פותר מול בעיה

מאת: אברהם קריימר ורוחמה אבן
מכון ויצמן למדע, רחובות

נקודת המוצא לרבים מהמחקרים בתחום החינוך המתמטי, היא ניתוח וסיווג תשובות של תלמידים.

דבר זה נכון, כמובן, לגבי תלמידים רגילים ומתקשים, אך חשוב גם לגבי תלמידים שהם מעל לממוצע. אמנם תלמידים אלה עושים פחות שגיאות באופן יחסי ויש להשקיע פחות אנרגיה כדי להביא אותם לפתרון נכון, אך ניתוח תשובותיהם יכול ללמד אותנו הרבה על דרך חשיבתם. בעזרת ניתוח זה נוכל לתכנן טוב יותר את ה"מתקפה" על הנקודות החלשות, ועל השגיאות האופייניות. שגיאות של תלמידים טובים מלמדות על הקשיים המהותיים ביותר בכל סוג של בעיה, וניתוחן יוכל לעזור לנו לבחור ולנסח את הבעיות בהתאם למטרות. דבר נוסף שנוכל ללמוד מהשגיאות, הוא אילו רמזים לפתרון ואיזה סוג תגובה כדאי לתת לתלמידים, בהתאם לסוג השגיאה המצופה.

בהמשך ננסה לאפיין תשובות תלמידים לשתי בעיות אשר ניתנו לתלמידי כיתות ט'. תלמידים אלה השתתפו בחוג למתמטיקה בהתכתבות מטעם היחידה לפעולות נוער במכון ויצמן למדע*, ולכן ניתן להניח שהם מעל לממוצע בתחום המתמטיקה.

---

*הסבר על החוג ראה במאמר: ר. אבן וא. קריימר, האם תוכל לפתור את הבעיה הבאה? *שבבים*, תיק מס' 23.

בעיית המאפיות

אופה שבבעלותו שתי מאפיות החליט לבנות מחסן משותף לאחסון שקי הקמח. באיזה מקום יש לבנות את המחסן, כדי שההעברה היומית של שקי הקמח מהמחסן למאפיות תהיה הזולה ביותר? (בהנחה שבכל מאפיה צריכת הקמח היומית הינה קבועה).

בעיית אגרות הברכה

לרגל יום העצמאות של מדינת ישראל, שיגרה כל עיר ברכה לתושבי העיר הקרובה אליה ביותר, בהנחה כי המרחקים בין הערים שונים זה מזה, הוכח כי אף עיר לא קיבלה יותר מחמש ברכות כאלו ליום העצמאות.

שתי הבעיות מנוסחות כבעיות מהמציאות היומיומית, כאשר עיקר הקושי הוא ניסוחן מחדש כבעיות מתמטיות:

בעיית המאפיות

נסמן ב-s את המרחק בין שתי המאפיות.

x – המרחק מהמחסן למאפייה א'.

c – מחיר העברת יחידת קמח, לאורך יחידת מרחק.

p – צריכת הקמח היומית של מאפייה א'.

q – צריכת הקמח היומית של מאפייה ב'.

y – המחיר היומי של העברת הקמח.

אזי המודל המתמטי המתאים לבעיה המקורית הוא:

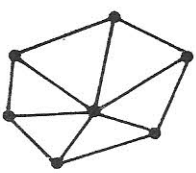
מהו הערך המינימלי של הפונקציה

$$y = pxc + q(s - x)c$$

כאשר s, c, q, p קבועים?

בעיית אגרות הברכה

נתונות מספר סופי של נקודות במישור, הנמצאות במרחקים שונים זו מזו. הוכח <u>שלא</u> קיים מצולע (שקודקודיו הם נקודות כנ"ל) אשר מספר צלעותיו גדול מ-5, המקיים את התנאי: המרחק מנקודה בתוך המצולע, לכל קודקוד במצולע, קטן מאורך כל אחת משתי הצלעות היוצאות מאותו קודקוד.



