העשרה לנושא הפונקציה הריבועית

מאת: אברהם קריימר ונעמי תעיזי
מכון ויצמן למדע, רחובות

אחד הנושאים המתאימים לשילוב דרכי עבודה שונות ומגוונות הוא חקירה ותיאור גרף של פונקציה. תלמידי החטיבה העליונה נעזרים בידע מן החשבון הדיפרנציאלי לשם כך, אך תלמידים בכיתות נמוכות הנמצאים בתחילת לימוד הנושא, אינם יכולים להשתמש במכשיר זה. בדרך כלל נוטים ללמד אותם את הנושא בעזרת חישוב שיעורי נקודות בלבד. דרך זו, של יציאה משיעורי נקודות מקריות לוקה בחוסר יעילות, ועשויה להוביל לתמונות לא נכונות של גרף הפונקציה.

גישה אחרת, בה מנסים להתגבר על חוסר יעילות זה, "בשיטות אלמנטריות" (ללא שימוש בכלים מהחשבון הדיפרנציאלי), היא הדרך בה מוצע להורות את הנושא **הפונקציה הריבועית** כפי שפורסמה בשבבים 12*. שם מוצעת דרך בה מעודדים את התלמידים לחקירת הפונקציה בצורתה האלגברית, תוך נסיון לדלות מתבנית המספר שבאמצעותה היא נתונה, אינפורמציה מספיקה על "התנהגות גרף הפונקציה" אשר מאפשרת את בניתו. שם, על-ידי מתן הדרכה מתאימה, מגלה התלמיד מתוך תבנית המספר $ax^2 + bx + c$ את קיומו של ציר סימטריה, משוואתו, קיום נקודת קודקוד, והעובדה שלכל נקודה (פרט לקודקוד) נקודה סימטרית אחת ויחידה. אינפורמציה זו מאפשרת את בניית הגרף בשלושה שלבים:

i) מציאת שיעורי הקודקוד $(x_k = -\frac{b}{2a}\ ,\ y_k = c - \frac{b^2}{4a})$

ii) מציאת שיעורי נקודות סימטריות $(x_k \pm \alpha\ ,\ y_k + a\alpha^2)$, כאשר α הוא מרחק נקודה על הגרף מציר הסימטריה).

iii) שרטוט הגרף על סמך הנקודות שנמצאו.

במאמר זה יובאו דוגמאות לחומר העשרה, המתאים לתלמידים מתקדמים ובמיוחד לתלמידים שלמדו את הפונקציה הריבועית על-פי המהלך המוצע במאמר המוזכר. בחומר זה נעסוק בחקירת גרפים של פונקציות תוך שימוש באמצעים פשוטים שעיקרם: גרפים של פונקציות מוכרות (כגון $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{a}{x}$ וכד'), ביתוחים של ביטויים אלגבריים וידע הנדסי בסיסי.

---

*"בעקבות הגרף של הפונקציה הריבועית" מאת רנה הרשקוביץ ומקסים ברוקהיימר.

נדגים זאת על-ידי שתי סדרות של דוגמאות. בראשונה ניעזר בגרפים של פונקציות "מוצא", שהן פונקציות הנתונות "בתוך" הפונקציה הנתונה. כגון, אם מבקשים את גרף הפונקציה $y = (x^2 + 3x)^2$, "גרף המוצא" יהיה גרף הפונקציה $y = x^2 + 3x$; או אם מבקשים את גרף הפונקציה $y = \frac{4}{x^2 - 1}$, ניעזר בשני גרפים "כגרפים של מוצא": גרף הפונקציה $y = 4$ וגרף הפונקציה $y = x^2 - 1$.

