מהם אותם הדברים הנקראים משתנים?

מאת: זיגריד וגנר*

תרגום: נורית זהבי

כולנו מודעים לקשיי תלמידים המתחילים ללמוד אלגברה בבואם להשתמש בסמלי אותיות - משתנים. דיון בקשיים כאלו והצעות כיצד להתגבר עליהם אפשר למצוא בין השאר בשני מאמרים (Herscovics and Kieran, 1980; Rosnick, 1981).

מבין "ספורי האלגברה" המבהירים ליקויים בתפישת מושגים, חביב עלי במיוחד הסיפור הבא:

נושא השיעור היה בעירות מילוליות בקשר ל"מספרים שלמים עוקבים". המורה נסתה להכין את תלמידיה לשימוש המתאים במשתנה a, a + 1, ... על ידי דוגמאות מספריות: "מהו המספר העוקב של 17?" ותלמיד ענה: "שמונה עשרה." המורה, מודעת לקושי בייצוג מספר עוקב על ידי הוספת 1, השתדלה להקל ושאלה, "מה עלינו לעשות ל 17 כדי לקבל 18?" "להוסיף 1," היתה התשובה. "יפה," עודדה, המורה, "ואם נסמן על ידי a מספר שלם איזה שהוא, כיצד נרשום את המספר העוקב של a? כלומר, כיצד נסמן את המספר המתקבל על ידי הוספת 1 ל a?" ללא כל היסוס נשמעה התשובה, "b".

בלבול זה בין הסדר האלפביתי והסדר המספרי הינו טעות נפוצה בין תלמידים המשתמשים לראשונה בסמלי אותיות (Wagner, 1981). ואולם, הסיפור מדגים כי גם בהמשך לימודיהם, לאחר שרכשו נסיון בסמלי אותיות, יש המתפתים לחזור על שגיאה זו כאשר נוצרת סיטואציה חדשה.

מחקרים בשנים האחרונות אבחנו כמה גורמים לכך שסמלי אותיות הם קלים לשימוש אך קשים להבנה.

את מרבית הגורמים ניתן לקבץ בשתי קטגוריות:

1. סמלי אותיות הם כמו שמות מספרים (numerals), אך הם גם שונים מהם.
2. סמלי אותיות הם כמו מילים, אך הם גם שונים מהם.

כלומר, לסמלי אותיות יש מאפיינים כמו לשמות מספרים, מאפיינים אחרים כמו למילים וכן מאפיינים נוספים שלהם עצמם.
כאשר מתחילים ללמד להשתמש באותיות כסמלים, בכיתות הנמוכות, רצוי מבחינה פדגוגית, להצביע על המאפיינים המשותפים להם ולשמות מספרים ומלים - שתי מערכות סמלים המוכרות לתלמידים. ואולם, יתכן שתלמידים ירחיבו את ההכללה יותר מדי ויניחו שהשימוש באותיות כסמלים אינו יותר מאשר סימון חדש לרעיונות ידועים. בהמשך לימודיהם, אמנם, ישתמשו תלמידים אלו בסמלי אותיות בהדרגה בצורות שונות ומשמעותיות יותר, אבל לא ישכילו להבין את התכונות הייחודיות של סמלי אותיות, אשר נותנות לשפה המתמטית, הרבה מן הדיוק, ההכללה והגמישות שלה.

הבה ניתן דעתנו על כמה מהמאפיינים של אותיות כסמלים. ככל שנזהה יותר מאפיינים, ניטיב לתכנן דרכי הוראה אשר תעזורנה לתלמידים להבין ולהעריך את אותם הדברים הנקראים משתנים.

אותיות הן כמו שמות מספרים, אך הן גם שונות מהם.

<u>המאפיינים הדומים</u>:

מלבד תכונת הסדר המשותפת לאותיות ולמספרים שאותה כבר הזכרנו, יש תכונות דומות נוספות למספרים ולאותיות כסמלים. נתחיל מכך, שישנן אותיות כמו π ו e אשר למעשה *הן* שמות מספרים, שהרי הן מהוות סימול מקובל למספרים מסויימים אשר אין להם הצגה ספרתית פשוטה.

לעיתים קרובות אותיות ושמות מספרים מופיעים ביחד בביטויים מתמטיים. בעצם, אחת הפעמים הראשונות בהן פוגש התלמיד בשימוש באותיות כסמלים היא בתבניות פסוק כמו $n + 3 = 17$ או $46 - x = 28$, ובהן האותיות מופיעות ביחד עם שמות מספרים, סימני פעולה וסימני יחס. במילים אחרות, האותיות *נראות* כאילו הן חייבות להתנהג כמו שמות מספרים.