הקושי העיקרי, כפי שכבר אמרנו, הוא ניסוח מחודש של הבעיה ומציאת המודל המתמטי המתאים לה. בבעיה הראשונה, בעיית המאפיות, נראה במבט ראשון כי אין בכלל נתונים לבעיה. לכן, לפני בניית המודל המתמטי, מתעורר הצורך להשלים את הנתונים החסרים, כפי שעשינו למעלה. בבעיה השניה, בעיית אגרות הברכה, הנתונים נמצאים בבעיה, והקושי העיקרי בניסוח המתמטי נובע מריבוי השלילה.

לאחר שהתגברנו על השלב הראשון של בניית המודל המתמטי, מגיע השלב השני - פתרון הבעיה:

<u>בעיית המאפיות</u>

א) אם $p = q$ הפונקציה היא:

$$y = pxc + p(s - x)c$$
$$= pxc + psc - pxc$$
$$= psc$$

כלומר, כאשר הצריכה היומית של שתי המאפיות שווה, הפונקציה היא קבועה, לכן המחסן יכול להיות ממוקם בכל מקום על הישר המחבר את שתי המאפיות.

ב) אם $p \neq q$ אזי הפונקציה היא:

$$y = pxc + q(s - x)c$$
$$= pxc + qsc - qxc$$
$$= xc(p - q) + qsc$$

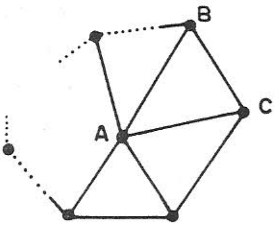
i) אם $p > q$ אזי המינימום של הפונקציה יתקבל כאשר x יהיה מינימלי, כלומר $x = 0$.

ii) אם $q > p$ אזי המינימום יתקבל כאשר x יהיה מכסימלי, כלומר $x = s$.

בשני המקרים קיבלנו כי אם הצריכות היומיות של שתי המאפיות שונות זו מזו, המחסן צריך להיות ממוקם במאפיה שצריכתה היומית היא הגדולה יותר.

<u>בעיית אגרות הברכה</u>

נניח קיים מצולע שמספר צלעותיו גדול מ-5, וישנה נקודה A בתוכו. נחבר את הנקודה A לקודקודים. כיוון שישנם לפחות שישה קודקודים, יווצרו לפחות שש זוויות ש-A היא הקודקוד שלהן. סכום הזוויות הוא $360°$, לכן לפחות אחת הזוויות קטנה או שווה $60°$. נניח זוהי הזווית BAC.



אם $\measuredangle BAC \leq 60°$ אזי $BC \leq AC$ או $BC \leq AB$. אם כך, מצולע שמספר צלעותיו גדול מ-5 לא יכול לקיים את התנאי המבוקש: המרחק מנקודה בתוך המצולע, לכל קודקוד במצולע, קטן מאורך כל אחת משתי הצלעות היוצאות מאותו קודקוד.

מבדיקת תשובותיהם של תלמידים מסתבר, כי כמעט כולם ניסו למצוא ניסוח מתמטי לבעיות; כלומר, הם חשו בצורך להפוך את הבעיה לבעיה מתמטית. לפניכם, לדוגמא, חלקים מתוך פתרון של אחד התלמידים לבעיה הראשונה:

"כיוון שמחיר ההובלה תלוי בדרך... הבעיה הופכת עכשיו למציאת מקום כזה למחסן, שסכום הדרכים היומי, מהמחסן למאפיות יהיה מינימלי..." והתלמיד מגיע למודל מתמטי:

"... לכן הבעיה הופכת לבעיה של מציאת מינימום הפונקציה $y = px + q(s-x)$"

השגיאות האופיניות שהופיעו בין המנסים לפתור את הבעיות הנ"ל, נגרמו כתוצאה מהתבססות על טענות שנראו אולי כנכונות, אך אינן מתאימות לנתוני הבעיה.

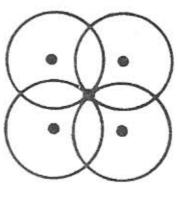
דוגמא של "פתרון" כזה לבעיית המאפיות:

"אם צריכת הקמח על-ידי שתי המאפיות שווה, אז צריך לבנות את המחסן באמצע הדרך ביניהן. אבל אם הצריכה היא שונה, יש לקחת זאת בחשבון. למשל, נניח שצריכת הקמח היומית של מאפיה א' היא 10 טון, והצריכה היומית של מאפיה ב' היא 5 טון. היחס בין הצריכות הוא 10:5, כלומר 2:1. לכן צריך לבנות את המחסן ב- $\frac{1}{3}$ המרחק בין שתי המאפיות, קרוב יותר לזו שצורכת יותר קמח".