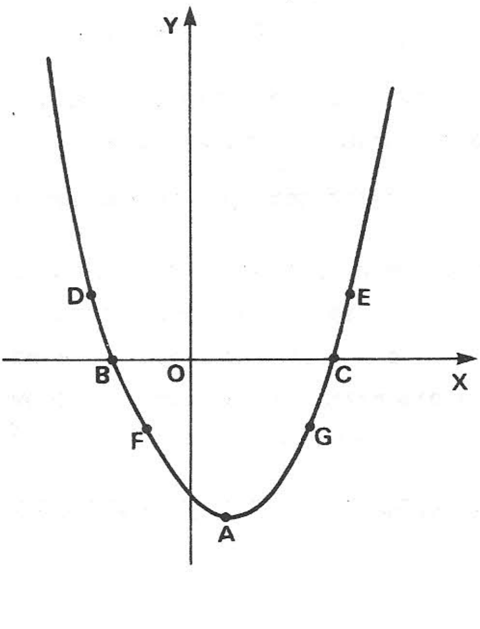
בסדרה השניה, בנוסף ל"גרף מוצא" ניעזר בגרפים של פונקציות או התאמות ידועות. לגרף נוסף כזה נקרא "גרף מתווך" ותפקידו יהיה לעזור לנו לבנות מתוך "גרף המוצא", בדרך כלל בדרך הנדסית, תוך הסתמכות על "הגרף המתווך", את הגרף המבוקש. לדוגמא, כדי ליצור את גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$ ניעזר בגרף הפונקציה $y = x^2 - 6x + 8$ כ"גרף מוצא", ובגרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ כ"גרף מתווך".

מציאת גרף של פונקציה בעזרת "גרף מוצא" ושיקולים אלגבריים

<u>דוגמא 1</u>

נתונה הפונקציה $y = (x^2 - x - 2)^2$.

העלאה בריבוע של הביטוי בסוגריים תיתן פולינום מהמעלה הרביעית, דבר אשר לא יקל עלינו כלל את מציאת גרף הפונקציה. על כן נצא מגרף הפונקציה $y = x^2 - x - 2$, אותו התלמידים יכולים לשרטט בנקל, לאור נסיונם בעבר (ראה השרטוט). גרף זה ישמש כ"<u>גרף מוצא</u>". הגרף המבוקש הוא למעשה גרף בו שיעור y של כל נקודה הוא ריבוע שיעור y של כל נקודה על הגרף בציור שמשמאל. על כן הוא לא שלילי בכל התחום. לשם בניתו נצא מנקודות על "גרף המוצא" אשר מהן נקבל נקודות על הגרף המבוקש:



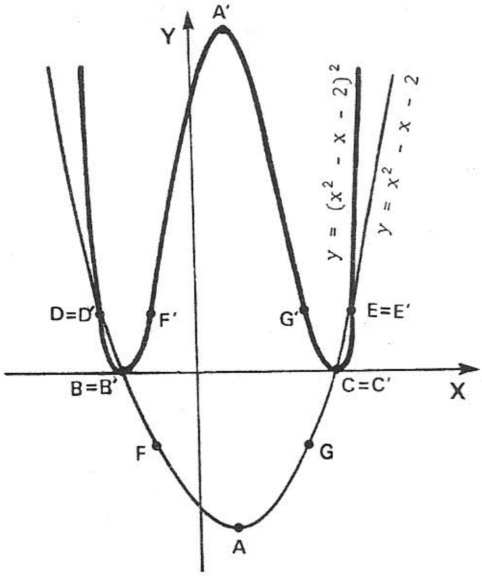
א. הנקודה A היא קודקוד הפרבולה המשמשת כ"גרף מוצא". קודקוד זה הוא נקודת מינימום של הפונקציה והוא נמצא בתחום בו

הפונקציה שלילית. לכן תמונתו A' תהיה מכסימום מקומי של הפונקציה המבוקשת. (המספר הקטן ביותר השלילי, יהיה הגדול ביותר בערכו המוחלט מבין כל המספרים השליליים).

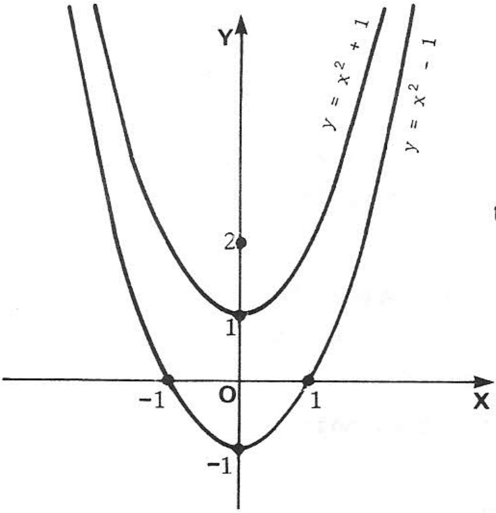
ב. נקודות נוספות שיקלו על שרטוט גרף הפונקציה המבוקשת, הן הנקודות המשותפות לשני הגרפים בהן שעור y הוא 1 או 0 (שכן $1^2 = 1$ ו $0^2 = 0$). נקודות אלו הן B, C, D ו E.

