פעולות מחשבתיות בפתרון בעיות מתמטיות

מאת: אברהם קריימר
מכון ויצמן למדע, רחובות

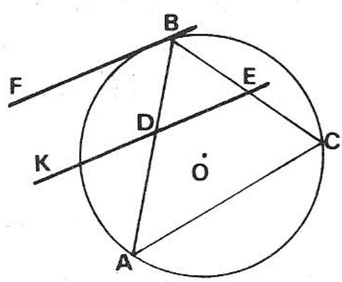
לא פעם אנו אומרים לתלמיד המתקשה בפתרון בעיה ומרים ידיים: חשוב! אלא, שזהו בדיוק הקושי של התלמיד הנבוך.

לחשוב, פירושו של דבר, לבצע באופן תיאורטי (כלומר, בראש) פעולות מסויימות על מושגים ואלמנטים המתאימים להם. לצורך פתרון בעיה מתבצעות בראש פעולות מחשבתיות כמו מיון, הגדרת מושגים, הכללה, בנית משפט הפוך למשפט נתון וכדומה. התנסות של התלמיד בפעולות כאלו עשויה להקל עליו להתמודד עם בעיות.

במאמר זה נציע מודל להכנת מערכות תירגול לעזרה בחשיבה הדרושה לפתרון בעיות. על מנת להבהיר את הנושא נציג אותו בעזרת הדוגמא הבאה.

בעיה בגאומטריה

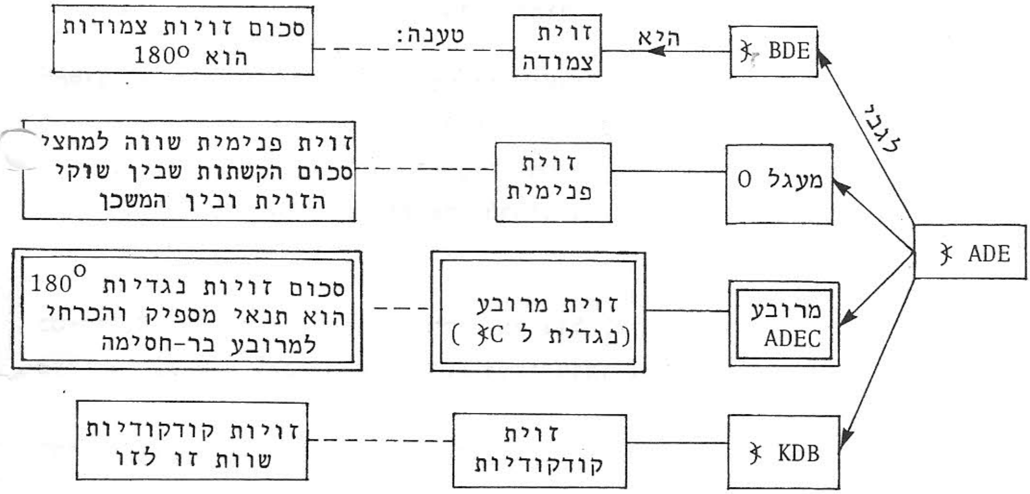
במעגל נתון חסום משולש ABC. BF משיק למעגל בנקודה B, DE מקביל ל BF.
הוכח כי המרובע ADEC בר-חסימה במעגל.



בבעיה זו מופיעים מושגים אחדים וקשרים ביניהם. לכל נתון ונעלם בבעיה נקרא בשם *אלמנט* של הבעיה. אם נתרכז באלמנט מסוים נוכל לראות כי הוא ממלא תפקידים שונים בקשריו עם האלמנטים האחרים של הבעיה.
למשל, הזוית ADE היא: *זוית צמודה* ביחס לזוית BDE, *זוית פנימית* במעגל הנתון, *זוית במרובע ADEC*, *זוית קדקודית* לזוית KDB.

אלו הם ארבעה *קשרי-תפקיד* שונים של אותו אלמנט.
לכל קשר-תפקיד ניתן לצרף באופן לוגי טענה (או טענות) וכך נקבל *קשרי-טענה*. השלב של יצירת קשרי-טענה הוא שלב קשה שבו יש לקשר טענות או משפטים ידועים עם קשרי-תפקיד. לשם כך דרושה יותר מידיעת המשפטים והבנתם, יש צורך לקשרם למצבים הנתונים.

בדוגמא שלנו:



קשר-הטענה המודגש בתרשים מהווה מפתח לפתרון הבעיה (יתכנו כמובן גם פתרונות אחרים). נשנה את ניסוח הבעיה לבעיה השקולה לה לפי תנאי מספיק והכרחי למרובע בר-חסימה, ואז נוכיח את הדרוש.