מציאת קבוצת האמת של תבניות כאלה עבור n ו x עשויה להראות לתלמידים בראשית לימודי האלגברה, את הדמיון המובהק ביותר בין אותיות ושמות מספרים. כלומר, אות יכולה למעשה לשמש כמספר *זמני*, כסמל שכותבים עד אשר מוצאים מהו המספר החסר ורושמים את המספר *האמיתי*. רק מאוחר יותר, כאשר הם לומדים על קבוצות הצבה וקבוצות אמת, מתבררות המיגבלות של פירוש האותיות בתור שמות מספרים. אזי מתחילים התלמידים להכיר, כי אותיות הן יותר מאשר מעין שמות מספרים.

המאפיינים המבדילים:

מחידוד ההבדל שנרמז קודם, נקבל כי מבחינה מתמטית, ההבדל המשמעותי ביותר בין אותיות ושמות מספרים, הוא זה: שם מספר מייצג מספר יחיד, אך אותיות מייצגות בעת ובעונה אחת הרבה מספרים שונים (אמנם בנפרד) כמו למשל, עבור $0 < n < 20$ או $y = 3x + 2$. לתכונה זו של ייצוג סימולטני נתייחס כאשר נקרא לסמלי האותיות *משתנים*, בידענו היטב כי יתכן שסמלים אלו, בהקשר מסויים, ייצגו נעלם יחיד ואפילו מספר קבוע! תכונת הייצוג הסימולטני ביחד עם כמה מאפיינים אחרים, שידובר בהם בסעיף הבא, מאפשרת לכלול בשפה המתמטית משפטים כלליים - הגדרות, אקסיומות, משפטים, נוסחאות ועוד - בצורה ממצה וחד משמעית.

הבדל נוסף בין אותיות ושמות מספרים נראה למעשה כדמיון ביניהם: אלו וגם אלו יכולים לשמש לזיהוי וכינוי של עצמים רבים מלבד מספרים. למשל, אפשר לקרוא לנקודה P ולפונקציה g כשם שאפשר לזהות תיבת דואר על ידי מספרה. אבל יש הבדל דק: בדרך כלל משתמשים במספרים לזיהוי עצמים ספציפיים בקבוצה, בעוד שאותיות משמשות על פי רוב לזיהוי עצמים משתנים, אקראיים. הסיבה לכך שאנו נוטים להשתמש באותיות ולא בשמות מספר לייצוג עצמים כלליים היא, כנראה כפולה: (1) אותיות נראות כשמות מקוצרים ולכן קל, אפילו לתלמידים צעירים, לתת להם פירוש נאיבי, ו (2) אנו יודעים כי אותיות ישמשו לייצוג משתנים מספריים בהמשך הלימוד ולכן איננו מהססים להשתמש באותיות לכינוי משתנים אחרים כאשר זה נוח והגיוני.

Marilyn Matz (1979) מצביעה על שני הבדלים נוספים בין אותיות ושמות מספר. האחד הוא סמיכות הכתיבה של אותיות ומספרים המקובלת לביטוי כפל, כמו 3mn, בניגוד להתייחסות לערך המקום עבור מספרים בלבד כמו 347. ברור כי מקורה של סמיכות הכתיבה המקובלת הוא במערכת סמלים שונה, והרי אותיות יכולות לייצג מספרים חד-ספרתיים או רב-ספרתיים. לכן, ביטוי כמו 3mn מתאר בצורה חד משמעית את המכפלה של 3, m ו n.

ההבדל השני שמעלה Matz הוא שהסימנים המוצמדים לסמלי אותיות, אינם בהכרח תואמים את ערכם, כשם שקורה לגבי שמות מספר.
כלומר x יכול לייצג מספר שלילי ו x - יכול להיות מספר חיובי. "סילוף" הסימן לגבי סמלי אותיות גורם לכך שההגדרה הסטנדרטית של ערך מוחלט:

$|x| = x$ עבור $x \geq 0$

$|x| = -x$ ועבור $x < 0$

היא אכן קשה להבנה לתלמידים רבים.

אותיות הן כמו מילים אך הן גם שונות מהן

המאפיינים הדומים:

הדמיון הבולט ביותר בין אותיות ומילים הוא בכך שאלו ואלו יכולות לשמש כתופשי-מקום בביטויים מסויימים. נתבונן למשל, במשפט הבא, "הנה *הוא* המורה למתמטיקה". במקום כינוי-השם *הוא* אפשר לרשום שמות של גברים ולקבל משפטים שהם נכונים או שקריים, בדיוק כשם שניתן להציב במקום x ב $x^2 + 2x = 3$ מספרים שונים ולקבל פסוקים מתמטיים, אמיתיים או שקריים.

