חברנו - אברהם קריימר ז"ל

ד"ר אברהם קריימר, חבר קבוצתנו, נפטר בשבת ז' בתמוז תשמ"ד.
אברהם נולד ברוסיה בשנת 1923 וחי בבקו, בירתה של אזרביג'אן, עד עלייתו לארץ בשנת 1977. בבקו שימש אברהם כפרופסור במכון הפדגוגי שם, ועסק בהוראת המתמטיקה. אברהם היה מאנשי השורה הראשונה בברית-המועצות, בשטח זה של פיתוח תכניות לימוד ומחקר הקשור בלמידה ותהליכי חשיבה במתמטיקה. הוא הדריך תלמידים רבים במכון הפדגוגי בעבודותיהם לקראת תארים אקדמאיים, והוציא פרסומים רבים.
בבואו לארץ היה עליו להתחיל הכל מחדש. ללא שפה, היה עליו להתמודד עם ההוראה בבית הספר, וכן להשתלב בעבודה יצירתית של כתיבת חומר ומחקר, כאן, בקבוצת המתמטיקה. אחת מיוזמותיו הברוכות היתה כתיבת חומר העשרה וחוברות לתועלת תלמידים שוחרי מתמטיקה.
ביולי 1984 יצא עם אשתו לטיול קצר בחו"ל, בכוונה לחזור בעוד מועד להדרכה בהשתלמות מורים למתמטיקה שעמדה להיפתח במכון ויצמן. אבל מיד לאחר הגיעו לחו"ל, לקה בהתקף לב ומת תוך זמן קצר מאוד.

אברהם היה הכתובת לכל בעיה מתמטית שהתעוררה בקבוצה.
השילוב של מזג נוח ואהבת הבריות, תבונה בלתי רגילה וחוש הומור, איפשרו לו ליצור קשרים יפים עם הסובבים אותו, ולהשתלב כה יפה בקבוצתנו, כפי שמשתמע מהסיפור הבא.

כאיש כן פעלו...

ערב נסיעתו של אברהם ז"ל לחופשה לחו"ל, כשלושה ימים לפני תחילת השתלמויות הקיץ, "עטנו" עליו, כמו במקרים דומים אחרים, בבקשה לעזרה מתמטית דחופה, שהיתה נחוצה לנו בהשתלמות. למחרת בבוקר, למרות לחץ סידורי הנסיעה, צלצל אברהם למחלקה, ובטלפון נתן לנו הוכחה שהכילה לא רק את התשובה לשאלתנו אלא אף העמקה, הכללה ויישום של הנושא.

כזה היה אברהם...

בחרנו להביא כאן את סיפור-המעשה המתמטי כולו, והריהו לפניכם:

- בהשתלמות מורים, במסלולים שונים, כאשר עוסקים בנושא בסיסי-ספירה, אנו עובדים על סימני ההתחלקות של מספרים הכתובים לפי בסיסי ספירה שונים.

החשיבות של נושא זה היא בהעמקת ההבנה של ההבדל בין יחידות המספר ותכונותיו לבין ריבוי הצגותיו.

במקרה שלפנינו: העובדה כי מספר נתון מתחלק במספר נתון אחר אינה תלויה בהצגתם של המספרים (כגון כתיבתם בבסיסים שונים). לעומת זאת "סימני התחלקות", תלויים בבסיס בו כתובים המספרים. לדוגמא: המספר 25 מתחלק ב 5 תמיד. כאשר המספר כתוב בבסיס עשר: $25_{\text{עשר}}$, סימן הזיהוי תלוי בספרת האחדות - אם היא 0 או 5 המספר מתחלק ב 5.
כאשר המספר כתוב בבסיס שש: $41_{\text{שש}} = 25_{\text{עשר}}$, סימן הזיהוי תלוי בסכום הספרות: אם סכום הספרות מתחלק ב 5 המספר מתחלק ב 5 (בדומה לסימן ההתחלקות ב 9 לגבי מספרים הכתובים לפי בסיס עשר).