הוכחה:

יש להראות כי $\angle C + \angle ADE = 180^\circ$

ובכן, $\angle C = \angle FBA$ הזוית FBE היא *זוית בין משיק ומיתר*, ולכן שווה *לזוית ההקפית המתאימה*.

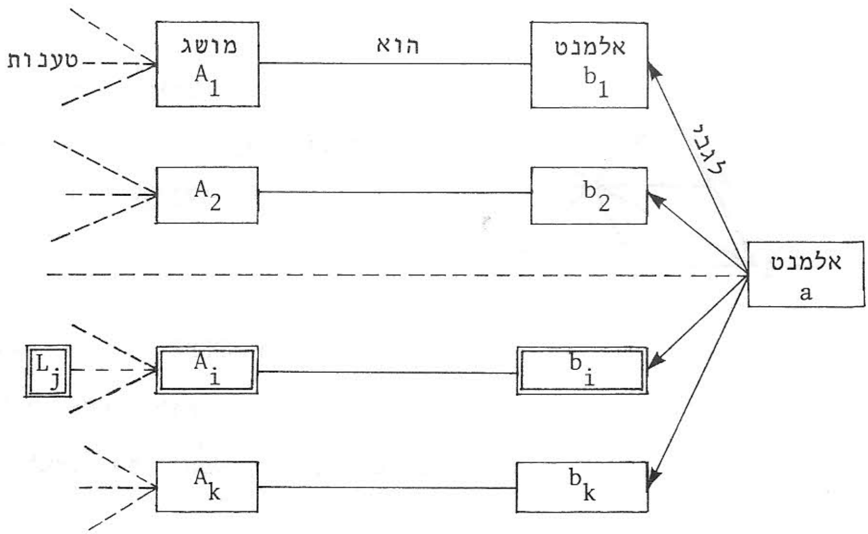
$\angle KDB = \angle ADE$ *זוויות קודקודיות*

$\angle KDB + \angle FBA = 180^\circ$ *זוויות חד-צדדיות* ביחס לישרים FB ו DE *והחותך* AB

$$\angle C + \angle ADE = 180^\circ$$

מודל הפעולות המחשבתיות

נתאר את המודל בצורה כללית בעזרת התרשים הבא:



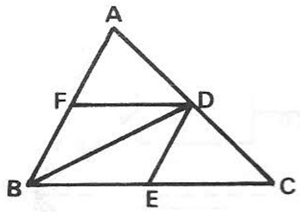
נניח כי בבעיה הנתונה אלמנט a מוצג כמושג A_1 ביחס לאלמנט b_1, אך המפתח לפתרון הבעיה לא מתקבל מקשר-התפקיד $A_1 - b_1 - a$, כי אם מתוך קשר-התפקיד $A_i - b_i - a$ (או מכמה קשרים). כדי לפתור את הבעיה עלינו לנסח אותה מחדש לפי קשר המפתח, להעביר את a מקשר התפקיד $A_1 - b_1 - a$ לקשר-התפקיד $A_i - b_i - a$, ולהוכיח (לפתור) את הדרוש.

השלב הקריטי בפתרון הוא *זיהוי קשר-טענה המהווה מפתח לפתרון הבעיה*. זיהוי זה מאפשר ניסוח מחודש שקול לבעיה הנתונה, ומכאן מגיעים לפתרון. בשלב זה ישנה "הברקה" מסויימת ואיננו יכולים לדעת בדיוק איך תהליך זה מתרחש. אנו מאמינים שפיתוח כושרם של התלמידים במציאת קשרי-תפקיד וקשרי-טענה רלוונטים לבעיה וכן הכרתם את המודל שתיארנו לגבי המהלך המחשבתי בפתרון בעיות, עשויים לתת להם כלים מתאימים ול"חנך אותם לחשוב".

מערכת תירגול

להלן נביא הצעות המהוות חלק ממערכת תירגול המתאימה לבעיות בגיאומטריה מסוג הדוגמא שהבאנו.

1. מציאת קשרי-תפקיד:



נתון: משולש ABC ומעוין BFDE
(ראה שרטוט).

השלם:

BD לגבי המעוין BFDE הוא ________________

BD לגבי $\sphericalangle$ FBE הוא ________________

המשך למצוא קשרי-תפקיד נוספים של BD .