התכונה של תפישת-מקום, היא חשובה מאוד והשפיעה על אלו הטוענים כי סמלי אותיות הינם בעצם כמו ביטויים מילוליים (Beberman, 1964; Hockett, 1967; Russel, 1940; Tarski, 1941). כפי שנראה, טענה זו מפריזה בהדגשת הדמיון שבין אותיות ומילים ומפחיתה מהדגשת העוצמה של סמלי אותיות. מכל מקום, התלמידים צריכים להבין את תכונת תפישת-המקום על מנת להעריך את *הכללית והגמישות* של סמלי אותיות. מיד נתייחס לשני רעיונות אלו ביתר פירוט.

דימיון נוסף בין אותיות ומילים שכבר הוזכר לעיל, מתבטא בעובדה כי לעיתים נבחרות אותיות בתור קיצורים למילים, כמו למשל, כאשר n מייצג מספר *(number)*. הטכניקה של בחירת אות המרמזת על מה שהיא מייצגת היא בעלת אופי פדגוגי וללא ספק עוזרת לתלמידים מתחילים. ואולם Rosnick (1981) מעלה סברה שהלומדים אלגברה עלולים להתפתות לטעות ולחשוב ש *a* מייצג תפוחים (apples), בעוד שלמעשה *a* מייצג את *מספר* התפוחים.

נקודה דומה שלישית בין אותיות ומילים היא בכך שלאלו ולאלו יכולות להיות משמעויות שונות בהקשרים שונים. פירוש הדבר, מובנה של המלה *שיעור* וגם מובנה של האות x תלויים בהקשר שבו הם מופיעים. [המובן של אות כסמל נקבע על ידי *התפקיד* אותו הוא ממלא (בתור שם, נעלם, פרמטר וכו'), *התחום* של ערכיו, *וקבוצת האמת המתאימה* (כאשר מדובר בתבנית פסוק).] דמיון זה נראה לרוב כמובן מאליו ומקבל משמעות רק כאשר מעמידים אותו מול ההבדלים.

המאפיינים המבדילים:

על אף שגם אותיות וגם מילים יכולות לקבל משמעויות שונות בהקשרים שונים, הן נבדלות בעקביות המשמעות בתוך אותו הקשר. כפי שמוסכם במתמטיקה, המשמעות ובמיוחד הערך המספרי שמייחסים לאות כסמל, חייבים להיות זהים בכל מקום שהאות מופיעה באותו ההקשר ואמנם, במשוואה כמו $3(x + 2) + 5 = 17 - 2x$, מציבים אותו ערך עבור x בכל ההופעות שלו במשוואה.

דבר זה אינו נכון בביטויים מילוליים. מילים זהות יכולות להתייחס לדברים שונים באותו משפט עצמו. לדוגמא, "על *שער* הבנק נרשם *שער* הדולר." אפילו בתוכן מתמטי יתכן כי אותו ביטוי מילולי יתייחס לדברים שונים. למשל, "הסכום של *מספר אי-זוגי* ומספר זוגי הוא תמיד *מספר אי-זוגי*." פרט למקרה שבו המספר הזוגי שווה לאפס, הרי ברור לנו כי הביטוי *מספר אי-זוגי* מתייחס בפעם הראשונה למחובר ובפעם השניה לסכום. רק בתרגום לוגי נוקשה לשפה מתמטית של המשפט שנסחנו,

$$\forall x \, \forall y \, (x \text{ אי-זוגי} \;\wedge\; y \text{ זוגי} \longrightarrow \exists z (z = x + y \;\; z \text{ אי-זוגי}))$$

נעשית ההבנה שבשתיקה - מפורשת, וסמלים שונים מתארים את שתי ההופעות של *מספר אי-זוגי*.

ההבדל המובהק ביותר בין אותיות ומילים נובע מכך שאותיות בניגוד למילים אינן מתקשרות למשמעויות קבועות. כלומר, <u>לא ניתן לחבר מילון הכולל את המשמעויות במתמטיקה של סמלי אותיות</u>. במקום זאת, אנו חופשיים להגביל את המשמעות ובמיוחד את התחום של מרבית סמלי האותיות בכל אופן שנרצה - תכונת *חופש התחימה* ולהיפך, אנו חופשים לבחור כמעט כל אות לסמל את העניין הנתון - תכונת *חופש הבחירה*. (מבחינה מתמטית עניינה של אות כסמל הוא התחום או קבוצת ההצבה. מבחינה פסיכולוגית נוטים לייחס לאות בתבנית פסוק את קבוצת האמת שלה.)