ג. נקודות עזר אחרות הן אלו ששעור y שלהן הוא -1: G ו F ותמונותיהן G' ו F' הן שיקוף של G ו F לגבי ציר x.

בנוסף למציאת הנקודות הנ"ל נבחר גם בנקודות ששעור y שלהן ניתן לקריאה בקלות ולכן קל לסמן את ריבועם.
באופן כזה נקבל אוסף נקודות על הגרף. עתה לאחר שסימנו נקודות, נשארה בעית העברת הגרף עצמו. בין B ל C יש לתלמיד מספר רב של נקודות. הקושי העיקרי הוא האם צורת הגרף בין A' ל B' (A' ל C') היא , או ?
כאן נוכל להציע לתלמיד סימון נקודות עזר נוספות במידת הצורך, או עבודה בצורה הדומה לכתוב במאמר המוזכר.
בתחום מ B שמאלה ומ C ימינה יכול התלמיד להיעזר בשיקול ש $y^2 < y$ כאשר $y < 1$ ו $y^2 > y$ כאשר $y > 1$. לכן "הגרף המבוקש" יהיה מתחת ל"גרף המוצא" מ B ועד D ומעליו אחרי D. באופן דומה יתקבל חלק הגרף שמימין ל C.
בתחומים אלה (מעבר ל-B ו-C) רצוי למצוא לפחות זוג נקודות נוספות, אשר ימחישו את מהירות העליה של הגרף המבוקש.

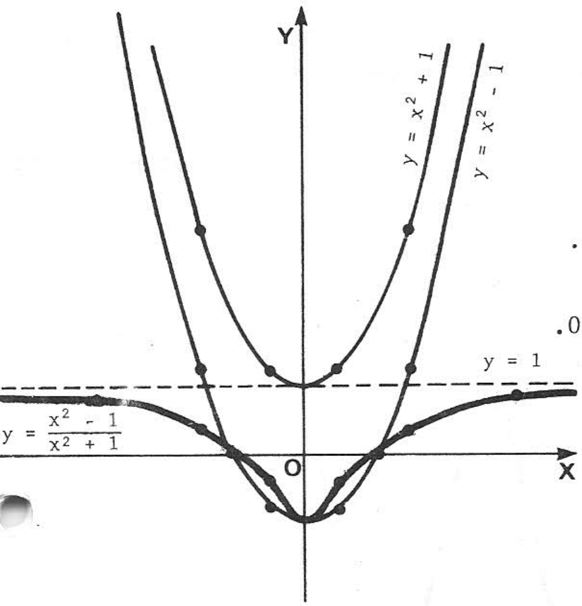


דוגמא 2



נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

הפונקציה מוגדרת בכל התחום, שכן לכל x, $x^2 + 1 > 0$. הפעם, במקום גרף מוצא אחד, נצא משני גרפים: גרף הפונקציה $y = x^2 - 1$ וגרף הפונקציה $y = x^2 + 1$.



גרף הפונקציה $y = x^2 - 1$ נמצא מתחת לציר x כאשר $-1 < x < 1$. לכן בתחום זה תהיה המנה שלילית, ושם יתקבל הערך המינימלי של הגרף. $x^2 \geq 0$, לכן בתחום הנ"ל $-1 \leq x^2 - 1 < 0$ ו $0 < x^2 + 1 \leq 1$. כאשר $x = 0$, המונה יהיה בעל הערך המינימלי והמכנה בעל הערך המכסימלי. לכן, ב $x = 0$ יתקבל הערך המינימלי של השבר:

$$y = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 1} = -1$$

נקודה זו $(0, -1)$ היא נקודת המינימום של הגרף המבוקש. המנה תהיה אפס כאשר המונה יתאפס, ולכן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = x^2 - 1$ עם ציר x יהיו גם על הגרף המבוקש. ככל שנתרחק ימינה או שמאלה מנקודת המינימום, יתקרבו שני גרפי המוצא זה לזה, אך תמיד יתקיים $x^2 + 1 > x^2 - 1$. לכן, המנה תתקרב ל 1 אך אף פעם לא תגיע אליו.
(כדי לקבל שרטוט מדויק יותר רצוי לקרוא נקודות נוספות על הגרפים של הפונקציות ולחשב את המנה במדויק).