הערות:

i) התברר כי את הקשר "BD הוא חותך ביחס לישרים DF BC", קשה מאוד לתלמידים לגלות ביזמתם.

ii) ניתן להשתמש בתרגיל לעיל כמשחק בשם "למי יותר", שבו מנצח התלמיד המצליח לגלות את המספר הרב ביותר של קשרי-תפקיד.

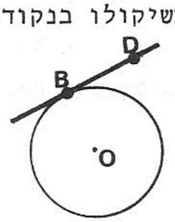
2. יצירת קשרי טענה:

לכל אחד מקשרי התפקיד שמצאת ב (1) צרף טענות מתאימות והסק מסקנות לגבי האלמנטים המופיעים בבעיה.

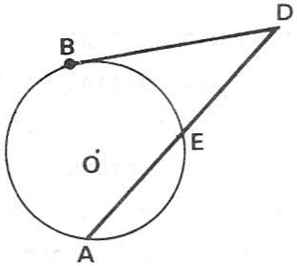
לדוגמא: אם נסתכל על BD כחותך ביחס לישרים מקבילים נוכל להסיק כי $\sphericalangle$ BDF = $\sphericalangle$ DBE בתור זויות מתחלפות.

3. זיהוי קשרי-טענה וניסוח בעיות:

נתון: מעגל O וישר BD משיקולו בנקודה B.



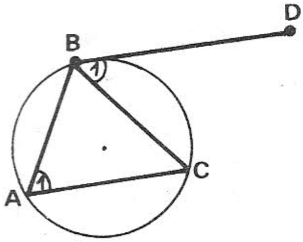
חבר בעיה המתייחסת לשרטוט הנתון ופתור אותה. (הנך יכול להוסיף אלמנטים לשרטוט).



דוגמאות לתשובות שניתנו על-ידי תלמידים:

i) אם נתון כי BD משיק למעגל בנקודה B, יכולים להיות נתונים AD ו DE ואז אצטרך למצוא את BD לפי המשפט על אורך משיק:

$$BD^2 = ED \cdot AD$$



ii) אם תהיה נתונה הזוית B_1, אז לפי:
$\measuredangle B_1 = \measuredangle A_1$ (זוית בין משיק ומיתר...)
אוכל למצוא את $\measuredangle A_1$.

דוגמא נוספת

נציג דוגמא נוספת, מתחום האלגברה. ישנם הבדלים בין בעיות בהנדסה ובאלגברה. בהנדסה, המושגים אמורים להיות מוכרים לתלמידים ולעיתים הם מופיעים במפורש בבעיה או בציור המלווה. באלגברה, התלמיד צריך לבנות את המושגים הדרושים לפתרון לפי המודל.

נתונה המשוואה: $ax^2 + bx + c = 0$, אשר המקדמים שלה מקיימים:

$$(a + b + c)c < 0$$

הוכח כי למשוואה ישנם שני שורשים (פתרונות) ממשיים.

נביא תחילה פתרון שהציע תלמיד בכיתה י' שהקדיש לבעיה כמה שעות עבודה:

$$(a + b + c)c < 0$$

$$ac + bc + c^2 < 0$$

$$4ac + 4bc + 4c^2 < 0$$

$$b^2 + 4ac + 4bc + 4c^2 < b^2$$

$$b^2 + 4bc + 4c^2 < b^2 - 4ac$$

$$(b + 2c)^2 < b^2 - 4ac$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

בשיחה עם התלמיד, הוא הסביר כיצד הגיע לפתרון:

"רציתי מהנתונים לקבל דיסקרימיננטה ולהוכיח שהיא חיובית כי אז למשוואה שני שרשים *(זיהוי קשר-טענה כמפתח לפתרון הבעיה)*, ראיתי שאם אכפול, אקבל ac במכפלה $ac + bc + c^2$ *(קשר-תפקיד)*. השתדלתי להשלים את ac לדיסקרימיננטה בתוך אי השוויון $ac + bc + c^2 < 0$ *(יצירת קשר-תפקיד)*. ראיתי שצריך לכפול אותו ב 4 או 4- ולהוסיף b^2".

דרך אחרת אשר יש בה רעיון כללי יותר היא על-ידי מעבר משפת המשוואה שבה מוצגת השאלה, לשפת הפונקציה. קשר המפתח במקרה זה נוצר מקשר התפקיד:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(o)\\ f(1)\end{array}} \xleftarrow{\text{הם}} \boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \xleftarrow{\text{לגבי}} \boxed{\begin{array}{c} c\\ a + b + c\end{array}}$$

ולכך מצטרפת הטענה כי פונקציה רציפה המקבלת ערכים בעלי סימנים שונים, חותכת את ציר ה-x.