בפתרון זה התלמיד התבסס על טענה שנראית נכונה: היחס בין המרחקים למחסן צריך להיות הפוך ליחס של צריכות הקמח. אך טענה זו איננה מתאימה לתנאי הבעיה.

ודוגמא "לפתרון" מהסוג הנ"ל של בעיית אגרות הברכה:

"ניקח עיר שמקבלת ברכה מעיר שניה כלומר אם נחוג דרך העיר השולחת מעגל ברדיוס המרחק בין הערים אז במעגל זה לא נמצאת אף עיר.
ניקח עיר אחרת השולחת לאותה עיר וגם סביבה נחוג מעגל ברדיוס המרחק בין הערים. כך נעשה עם עוד שתי ערים השולחות לאותה עיר.
נקבל 4 מעגלים שבתוכם נמצאת רק עיר אחת.
אם ניקח עיר מחוץ למעגלים הכרח שהדרך בינה לבין העיר המקבלת (הראשונה) עוברת בתוך אחד המעגלים לכן אם נחוג מעגל ברדיוס זה תהיה בו לפחות עיר אחת ששלחה כבר (זו שדרך מעגלה עוברת הדרך).
לכן עיר זו אינה קיימת ועיר יכולה לקבל ברכות ממכסימום 4 ערים ולא יותר מחמש".



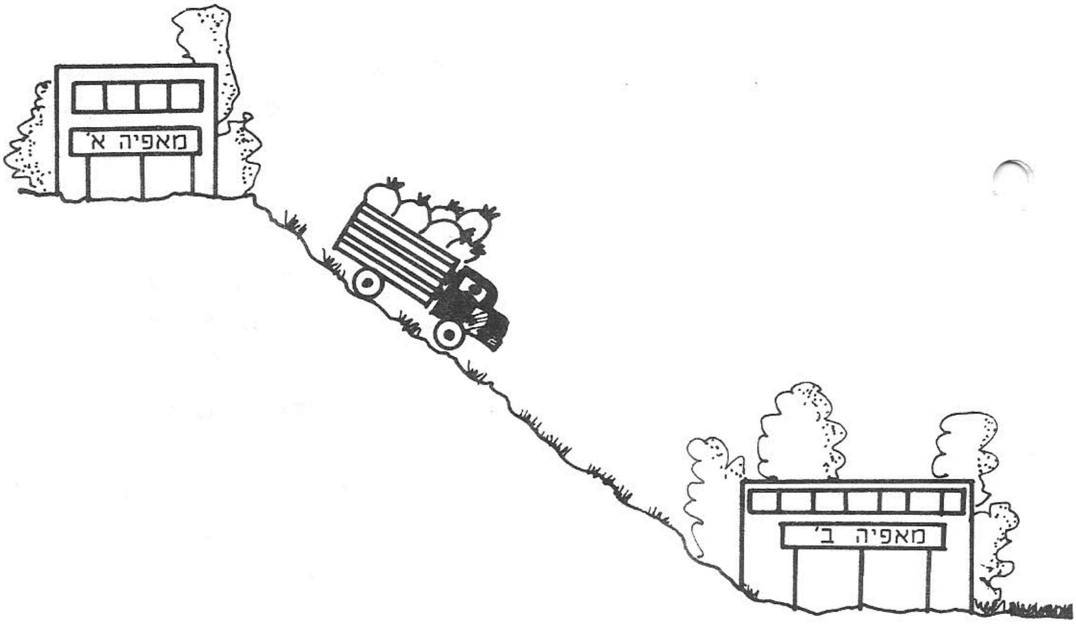
התלמיד טוען כי אם הדרך בין העיר השולחת לעיר המקבלת עוברת בתוך מעגל, אזי לא קיימת עיר שולחת נוספת. טענה זו, שאין לה על מה להתבסס, מביאה אותו למסקנה כי "... עיר יכולה לקבל ברכות ממכסימום 4 ערים...", אך כדי להתאים את מסקנתו למה שנתבקש להוכיח, הוא מוסיף: "... ולא יותר מחמש"!.