במסגרת ההשתלמות ניתנו דפי עבודה העוסקים בסימני ההתחלקות של מספרים הכתובים בבסיסים שונים, כאשר הדרך התחילה לרוב בעבודה במספרים עצמם ונסתיימה בהכללה.

דוגמאות:

1. סימן ההתחלקות במספר α (α מספר טבעי גדול מ 1) לגבי מספר הכתוב לפי בסיס 2α הוא: "אם ספרת האחדות של המספר היא 0 או α המספר מתחלק ב α".

   דוגמאות מספריות להכללה זו:

   ספרת האחדות של $120_{\text{עשר}}$ היא 0 ואכן המספר מתחלק ב 5.

   ספרת האחדות של $43_{\text{שש}}$ היא 3 ואכן המספר מתחלק ב 3.

2. סימן ההתחלקות במספר $\alpha-1$ (α טבעי וגדול מ 2) לגבי מספר הכתוב בבסיס α הוא: "אם סכום הספרות של המספר מתחלק ב $\alpha-1$, המספר כולו מתחלק ב $\alpha-1$".

דוגמאות מספריות להכללה זו:

סכום הספרות של המספר $315_{\text{עשר}}$ הוא 9 ואכן המספר כולו מתחלק ב 9.

סכום הספרות של $233_{\text{חמש}}$ מתחלק ב 4 ואכן המספר כולו מתחלק ב 4.

לאחד מדפי העבודה, צרפנו בעיה כללית המתבססת על הבנה כללית של סימני ההתחלקות של מספרים, הכתובים בבסיסי ספירה שונים.

וזו הבעיה!

מצא מספרים הכתובים בבסיס α (α טבעי גדול מ-1) אשר לגביהם מכפלת המספר בעצמו מסתיימת בספרה 1. מה תוכל לומר על ספרת האחדות של מספרים אלו?

במשך שנים הצגנו בעיה זו בפני המשתלמים והראינו כי:
מספרים, הכתובים בבסיס α, אשר ספרת האחדות שלהם היא 1 או $\alpha - 1$, מכפלתם בעצמם מסתיימת בספרה 1.

דוגמאות מספריות:

$$15_{\text{שש}} \times 15_{\text{שש}} = 321_{\text{שש}}$$

$$21_{\text{עשר}} \times 21_{\text{עשר}} = 441_{\text{עשר}} \qquad \text{וכד'...}$$

ההוכחה להכללה זו פשוטה, והרי היא לפניכם:

א) מספר הכתוב בבסיס α (α טבעי גדול מ 1), אשר ספרת האחדות שלו היא 1 ניתן לכתיבה בצורה:

$$a\alpha + 1 \quad (\text{מספר שלם אי שלילי } a)$$

מכפלת המספר בעצמו:

$$(a\alpha + 1)(a\alpha + 1) = a^2\alpha^2 + 2a\alpha + 1 = b\alpha + 1$$

כאשר:

$$b = a^2\alpha + 2a$$

כיוון ש a ו α שלמים אי שליליים גם b כזה. כלומר, ספרת האחדות של המכפלה $b\alpha + 1$ היא 1.

ב) כאשר ספרת האחדות היא $\alpha - 1$, המספר ניתן לכתיבה בצורה:

$a\alpha + \alpha - 1$ (a שלם אי שלילי).

מכפלת המספר בעצמו היא:

$$(a\alpha + \alpha - 1)^2 =$$
$$= [(a + 1)\alpha - 1]^2 =$$
$$= (a + 1)^2\alpha^2 - 2(a + 1)\alpha + 1 =$$
$$= b\alpha + 1$$

כאשר b הפעם הוא:

$$b = (a + 1)^2\alpha - 2(a + 1)$$

גם הפעם b הינו מספר שלם אי שלילי, כלומר ספרת האחדות של המספר היא 1.