הערה:

בשתי הדוגמאות לעיל גם גרף המוצא וגם הגרף המבוקש היו סימטריים, כאשר ציר הסימטריה נשמר מגרף המוצא לגרף המתקבל.
אינטואיטיבית התלמידים יגלו זאת מתוך הגרף, אך בכל אחד מהמקרים התלמידים מסוגלים, בכלים שבידיהם, להוכיח זאת בדרך אלגברית.

בדוגמא 1 ציר הסימטריה של גרף המוצא הוא $x = \frac{1}{2}$.
נסמן $g(x) = x^2 - x - 2$.
אזי עבור $\alpha > 0$ כלשהו $g(\frac{1}{2} - \alpha) = g(\frac{1}{2} + \alpha)$.
נסמן: $f(x) = (x^2 - x - 2)^2$

אזי: $f(\frac{1}{2} - \alpha) = [g(\frac{1}{2} - \alpha)]^2 = [g(\frac{1}{2} + \alpha)]^2 = f(\frac{1}{2} + \alpha)$

באופן כללי, כשיש לנו פונקציה מהצורה $f(x) = [g(x)]^2$ כאשר ל $g(x)$ יש ציר סימטריה: $x = a$, נקבל ש- $x = a$ הוא גם ציר סימטריה של $f(x)$ שכן, לכל $\alpha > 0$: $f(a - \alpha) = [g(a - \alpha)]^2 = [g(a + \alpha)]^2 = f(a + \alpha)$.

בדוגמא 2 יש לנו פונקצית מנה של שתי פונקציות אשר להן ציר סימטריה משותף $x = 0$. נסמן $g_1(x) = x^2 - 1$, $g_2(x) = x^2 + 1$
קל להיווכח ש $x = 0$ הוא גם ציר הסימטריה של $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, שכן:

$$f(0 - \alpha) = \frac{g_1(0 - \alpha)}{g_2(0 - \alpha)} = \frac{g_1(0 + \alpha)}{g_2(0 + \alpha)} = f(0 + \alpha)$$

בגלל ש $x = 0$ הוא ציר סימטריה משותף!

באופן כללי, בכל פעם שיש לנו פונקציה מהצורה $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ כאשר ל $g_1(x)$ ול $g_2(x)$ <u>אותו ציר סימטריה</u>: $x = a$, נקבל ש $x = a$ הוא גם ציר סימטריה של $f(x)$, שכן לכל $\alpha > 0$: $f(a - \alpha) = \frac{g_1(a - \alpha)}{g_2(a - \alpha)} = \frac{g_1(a + \alpha)}{g_2(a + \alpha)} = f(a + \alpha)$.

התלמידים יכולים לגלות קשרים אלו גם בדרך אחרת. הם יכולים למצוא כמה ענפים לגרף הפונקציה, האם היא סימטרית ומהו ציר הסימטריה. דבר זה יעשה בדרך דומה למהלך הוראת הפונקציה הריבועית. הקו המנחה שם הוא חיפוש נקודה על גרף הפונקציה אשר לה אותו שיעור y כמו לנקודה נתונה (x_1, y_1). נסמן את הנקודה המבוקשת ב (x_2, y_1). אם קיימת בדיוק נקודה אחת נוספת לכל נקודה (פרט לאחת), לגרף שני ענפים. אם, בנוסף, סכום שיעורי x של נקודות אלו קבוע: $x_1 + x_2 = c$, הרי שהפונקציה סימטרית וציר הסימטריה הוא אמצעי הקטעים ביניהן, כלומר $x = \frac{c}{2}$.

יישום ההצעה לגבי הפונקציה שבדוגמא 2, יראה כך:

$$\frac{x_1^2 - 1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^2 - 1}{x_2^2 + 1} \qquad x_1 \neq x_2$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 - x_2^2 - 1 = x_2^2 x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 - 1$$

$$2(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

מכיוון ש $x_1 \neq x_2$ נקבל $x_1 + x_2 = 0$.