תלמיד אחר התבסס על הטענה הבאה: "כדי שהמרחקים יהיו קטנים מן הצלעות צריך שכל הצלעות יהיו שוות או שכל המרחקים יהיו שווים...". כמובן שגם טענה זו איננה מתאימה לבעיה.

בעיית המאפיות, בגלל "חוסר הנתונים" בה וכיוון שהניסוח שלה פתוח ו"מזמין" הצעות מקוריות ואינו מכריח את התלמיד להוכיח דבר מה נתון, משכה תלמידים לתת פתרונות מעשיים. הצעות לדוגמא היו:

"האופה צריך להקים את המחסן באחת משתי המאפיות, מפני שאחרת הוא יצטרך **לקנות עוד קרקע**".

"אם יש ירידה בין המאפיות, הוא צריך לבנות את המחסן **במאפיה הגבוהה יותר**, כדי **לחסוך בדלק**".



אפילו תלמיד שפתר נכון את הבעיה בעזרת מינימום של פונקציה, סיים את פתרונו:
"... לכן יש לבנות את המחסן בתוך מאפיה א' (או כמה שיותר קרוב אליה) כדי שההעברה תהיה הזולה ביותר".

חלק מהתלמידים אשר ניסו לפתור את הבעיה בדרך זו של פתרון מחיי היומיום, בלי לעבור לניסוח מתמטי, התעלמו מבעיית מיקום המחסן והציעו דרכים חילופיות לחסכון בהוצאות כגון: לשלם פחות לנהגים, לבנות מחסן זול יותר וכו'.

תופעות אלו לא הופיעו בפתרונות של בעיית אגרות הברכה. כנראה משום שמהניסוח שלה היה ברור שיש לתת הוכחה מתמטית.
נוסיף ונציין כי באופן יחסי מעט תלמידים הצליחו לפתור את בעית אגרות הברכה. יתכן שריבויי השלילה בניסוח המתמטי גרמו לכך.

בניית מודל מתמטי לבעיה המנוסחת כסיטואציה יומיומית, מהווה, כפי שראינו, קושי לגבי תלמידים.
ובאמת, כפי שמציין פרופ' אגלסטון*: "לגרום לתלמיד שיוכל לזהות איזו משימה מתמטית - אפילו פשוטה - נדרשת ממנו בסיטואציה יומיומית, הינה, כנראה, הבעיה הלא פתורה הגדולה והמכריעה ביותר בתחום הוראת המתמטיקה בבית הספר".

לסיכום נציין כי בניית מודל מתמטי מתאים לבעיה המנוסחת כסיטואציה מחיי היום יום היוותה תנאי הכרחי לפתרון הבעיה. אף תלמיד לא הצליח לפתור נכון מבלי לעבור תחילה לניסוח מתמטי (מלא או חלקי). לכן יש לעבוד על שלב זה עם התלמידים ולהביא אותם להיות מודעים לו.
השגיאה הנפוצה ביותר בפתרון סוג כנ"ל של בעיות היתה התבססות על טענות מתמטיות שאינן מתאימות לסיטואציה המתוארת. זאת כיוון שלא התבצע מעבר למודל מתמטי מלא. שגיאה רווחת אחרת היתה נתינת פתרון מעשי, עם או אפילו בלי קשר למה שמבוקש בבעיה. שגיאה כזו איפיינה תלמידים אשר לא ניסו כלל לעבור לניסוח מתמטי של הבעיה.

ניתוח וסיווג תשובות של תלמידים מעורר מודעות גדולה יותר לקשיים שבעיה עלולה לעורר, ויכול לכן לעזור בבחירת בעיות ובניסוחן - אם בהכנת ספרי לימוד, אם בהכנת דפי עזר או העשרה ואם בע"פ בשיעור.

---

*S.J. Eggleston, Learning Mathematics, APU Occasional Paper No. 1, Department of Education and Science, London, June 1983