תכונת חופש התחימה של סמלי אותיות היא זו שנותנת לשפה המתמטית אפשרויות הכללה כה רבות. המשפט, "הנה x המורה למתמטיקה" יכול להתייחס לא רק לגברים ונשים, כי גם אפילו למחשבים. הסמל x אינו כופה הגבלה טבעית על כלליות המשפט ומאפשר לנו חופש לקבוע את תחום התוכן כפי שאנו מוצאים לנחוץ.

סמלי אותיות מתירים חופש תחימה, מאחר והאותיות שלא כמו מילים אינן כבולות על ידי הקשרים. נכון, כמובן, כי אותיות מסוימות משמשות באופן מסורתי בהקשרים מסויימים. למשל, בהעדר הוראות נוגדות, מקובל לסמן ב-x את המשתנה הבלתי תלוי וב-y את המשתנה התלוי בתיאור קשר פונקציונלי. אנו דבקים במוסכמות אלו כדי להמנע מקביעת התחום בכל פעם שמשתמשים באותיות. מכל מקום, אנו רשאים להפר את ההסכמים המסורתיים, ולעיתים תכופות אנו עושים זאת, פשוט על ידי קביעה מפורשת של התפקיד והתחום של האות בהתאם לדרוש.

תכונת חופש הבחירה של סמלי אותיות היא זו שנותנת לשפה המתמטית גמישות כה רבה. ישנן הרבה אפשרויות לייצוג על ידי משתנים (אם נספור גם צורות כמו a_1, a_2, a_3, ... הרי שיש אינסוף אפשרויות) וניתן להחליפן זו בזו מבלי שייגרם שינוי בענין. לכן, ניתן לבצע הצבות כמו בהרכבה של פונקציות מבלי לשנות את המשמעות המתקבלת של סמלי האותיות. (אם $y = 2x + 3$ ו $z = 5y - 7$ אזי $z = 5(2x + 3) - 7$).

כאשר מדובר בביטויים מילוליים, הרי שאופי העצמים בקבוצה המתוארת, מגביל את הביטויים בהם ניתן להשתמש. כתוצאה מכך, שינוי בתיאור המילולי כמעט תמיד מתפרש כשינוי בנושא. למשל שינוי *הוא* או *היא* במשפט, משנה את הקבוצה שבה מדובר מגברים לנשים.

ברור, כי לא כל השינויים בביטויים מילוליים הם כה דרמטיים כמו השינוי של *הוא* ל *היא* אבל אפילו בשימוש במילים נרדפות ניתן להבחין בהבדלים דקים.

הצעות למורה

כיצד נוכל, אנו כמורים, לעזור לתלמידינו לפתח הבנה טובה יותר של סמלי אותיות? ראשית, אנו בעצמנו צריכים להיות מודעים לאופנים הרבים של שימוש בסמלים אלו, ולהכיר את המאפיינים המיוחדים בכל ההקשרים.
בנוסף לכך עלינו להעמיד את התלמידים על התכונות של סמלי אותיות ולהצביע על המאפיינים הדומים להם ולמילים ושמות מספר וכן על המאפיינים הבלעדיים לסמלי אותיות עצמם.

אם אנו רוצים שהתלמידים אכן יבינו את עצמתם של סמלי אותיות, אך לא יתייגעו על ידי דיון ארוך (וכנראה לא משמעותי עבורם) בתכונותיהם, עלינו להביא את הרעיונות בהדרגה, כאשר השימושים השונים מופיעים בתכנית הלימודים. למשל, בכיתות הנמוכות כאשר משתמשים ב P לסמל נקודה (Point)

או ב N לסמל מספר (Number), אפשר לומר שהאותיות הן קיצורן של המילים. מאוחר יותר, כאשר משתמשים באותיות שרירותיות כסמלים, אפשר להסביר שאותיות אלו הן כמו שמות של עצמים. כאשר מתחילים להשתמש באותיות שרירותיות בהקשרים מספריים, עלינו לציין כי אין כל קשר בין הסדר האלפבתי והסדר המספרי.

כאשר עוברים התלמידים ללמוד אלגברה, עליהם לדעת כי אות מתנהגת כמו שם מספר בכך שהיא מייצגת מספר מסויים וניתן להפעיל לגביה פעולות וקשרים מספריים; הם גם חייבים לדעת כי אותיות מתנהגות בצורה שונה משמות מספר ביחס לסמיכות הכתיבה המקובלת וסימן המספר. עוד עליהם לשים לב כי אות, בדומה למלה, יכולה לייצג עצמים שונים בהקשרים שונים, אך אות נבדלת ממלה בכך שעליה לסמל אותו עצם בתוך הקשר מסויים.

התייחסות לאנלוגיה שבין מלים וסמלי אותיות כתופשי-מקום, יכולה לעזור לתלמידים להתרשם מכך שאותיות מייצגות בדרך כלל הרבה מספרים שונים בעת ובעונה אחת. בנקודה זו אפשר לדון בתכונת *חופש התחימה* של סמלי אותיות ולהעמיד זו מול זו את הכלליות של אותיות עם מיגוון ההקשרים של ביטויים מילוליים.

תכונת *חופש הבחירה* של סמלי אותיות נראית כרעיון שתלמידים לומדים לצטט על נקלה, אך מתקשים להפנימו. כלומר, תלמידים רבים *אומרים* שאותיות שונות יכולות לייצג אותו הדבר, אך דומה ולעיתים קרובות הם *מאמינים* שאותיות שונות חייבות לייצג עצמים שונים.

למשל, לפני או בתחילת לימודי האלגברה, יש הסבורים כי שינוי האות של הנעלם במשוואה, עשוי לשנות את הפתרון (Wagner, 1981). נוכל לעקוב אחר תפישה מוטעית זו, אם ניתן לתלמידים לפתור משוואה ולאחר מכן נרשום לידה אותה משוואה עם נעלם שונה ונבקש לדעת מהו פתרונה מבלי לפתרה.

מחקר נוסף נערך בעת האחרונה בעקבות Menger (1956), Collis (1975) ו Kuchemann (1978), בניסיון ליצור קטלוג של השימושים השונים בסמלי אותיות במתמטיקה. ברור, כי יחלוף זמן בטרם תתקבל תמונה מלאה אודות אותם הדברים הנקראים משתנים. ברור גם כי אנו כמורים, איננו יכולים לחכות לכל התשובות. רצוי כי כבר עתה נשתדל לעזור לתלמידינו להתגבר על הקשיים אשר כבר אובחנו.

מאוחר יותר, במסגרת קורס האלגברה, עת יודגמו תכונות מספרים כמו חוק הקיבוץ וחוק הפילוג, כדאי לתת גם דוגמאות בהן מציבים אותו מספר במקום

אותיות שונות. כמובן שאנו רוצים להדגיש את הכלליות של החוקים על ידי בחירת מספרים שרירותיים (בדרך כלל שונים), אבל, אם נתמיד להמנע ממקרים בהם מציבים אותו מספר במקום אותיות שונות, אנו עלולים שלא במתכוון לחזק את הרושם המוטעה כי אותיות שונות חייבות לייצג מספרים שונים.

לסיכום, נעיר כי בעת האחרונה נחשפים התלמידים לעבודה עם מחשבים ולשימוש בסמלי אותיות הנוגד את השימוש המסורתי במתמטיקה. לעיתים קרובות הם נתקלים בתכנית בשימוש רקורסיבי כמו שקורה בהוראה הבאה $n = n + 1$. בשנים האחרונות מנסים לחקור מהי השפעת תכנות מחשבים על ההבנה הכוללת של תלמידים לגבי סמלי אותיות.

ספרות:

Beberman, M. "An Emerging Program of Secondary School Mathematics." In *New Curricula,* edited by R.W. Heath. New York: Harper & Row, 1964.

Collis, K.F. *The Development of Formal Reasoning* (Report of Social Science Research Council Project HR2434/1). Newcastle, New South Wales, Australia: University of Newcastle, May 1975.

Herscovics, Nicolas, and Carolyn Kieran. "Constructing Meaning for the Concept of Equation." *Mathematics Teacher* 73 (November 1980): 572-80.

Hockett, C.F. *Language, Mathematics, and Linguistics.* The Hague: Mouton, 1967.

Kuchemann, D. "Children's Understanding of Numerical Variables." *Mathematics in School* 7 (1978): 23-26.

Matz, M. *Towards a Process Model for High School Algebra Errors* (Working Paper 181). Unpublished manuscript, M.I.T. Arti i Intelligence Laboratory, 1979.

Menger, K. "What are *x* and *y?* *The Mathematical Gazette* 40 (1956): 246-55.

Rosnick, Peter. "Some Misconceptions Concerning the Concept of Variable." *Mathematics Teacher* 74 (September 1981): 418-20, 450.

Russell, B. *An Inquiry into Meaning and Truth.* London: Allen & Unwin, 1940.

Tarski, A. *Introduction to Logic.* New York: Oxford University Press, 1941.

Wagner, Sigrid. "Conservation of Equation and Function under Transformations of Variable." *Journal for Research in Mathematics Education* 12 (March 1981): 107-18.