מכאן, הפונקציה סימטרית, וציר הסימטריה של הוא $x = \frac{0}{2} = 0$.

מכיון שהפונקציה מוגדרת בכל תחום הממשיים, יש לה נקודת חיתוך עם ציר הסימטריה כאשר $x = 0$, ונקודה זו תהיה המינימום או המכסימום.

הנקודה היא $(0,-1)$ כי $\frac{0^2 - 1}{0^2 + 1} = -1$

הטיפול בדוגמא 1 קשה יותר לתלמידים, ואיננו מומלץ.

מתקבלת שם מערכת תנאים ממנה יגיע התלמיד (במקרה הטוב) לצורה:

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{או} \quad x_1^2 - x_1 - 2 = -x_2^2 + x_2 + 2$$

מכאן יש להגיע למסקנה כי $x = \frac{1}{2}$ הוא ציר סימטריה אך יתכן שלפונקציה יותר משני ערכי x שונים עבור אותו y .

על כך הצבת $x = \frac{1}{2}$ תתן נקודה שהיא מינימום או מקסימום <u>מקומי</u>.

<u>דוגמא 3</u>

נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$.

הפעם לא נפרט כיצד התלמיד יכול למצוא את גרף הפונקציה, אלא נדגים דף עבודה לתלמיד שיוביל אותו למציאת הגרף המבוקש.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$

1. מהו תחום הפונקציה?

2. האם יש לגרף הפונקציה ציר סימטריה מקביל לציר y?
אם לא, הוכח! אם כן, מהו?

3. הפונקציה הנתונה ניתנת לתיאור כמנה $f(x) = \dfrac{g_2(x)}{g_2(x)}$, של פונקציה קבועה בפונקציה נוספת.

א) רשום את שתי הפונקציות:

$g_2(x) =$ $\qquad\qquad$ $g_1(x) =$

ב) האם לפונקציות $g_1(x)$ ו $g_2(x)$ יש צירי סימטריה מקבילים לציר y?
מה הקשר בין צירי סימטריה אלו, לציר הסימטריה שמצאת ב 2 ?

ג) הוכח שאם לשתי פונקציות יש ציר סימטריה משותף, מקביל לציר y, למנה שלהן יהיה אותו ציר סימטריה.

4. א) שרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של $g_1(x)$ ו $g_2(x)$ ואת ציר הסימטריה המשותף.

ב) סמן באותה מערכת את שיעורי x עבורם המנה $f(x)$ אינה מוגדרת והעבר דרכם ישרים מקבילים לציר y .

5. השתמש בתכונות של מנה ובגרפים ששרטטת כדי לקבוע:

א) באיזה תחום הפונקציה $f(x)$ (מנת הפונקציות) חיובית?

ב) באיזה תחום הפונקציה $f(x)$ שלילית?

ג) באיזה חלק מהתחום בו הפונקציה שלילית הפונקציה עולה? יורדת?

ד) באיזה חלק מהתחום בו הפונקציה חיובית, הפונקציה עולה? יורדת?

6. א) שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב) האם לפונקציה $f(x)$ מכסימום? אם כן, מהו?

ג) האם לפונקציה $f(x)$ מינימום? אם כן, מהו?

הערות והדרכה לדף העבודה שבדוגמא 3.

התלמידים יוכלו לגשת לדף בדרך שהתמודדו עם הפונקציה הריבועית.