בהשתלמות קיץ תשמ"ג אמר אחד המשתלמים: "התשובה נכונה והוכחתה נכונה, אך מאין הבטחון כי זו התשובה היחידה?".

שמחנו להערה זו, אך לא ידענו להשיב עליה מיד. בקשנו מהמשתלמים לחפש פתרון לשאלתו, והבטחנו לעשות זאת בעצמנו, אך הדבר נשתכח...

בהכנות האחרונות להשתלמות הקיץ (תשמ"ד) הענין צף ועלה שנית. ניסינו את כוחנו בזה, אך משעבר זמן ועדיין לא יכולנו לשאלה, החלטנו ללכת בדרך הפתרון הקל ולשאול את אברהם.

אברהם הקשיב וכדרכו הבטיח לחשוב על הבעיה בערב בביתו, ולהביא את מה שיוכל למחרת. למחרת בבוקר, כיוון שהיו לו עדיין סידורים רבים לרגל נסיעתו, לא יכול היה לבוא לעבודה, אך את הבטחתו קיים באמצעות הטלפון.

וזו תשובתו של אברהם, שהיא כבמקרים אחרים כוללת ביותר ומאירת עיניים:

נניח כי קיימים מקרים שבהם ספרת האחדות של המספר, הכתוב לפי בסיס α, תהא שונה מ 1 או מ $\alpha - 1$, ומכפלתו בעצמו תסתיים ב 1.

"נתרגם" את התנאים שכתבנו כאן לכתיב אלגברי:
תהי m ספרת האחדות של המספר.
התנאי הראשון שעל m ו α לקיים הוא:

$$1 < m < \alpha - 1$$

(כי לגבי המקרים $m = 1$ ו- $m = \alpha - 1$ הוכחנו כבר כי מכפלת המספר בעצמו מסתיימת בספרה 1.)
המספר עצמו ניתן אז להיכתב בצורה:

$$n\alpha + m \quad (\text{n שלם ואי שלילי})$$

מכפלת המספר בעצמו תהא:

$$(n\alpha + m)^2 = n^2\alpha^2 + 2mn\alpha + m^2$$

$$= b\alpha + m^2 \qquad (b = n^2\alpha + 2mn)$$

וכמו במקרים הקודמים גם כאן b הינו מספר שלם אי שלילי.

קבלנו איפוא כי מכפלת המספר בעצמו הינה סכום של שני מחוברים: מכפלה של מספר שלם אי שלילי ב α ו m^2.
מכאן, מכפלה זו תסתיים בספרה 1 אם ורק אם m^2 יסתיים בספרה 1 כשהוא כתוב בבסיס α.
כלומר על m^2 לקיים:

$$m^2 = k\alpha + 1 \quad (\text{k מספר שלם אי שלילי})$$

וזה התנאי השני שעל m ו α לקיים.

נעזר בתנאי השני או בשקול שלו:

$$m^2 - 1 = k\alpha ,$$

ונחפש דוגמאות מספריות:

נתחיל ב $m = 2$ $\quad m^2 - 1 = 3$

אם $k = 1$ אז α (הבסיס) הוא 3.

אבל במקרה זה $m = \alpha - 1$ וזהו מקרה ידוע עוד מהתשובה הקודמת, לכן נמשיך ונחפש.

כאשר $m = 3$ $\quad m^2 - 1 = 8$

לכן אם $k = 1$, אז α (הבסיס) הוא 8.

כלומר, קבלנו כי אם ספרת האחדות של מספר הכתוב לפי בסיס שמונה היא 3, אזי מכפלתו בעצמו תסתיים תמיד ב 1.

