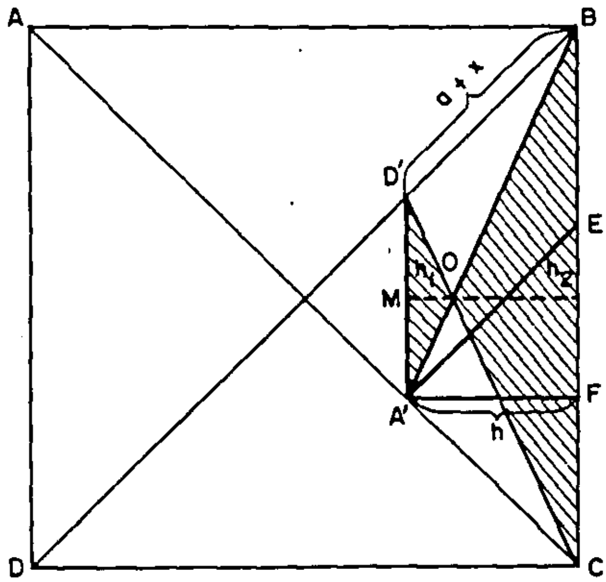
לגבי המושג השני שבו עסקנו בעבודה זו, מושג הפונקציה, נמצא כי אצל חלק מהתלמידים שלמדו מושג זה, דומיננטית "גישת הקבוצות" - דהיינו פונקציה הינה תחום, טווח וחוק התאמה ביניהן. ברוב המקרים חסרה אצל תלמידים אלו ראיית הפונקציה כתלות בין גודל משתנה אחד לגודל משתנה שני.
ואילו אצל תלמידים, שעבורם מושג הפונקציה הינו בעיקר התלות בין שני גדלים משתנים, יתכן טשטוש רב לגבי תחום ההגדרה של הפונקציה. באופן לא מודע, הם מתיחסים לפונקציה כבעלת גרף "חלק" המוגדר לכל x ממשי.

בעבודה זו נסינו להדגים כיצד העיסוק בבעיה בה שני המושגים שלובים אחד בשני, מרחיב את "דמוי" שני המושגים האלה אצל התלמידים. המושג האחד מפרה את ראית המושג השני ולהיפך - התוכן ההנדסי הקשור במשפחות של המרובעים - צר באופן טבעי תחומים לפונקציה. מצד שני העיסוק בפונקציות והחיפוש אחרי התחומים שלהן, גורם לתלמיד להכנס ל"הרפתקאות הנדסיות" דרכן הוא מעשיר את "דמוי" המושג שלו לגבי משפחת המרובעים.

נספח

בסוף העבודה לעיל הגענו למרובע A'BCD', שהתקבל משינוי סימטרי של אורך אלכסוני הריבוע ב x, $-a < x < -\frac{a}{2}$, כאשר אורך האלכסונים הוא a.

הסכמנו כי אפשר להסתכל גם על מרובע זה כעל טרפז שווה-שוקיים.



שרטוט 16

האלכסונים של הטרפז הם D'B ו A'C. אורך כל אחד מהם הוא a + x, (כמו במקרים הקודמים). והשאלה היא, האם שטח "הטרפז" החדש שנוצר שווה אף הוא למחצית מכפלת האלכסונים, כמו במקרים הקודמים?

להלן התשובה לשאלה זו (בהוכחה נשתמש הן בצעדים אלגבריים והן בצעדים הנדסיים).

נעביר את A'E מקביל ל D'B.

לכן: A'D'BE - מקבילית (שני זוגות צלעות מקבילות)

מכאן: $A'E = D'B = a + x$

$$\Downarrow$$

$\Delta A'EC$ שווה שוקיים

$\sphericalangle EA'C = 90°$ (מתאימה לזוית שבין אלכסוני הריבוע)

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle A'CE = \sphericalangle A'EC = 45°$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle FA'C = \sphericalangle FA'E = 45°$$

$$\Downarrow$$

$A'F = CF = FE = h$ (צלעות שוות במש"ש)

$$BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$A'D' = \frac{a\sqrt{2}}{2} - 2h$$

מכאן S שטח הטרפז הינו:

$$S = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta D'A'O} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{h_2}{2} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - 2h\right)\cdot\frac{h_1}{2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h_2 + h_1}{2}\right) - \frac{2h\cdot h_1}{2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot h - h_1\cdot h$$

$$= h\left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - h_1\right)$$

נראה האם שטח זה שווה למחצית מכפלת האלכסונים, כלומר ל- $\frac{(a+x)^2}{2}$

$$\frac{(a+x)^2}{2} = S_{\Delta CA'E} = \frac{h\cdot 2h}{2} = h^2$$

$h_1 < \frac{D'A'}{2}$ (צלע קטנה מול הזוית הקטנה ב $\Delta MOD'$)

$$\Downarrow$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{4} - h_1 > \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{D'A'}{2}$$

נציב במקום $\frac{D'A'}{2}$

$$\frac{D'A'}{2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - 2h\right)/2 = \frac{a\sqrt{2}}{4} - h$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{4} - h_1 > \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{4} + h$$

נכפיל ב h ונקבל:

$$h\left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - h_1\right) > h^2$$

או במילים אחרות, שטח הטרפז S מקיים:

$$S > h^2$$

$$S > \frac{(a+x)^2}{2}$$

הוכחנו איפוא כי עבור כל x המקיים $-a < x < -\frac{a}{2}$ מתקיים כי שטח ה"טרפז" <u>גדול</u> ממחצית מכפלת "אלכסוניו".

העובדה שהוכחנו זה עתה "שוברת" את החוקיות שהתקיימה במקרים הקודמים, כאשר שיבינו את x מערכים חיוביים ועד ל $-\frac{a}{2}$. אך תלמידים שיבדקו תכונות אחרות של המרובעים, במרובעים החדשים שנוצרו $A'B'CD$, כלומר במשפחת המרובעים החותכים את עצמם, יאספו הפתעות נוספות...

(רמז: בדוק את סכום ארבע הזוית הפנימיות במרובעים אלה).
לא נתפלא אם יתעורר כאן ויכוח בכיתה האם כדאי (אם לא כדאי) לספח את "המרובעים" החותכים את עצמם בקהל המרובעים. ומכאן אפשר לתרום לדיון הכללי, על אי שימור תכונות של מושג כאשר מרחיבים את הגדרתו. (לדוגמא "הרחבות" קבוצות של מספרים).

ספרות

Usiskin Z., What should not be in the algebra and geometry curricula of average college - bound students. *Mathematics Teacher*, 1980, Vol. 73, pp. 413-424.

Bruckheimer M. and Hershkowitz R., Mathematics Projects in Junior High School, *Mathematics Teacher*, 1977, Vol. 70, p. 573-578.

Carroll L., *Through the looking-glass* in *The Works of Lewis Carroll*, P. Hamlyn, London, 1965

Galbraith P.L. Aspect of proving: A clinical investigation of Process, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 1, Feb. 1981, pp. 1-28.

Zehavi N. A final project for 9th grade development, implementation and analysis. *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1979, p. 221.-226.