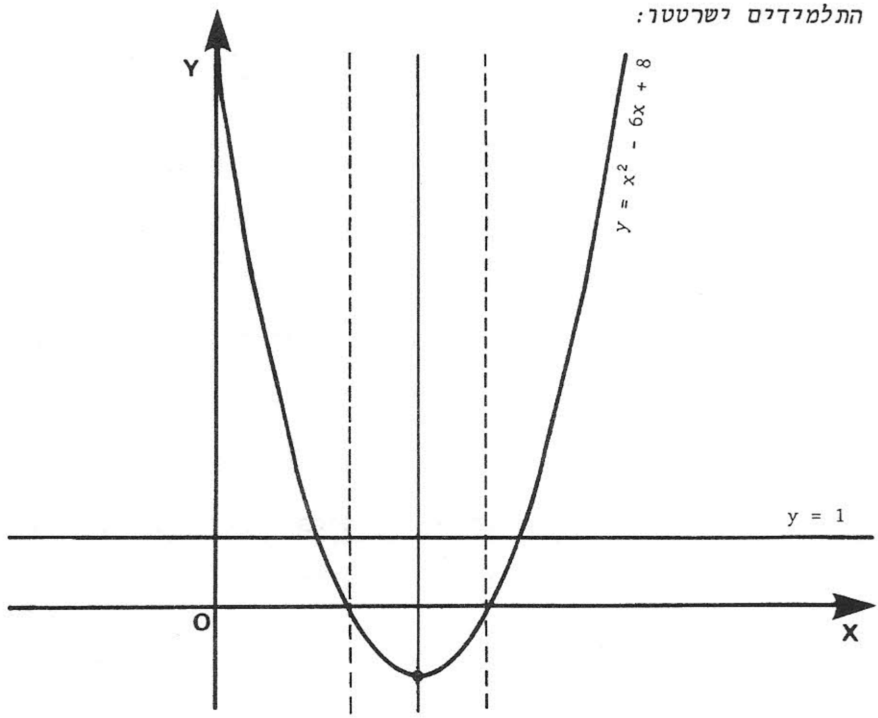
1. תחום הפונקציה ימצא על-ידי מציאת ערכי x עבורם הפונקציה לא מוגדרת. במקרה זה - $x = 2$ או $x = 4$ שכן אז המכנה הוא 0.

2. הגישה לסעיף זה יכולה להיות בכמה כיוונים שונים.
יתכן שהתלמידים ינחשו מהו ציר הסימטריה של הפונקציה או יבדקו האם ציר הסימטריה של $y = x^2 - 6x + 8$ הוא ציר סימטריה גם במקרה זה.
בדיקה אפשרית היא הצבת $3 + \alpha$ ו $3 - \alpha$ בפונקציה (השוואת התוצאות).
דרך אחרת היא לחזור על תהליך דומה לזה שנעשה בפונקציה הריבועית, היינו יציאה מנקודה (x_1, y_1) ובדיקה אם קיימת נקודה נוספת (x_2, y_1), ומהו הקשר בין x_1 ו- x_2.

3. ב) לגבי $g_2(x) = x^2 - 6x + 8$, התלמידים יודעים כי יש לה ציר סימטריה כזה והוא $x = 3$.
לגבי $g_1(x) = 1$, כל ישר מקביל לציר y הוא ציר סימטריה שלה.
לכן ציר הסימטריה של $f(x)$ הוא גם ציר סימטריה של $g_2(x)$ ו $g_1(x)$.

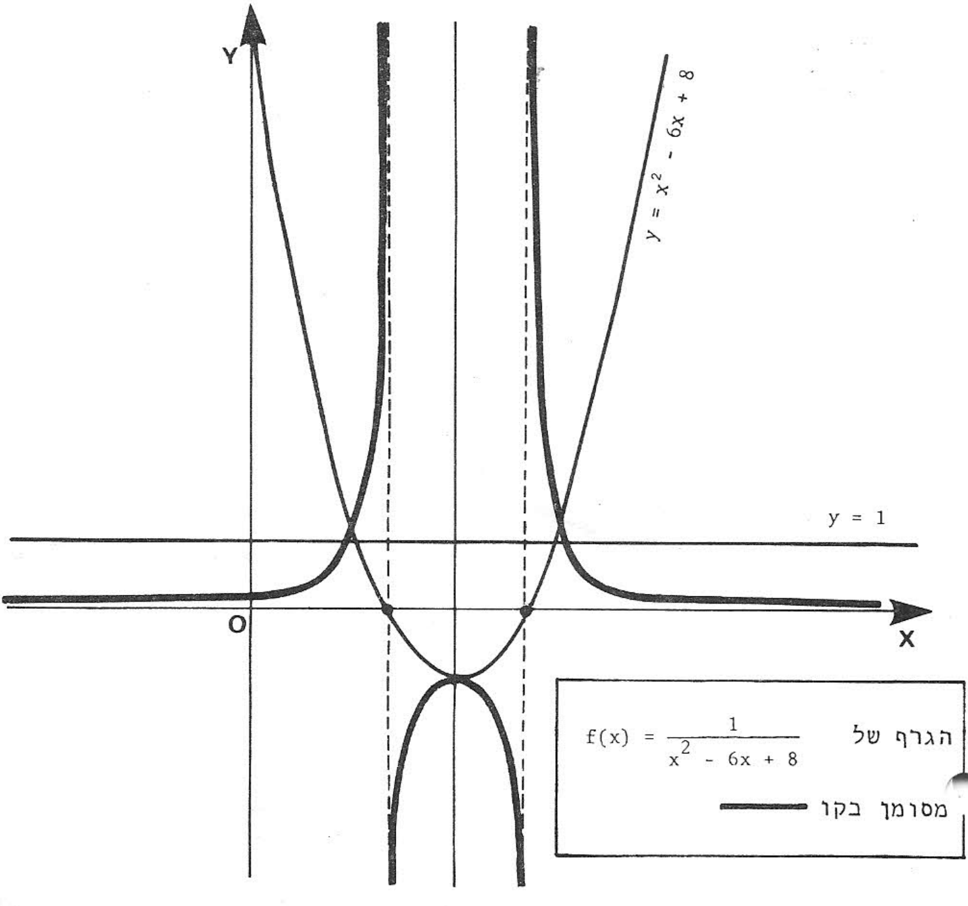
ג) ההוכחה כמו בהערה אחרי דוגמא 2. כמובן, אם התלמידים כבר הוכיחו זאת, אין טעם לתת להם שוב סעיף זה.