דוגמאות מספריות שנבדוק יקיימו זאת, למשל:

$$3_{\text{שמונה}} \times 3_{\text{שמונה}} = 11_{\text{שמונה}}$$

או

$$13_{\text{שמונה}} \times 13_{\text{שמונה}} = 171_{\text{שמונה}}$$

אפשר להראות זאת גם באופן כללי. המספר בבסיס שמונה יהא $k \cdot 8 + 3$, ומכפלתו בעצמו:

$$(k \cdot 8 + 3)^2 = k^2 \cdot 8^2 + 6 \cdot k \cdot 8 + 9 =$$

$$= b \cdot 8 + 9 = \qquad (b = 8k^2 + 6k)$$

$$= (b + 1) \cdot 8 + 1$$

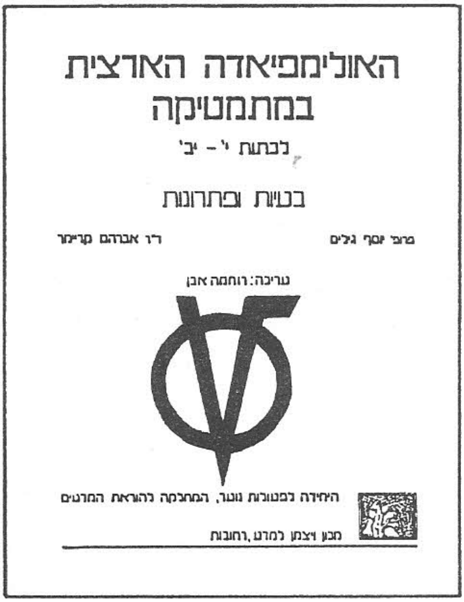
באותו אופן אפשר להראות כי מספר הכתוב בבסיס 15, $(4^2 - 1)$, אשר ספרת האחדות שלו היא 4, מקיים כי מכפלתו בעצמו תסתיים תמיד ב 1 וכד'...

תהי דוגמא זו, מידמו האחרון של אברהם בתוכנו, סמל לאיש ולפעלו.

ביום בו נטמן אברהם קריימר ז"ל, חזר מבית הדפוס ספר חדש שהוא פרי עבודתו המשותפת עם פרופ' יוסף גיליס יבל"א.

אברהם לא זכה לראותו בלבושו הסופי.

שם הספר:



אומר על אברהם, ידידו, פרופ' גיליס:

"מאז הכרתי אותו, כיבדתי אותו כאדם, כמתמטיקאי וכמורה. עבדנו יחד תוך שיתוף פעולה הדוק מאוד, על ניהול האולימפיאדה הישראלית לנוער במתמטיקה, וגם על הכנת המשתתפים לאולימפיאדה הבינלאומית. הספר הזה הוא גם פרי שיתוף פעולה זה.

יש לציין כי את החלק העיקרי של הספר יש לזקוף לזכותו של ד"ר קריימר שהביא למשימה ידע רחב במתמטיקה, הבנה יפה לצרכי התלמידים וטעם עדין וטוב.

את חלקי הצנוע בספר אני מקדיש לזכרו של אברהם קריימר, ידיד יקר, מתמטיקאי שנון, מורה דגול. הוא יחסר מאוד למערכת החינוך ולי אישית, ואני מביע את תנחומי לאלמנתו, לבנו ולכל בני משפחתו".

אברהם לא הגיע לעודד את תלמידיו, בתיכון "קציר" ברחובות, ביום בחינת הבגרות במתמטיקה שלהם - בדיוק באותו היום נערכה הלוויתו.

כותב עליו אחד מתלמידיו:

"קשה עדיין להשלים עם הידיעה המעציבה שניחתה עלינו דקות מעטות לפני תחילת מבחן הבגרות במתמטיקה, ובה נתבשרנו על מותו של מורנו למתמטיקה במשך שלוש שנות התיכון, ד"ר א. קריימר.