קשר-הוכחה זה מביא לניסוח מחודש של הבעיה, לפיו יש להראות כי גרף הפונקציה הריבועית חותך את ציר ה-x בשתי נקודות שונות.

פתרון הבעיה:

מ $(a + b + c)c < 0$ נובע כי $f(1)\cdot f(0) < 0$. כלומר, ערכי הפונקציה בשתי נקודות $(x = 0 , x = 1)$ הם בעלי סימנים שונים. מאחר וזו פונקציה רציפה, הגרף שלה חותך את ציר ה-x. כיוון שגרף הפונקציה הריבועית סימטרי לגבי ישר המקביל לציר ה-y, אזי הוא חותך במקרה זה את ציר ה-x בשתי נקודות. כלומר, למשוואה הנתונה ישנם שני שורשים ממשיים שונים.

השפה שבה בוחר הפותר לעבוד, מכוונת את דרך הפתרון. המעבר משפת המשוואה לשפת הפונקציה איננו נעשה על-ידי התלמידים באופן טבעי, וגם אחרי שמציעים אותו, התלמידים מתקשים להשתמש בו. דרושה מערכת תירגול ליצירת קשרי-תפקיד וקשרי-טענה מתאימים.

נציע תחילה תרגילים בשפת תבניות ואחר כך תרגילים המאפשרים לתלמיד לעבור משפת משוואות לשפת פונקציות.

1) מציאת קשרי תפקיד:

נתונה תבנית המספר $(a + b)^2$.

רשום תבניות מספר אחדות התואמות לה.

תשובות לדוגמא:

i) $a^2 + 2ab + b^2$ ii) $(a - b)^2 + 4ab$ iii) $(-a - b)^2$

2. יצירת קשרי טענה:

לכל אחת מהתשובות שנתת ב (1) רשום טענות המתייחסות לה ולתבנית הנתונה.

תשובות לדוגמא:

i) התבנית $a^2 + 2ab + b^2$ מייצגת "ריבוע מלא".

ii) את התבנית 4ab ניתן לרשום כהפרש של שני ריבועים.

iii) ריבוע הסכום של שני מספרים שווה לריבוע סכום הנגדיים של שני המספרים.

3. זיהוי קשרי טענה וניסוח בעיות:

נתונות תבניות המספר: ab; $a^2 + b^2$

חבר בעיות הקשורות בתבניות אלו.

דוגמאות לשאלות אפשריות:

i) בטא בעזרת התבניות הנתונות את $(a - b)^2$

ii) הוכח כי $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$

רעיונות לתירגול מעבר משפת משוואה לשפת פונקציה:

לגבי הפרבולה $f(x) = ax^2 + bx + c$, השלם את המילון לפי הדוגמא הראשונה והוסף דוגמאות משלך.

שפת משוואה	שפת פונקציה
$c = 3$	גרף הפונקציה חותך את ציר y ב $(0,3)$
$a + b + c = 5$	
	$x = -5$ הוא ציר סימטריה של הפונקציה
$b = 0$ וגם $a < 0$	

ס י כ ו ם

המודל שתארנו והדוגמאות שהבאנו עוזרים לנו להצביע על קשיים אפשריים של תלמידים בשלבים השונים של מהלך פתרון הבעיה.
יתכן שהתלמיד אינו יכול להנתק מקשרי-התפקיד המופיעים בניסוח הבעיה, ואם הבעיה מסובכת מעט, הרי קשר המפתח לפתרון, אינו זה המוצג בבעיה. לכן, אין הוא יכול להתקדם.
משום כך, חשוב מאוד שהתלמיד יהיה מודע לצורך בשינוי קשרי-התפקיד וירכוש גמישות מסוימת במעבר מקשר תפקיד אחד למשנהו.

הצענו כאן איסטרטגיות למורה כדי לעזור לתלמידים להמשיך לחשוב כאשר הם "נתקעים" ולהרגילם לפתרון בעיות על-ידי בידוד האלמנטים והתייחסות לתפקידים השונים שהם ממלאים. בדרך כלל מורים מדריכים כך את תלמידיהם באופן אינטואיטיבי, וכאן ברצוננו להדגיש את הצורך במודעות להדרכה שיטתית מסוג זה.

אנו מאמינים כי אם התלמיד ממשיך להתעמק בבעיה בדרך נבונה ורלוונטית, גדלים סיכוייו להגיע לשלב "ההתגלות" בפתרון הבעיה.