4. התלמידים ישרטטו:



5. כדי לענות על סעיפים א-ב של שאלה זו, התלמיד יכול להסתמך על תכונות של מנה (סימן המנה כאשר המונה חיובי הוא סימן המכנה). כדי לענות על סעיפים ג-ד התלמיד מסתמך על תשובתו ל- א-ב, ועל התחומים בהם הפונקציה שבמכנה עולה או יורדת.

6. השרטוט שיתקבל:

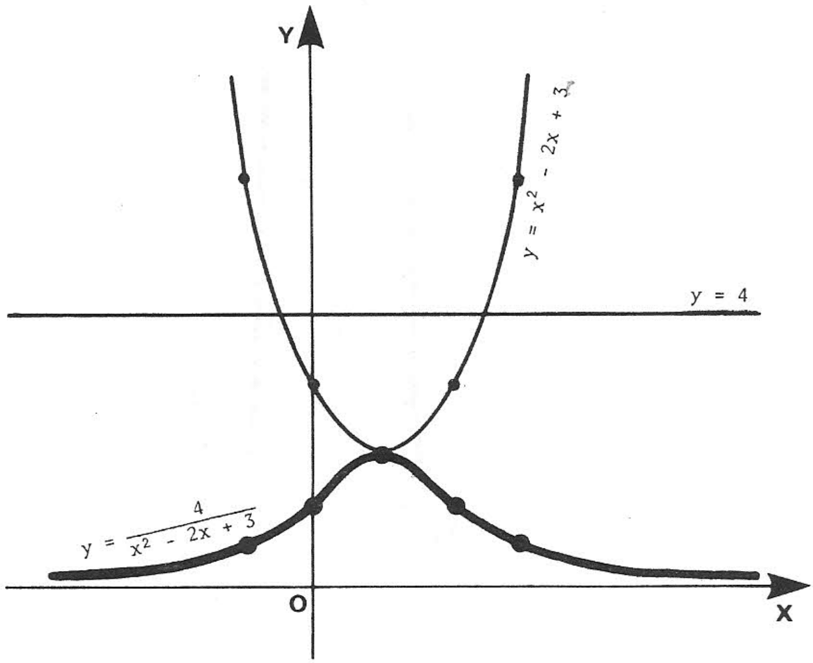


לשרטוט הגרף, התלמיד יעזר בתוצאות שקיבל בסעיף 5, ובגרפים של פונקציות המוצא. כדי לדייק בשרטוט יש למצוא נקודות נוספות על גרף הפונקציה.

דוגמא 4

נתונה הפונקציה: $y = \dfrac{4}{x^2 - 2x + 3}$

לא נפרט את המהלך. גם כאן ניתן לעבוד בדומה לדוגמא 3. הגרף שיתקבל:



<u>הערה</u>:

הצעה להכללה של דוגמאות 4,3 עבור תלמידים טובים.