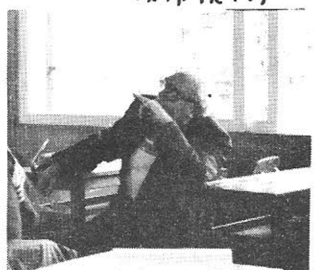
ישנו אולי מימד טרגי בעובדה שד"ר קריימר נפטר דוקא ימים ספורים לפני המבחן שלקראתו הכין אותנו במשך שלוש שנים. כולנו הערכנו את המאמצים הכבירים שהשקיע כדי שנעמוד במבחן זה בהצלחה. אני משוכנע, כי עשינו את כל מה שביכולתנו כדי להשתמש בכלים שהעמיד לרשותינו ולהצליח במבחן, משום שהרגשנו שהצלחה זו אנו חבים לזכרו.

ד"ר קריימר ישמר בזכרוננו כמורה מעולה. נראה לי כי מעולם לא עמד לפנינו מורה שידע בצורה כה טובה את המקצוע אותו למד. הוא היה מקפיד על כל פרט ופרט וחינך אותנו לסדר ולדייקנות מקסימליים בעבודתנו. כל כך כעס על כל שיעור שלא התקיים מסיבה כלשהי, כל כך השתדל להקנות לנו מהידע העצום שלו ולחנך אותנו לחשיבה מתמטית נכונה. אני בטוח כי עבודתו הקשה ומאמציו לא יפסיקו לתת אותותיהם בנו עם סיום מבחן הבגרות. כולי תקוה כי הכלים שהעמיד לרשותנו יוסיפו לשמש לעזר ולתועלת לרבים מאיתנו בהמשך דרכינו, ועבודתו הקשה תישא פירותיה".

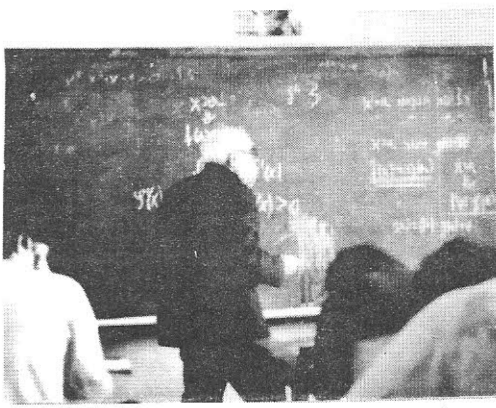
בוגר מחזור ט'
תיכון "קציר"
רחובות

אלול, תשמ"ד

ד"ר. א. קרמר



זו נקודה עדינה
כאן יש משהו פיקנטי.



בין שאר פעילויותיו הרבות, תרם אברהם גם לעתוננו *שבבים*. מאמריו עסקו בדרך כלל בתחומים שעניינו אותו ביותר: העשרה מתמטית, פתרון בעיות וניתוח דרכי חשיבתו של הפותר. האחרון שבהם מופיע בתיק זה של *שבבים*, ואותו לא זכה אברהם לראות בגרסתו הסופית.

רשימת פרסומיו *בשבבים:*

א. קריימר ור. אבן, פתרון בעיות לפי "עקרון המגירות", תיק מס' 18.
א. קריימר, מתמטיקה בשחמט, תיק מס' 21.
א. קריימר ונ. תעיזי, העשרה לנושא הפונקציה הריבועית, תיק מס' 22.
א. קריימר, פעולות מחשבתיות בפתרון בעיות מתמטיות, תיק מס' 22.
ר. אבן וא. קריימר, האם תוכל/י לפתור את הבעיה הבאה?, תיק מס' 23.
א. קריימר ור. אבן, פותר מול בעיה, תיק מס' 24.

בשנה שעברה קיימנו סקר בין קוראי *שבבים*, שהתייחס בעיקר לתיק מס' 22. ממצאי הסקר הראו כי שני מאמריו של ד"ר קריימר בתיק זה עוררו את עניינם של קוראים רבים במיוחד.

יהי זכרו ברוך

קבוצת המתמטיקה
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע