מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולד

חוברת לתלמיד

מס' 4

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

כולנו מכירים את סימני ההתחלקות של מספרים ב-2, 3, 4, 5, 9 ו-10.
ישנם המכירים גם את סימני ההתחלקות ב- 6, 8, 11, 25 ו-50.
אך האם ישנם סימני התחלקות במספרים כמו 17? 83? או 1973?

בחוברת זו נפתח שיטות לבדיקת התחלקות של מספרים בכל המספרים הראשוניים.

כמובן, כוונתנו איננה להקל על חישובים גרידא, לשם כך נוכל להשתמש במחשבון (מחשב כיס), אלא להעשיר ולהעמיק את מבנה עולם המספרים שלנו, ולהבין טוב יותר את הקשרים בין המספרים השונים ותכונותיהם.

ב ב ר כ ה,

המחבר.

ניסן, תשמ"ג

המספרים הראשוניים (מלבד 2) מסתיימים בספרות: 1, 3, 7 או 9.
בהתאם לכך נחלק את הדיון בסימני ההתחלקות בהם.

כלל א' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-1

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n .
נוכל לכתוב את N בצורה הבאה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 1. כלומר, $P = 10p + 1$

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m - np$.

טענה: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

הוכחה:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N - Pn$ מתחלק ב-P .
(בחרנו ב-$N - Pn$ כיוון שהוא יביא אותנו לתוצאה המבוקשת, כפי שיתברר בהמשך).

$N = 10m + n$ $\quad P = 10p + 1$ ולכן:

$$N - Pn = 10m+n-(10p+1)n = 10m+n-10pn-n = 10m-10pn = 10(m-pn) = 10N_1$$

אם N מתחלק ב-P, אזי $N - Pn$ מתחלק ב-P. ואז $10N_1$ מתחלק ב-P. P הוא מספר ראשוני (שונה מ-2 ו 5) לכן N_1 מתחלק ב-P.

אם N_1 מתחלק ב-P , אזי $10N_1$ מתחלק ב-P. ואז $N - Pn$ מתחלק ב-P, לכן N מתחלק ב-P.

כלומר, הראינו כי N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

דוגמא א'

האם 176297 מתחלק ב-31 ?

31 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-1. נשתמש בכלל א' כמה פעמים ונבדוק:

$$\begin{array}{ll} (i) & 17629 - 7\cdot 3 = 17608 \\ (ii) & 1760 - 8\cdot 3 = 1736 \\ (iii) & 173 - 6\cdot 3 = 155 \\ (iv) & 15 - 5\cdot 3 = 0 \end{array}$$

0 מתחלק ב-31, לכן 176297 מתחלק ב-31.

כלל ב' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-3

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n .

נוכל לכתוב את N בצורה הבאה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 3. כלומר: $P = 10p + 3$

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m + (3p + 1)n$.

טענה: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

הוכחה:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N + P\cdot 3n$ מתחלק ב-P .

$$N + P\cdot 3n = 10m+n + (10p+3)3n = 10m+n + (10\cdot 3p+9)n = 10m + (10\cdot 3p+10)n$$
$$= 10[m + (3p+1)n] = 10N_1$$

P הוא מספר ראשוני, לכן N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

הערה: הפעם קיצרנו בהסברים, ועל הקורא להשלימם בעצמו.

דוגמא ב'

האם 177869 מתחלק ב-83 ?

83 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-3. נשתמש בכלל ב' כמה פעמים ונבדוק:

$$\begin{array}{lllll} (i) & 17786 & + 25\cdot 9 & = & 18011 \\ (ii) & 1801 & + 25\cdot 1 & = & 1826 \\ (iii) & 182 & + 25\cdot 6 & = & 332 \\ (iv) & 33 & + 25\cdot 2 & = & 83 \end{array}$$

83 מתחלק, כמובן, ב-83. לכן 177869 מתחלק ב-83.

כלל ג' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-7

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n .
נוכל לכתוב את N בצורה הבאה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 7. כלומר: $P = 10p + 7$.

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m - (3p + 2)n$.

<u>טענה</u>: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

<u>הוכחה</u>:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N - P\cdot 3n$ מתחלק ב-P .

$$N - P\cdot 3n = 10m+n - (10p+7)3n = 10m+n - (10\cdot 3p+21)n = 10m - (10\cdot 3p+20)n$$
$$= 10[m - (3p+2)n] = 10N_1$$

P הוא מספר ראשוני, לכן N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

<u>דוגמא ג'</u>

האם 28194 מתחלק ב-127 ?

127 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-7. נשתמש בכלל ג' כמה פעמים ונבדוק:

$$\text{(i)}\quad 2819 - 38\cdot 4 = 2667$$
$$\text{(ii)}\quad 266 - 38\cdot 7 = 0$$

0 מתחלק ב-127, לכן 28194 מתחלק ב-127.

כלל ד' - סימן התחלקות במספרים ראשוניים המסתיימים ב-9

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n .
נוכל לכתוב את N בצורה: $N = 10m + n$.

P מספר ראשוני שספרת האחדות שלו היא 9. כלומר: $P = 10p + 9$.

נגדיר מספר חדש: $N_1 = m + (p + 1)n$.

<u>טענה</u>: N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

הוכחה:

N מתחלק ב-P אם ורק אם $N + Pn$ מתחלק ב-P .

$$N + Pn = 10m+n + (10p+9)n = 10m + (10p+10)n = 10[m + (p+1)n] = 10N_1$$

P הוא מספר ראשוני, לכן N מתחלק ב-P אם ורק אם N_1 מתחלק ב-P .

דוגמא ד'

האם 279838 מתחלק ב-229?

229 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-9. נשתמש בכלל ד' כמה פעמים ונבדוק:

i) $27983 + 23.8 = 28167$

(ii) $2816 + 23.7 = 2977$

(iii) $297 + 23.7 = 458$

458 מתחלק ב-229 $(458 = 2\cdot 229)$, לכן 279838 מתחלק ב-229.

דוגמא ה'

האם 357492 מתחלק ב-29 ?

29 הינו מספר ראשוני המסתיים ב-9. נשתמש בכלל ד' כמה פעמים ונבדוק:

(i) $35749 + 3.2 = 35755$

(ii) $3575 + 3.5 = 3590$

(iii) $359 + 3.0 = 359$

(iv) $35 + 3.9 = 62$

(v) $6 + 3.2 = 12$

12 אינו מתחלק ב-29 ולכן גם 357492 אינו מתחלק ב-29.

לפניכם בעיות הקשורות לסימני ההתחלקות שהבאנו לעיל.

<u>בעיה 1</u>:

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n. נסמן: $N = 10m + n$. הוכח כי אם $m - 20n$ מתחלק ב-67, אזי גם המספר הנתון מתחלק ב-67.

<u>בעיה 2</u>:

N מספר טבעי שספרת האחדות שלו היא n. נסמן: $N = 10m + n$. הוכח כי אם $m - 1381n$ מתחלק ב-1973, אזי גם המספר הנתון מתחלק ב-1973.

<u>בעיה 3</u>:

N מספר טבעי. נסמן ב-b את המספר המתקבל משתי הספרות האחרונות של N וב-a את המספר המתקבל משאר הספרות. כלומר: $N = 100a + b$.
הוכח כי N מתחלק ב-7 אם ורק אם $2a + b$ מתחלק ב-7.

<u>בעיה 4</u>:

N מספר טבעי. נסמן $N = 100a + b$ כמו בשאלה הקודמת. הוכח כי N מתחלק ב-7 אם ורק אם $5a - b$ מתחלק ב-7.

הבעיות הבאות עוסקות בחלוקת מספרים:

<u>בעיה 5</u>:

המספר $\overline{13ab45c}$ בן 7 הספרות הינו כפולה של 792.
מצא את ערכי הספרות a, b ו-c.

<u>בעיה 6</u>:

המספר $\overline{a29b83213c}$ הינו מכפלת שני המספרים 71394 ו-46178. <u>בלי</u> לבצע את פעולת הכפל, מצא את ערכי הספרות a, b ו-c.

<u>בעיה 7</u>:

המספר 96514 מתחלק ב-41 (בדוק!). נעביר את הספרה הראשונה לסוף המספר ונקבל 65149. גם מספר זה מתחלק ב-41 (בדוק!). נמשיך באותו תהליך ונקבל את המספרים 51496, 14965 ו-49651. כל אחד מהם מתחלק גם הוא ב-41. הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי. כלומר, הוכח כי אם נתון מספר בן 5 ספרות המתחלק ב-41, אזי אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר, נקבל מספר חדש המתחלק גם הוא ב-41.

בעיה 8:

נתון מספר בן 6 ספרות המתחלק ב-143. ניתן ליצור ממספר זה חמישה מספרים חדשים, על-ידי העברת הספרה הראשונה לסוף המספר.
הוכח שהמספרים החדשים גם הם מתחלקים ב-143.

בעיה 9:

מספר מסוים N נכתב לפי בסיס 7 בעזרת שלוש ספרות. אם נהפוך את סדר הספרות, נקבל את N כתוב לפי בסיס 9.
מהו המספר?

בעיה 10:

המשפט הקטן של פרמה (נקרא על שמו של Pierre de Fermat מתמטיקאי צרפתי שחי במאה ה-17) קובע כי אם P מספר ראשוני ו-a מספר שלם שאינו מתחלק ב-P, אזי $a^{P-1} - 1$ מתחלק ב-P.

הוכח, בעזרת המשפט הקטן של פרמה, כי המספר $\underbrace{888...88}_{3944 \text{ פעמים}}$ מתחלק ב-15784.

בעיה 11:

הוכח כי אם $a^2 + b^2$ מתחלק ב-7 (a ו-b מספרים שלמים), אזי a ו-b שניהם מתחלקים ב-7.

בעיה 12:

המורה רשם על הלוח תרגיל של כפל שני מספרים בני 3 ספרות וחלוקת המכפלה במספר נוסף. דן לא ראה את סימן הכפל וחשב שלפניו תרגיל חילוק כשהמחולק הינו המספר בן 6 ספרות המורכב משני המספרים המקוריים. התוצאה שקיבל דן היתה גדולה פי 3 מהתוצאה הנכונה.
מצא את שני המספרים בני ה-3 ספרות.

בעיה 13:

הוכח כי $18! + 1$ מתחלק ב-19, מבלי לחשב את $18!$.

$$(18! = 1\cdot2\cdot3\cdots17\cdot18)$$

בעיה 14:

מצא את המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים:

אם נחלקו ב- 2 נקבל ריבוע שלם.

אם נחלקו ב- 3 נקבל חזקה שלישית של מספר שלם.

אם נחלקו ב- 5 נקבל חזקה חמישית של מספר שלם.

אם נחלקו ב- 7 נקבל חזקה שביעית של מספר שלם.

בעיה 15:

הוכח כי $n^7 - n$ מתחלק ב-42, לכל n טבעי.