נתונה הפונקציה: $y = \dfrac{d}{ax^2 + bx + c}$, $a, d > 0$

א) האם נתונים אלה מספיקים לתיאור כללי של גרף הפונקציה?

ב) אם נתון כי $\Delta > 0$ *(עבור המכנה), מה יהיה התיאור הכללי של גרף הפונקציה?*

ג) אם נתון כי $\Delta < 0$ *(עבור המכנה), מה יהיה התיאור הכללי של גרף הפונקציה?*

ד) מצא תנאים עבורם לפונקציות כנ"ל תהיה נקודת קודקוד משותפת עם גרף הפרבולה המתאימה לפונקציה שבמכנה.

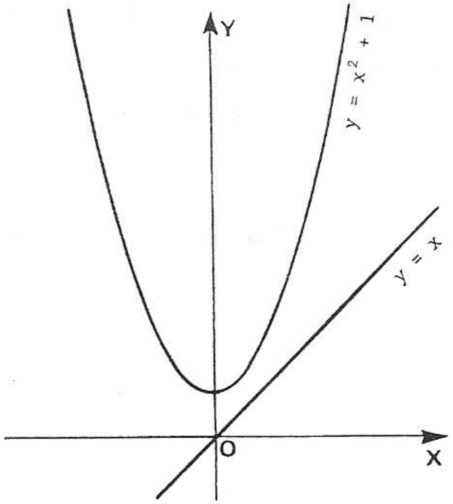
דוגמא 5

נתונה הפונקציה: $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

כגרפי מוצא נצא מהגרפים של הפונקציות:

$$y = x$$

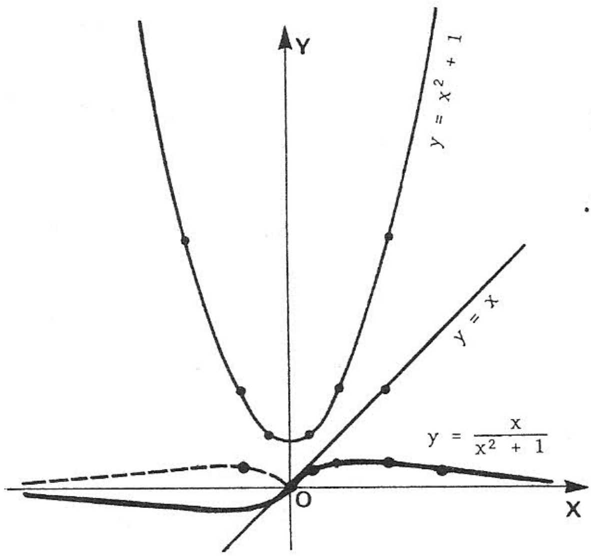
$$y = x^2 + 1$$



מאחר ו $x^2 + 1 > 0$, המנה מוגדרת לכל המספרים הממשיים.

המנה תתאפס, כאשר המונה ישווה לאפס, היינו עבור $x = 0$ ולכן הנקודה (0, 0) על הגרף המבוקש. מ 0 ימינה $x > 0$ ולכן המנה חיובית.

קל לראות מתוך השרטוט, שאם נתרחק "מספיק" ימינה, שיעורי y של הפונקציה $y = x^2 + 1$ יגדלו "הרבה יותר מהר" מאלו של $y = x$. לכן המנה תיקטן ותתקרב לאפס. כדי לשרטט את הגרף המבוקש במדויק, נצטרך לחפש נקודות סמוכות לאפס מימינו. משמאל ל 0 המנה שלילית, אך בערכה המוחלט סימטרית לחלק הימני. לכן נקבל את הגרף בשלמות על-ידי שיקוף החלק הימני בציר y ואחר כך בציר x .



כדי לדעת מהי הנקודה בה שיעור y גדול ביותר (קטן ביותר) ניתן להפעיל את השיקול האלגברי הבא: $x^2 < x$ כאשר $x < 1$ ו $x^2 > x$ כאשר $x > 1$. לכן, בתחום בין 0 ל 1 (בין 1- ל 0) $y = x^2 + 1$ תגדל "לאט" יותר מ $y = x$ ולכן המנה תגדל. אך החל מהנקודה (1, 1) (הנקודה (1-, 1-)) התהליך יתהפך והמנה תקטן. מכאן, עבור $x = 1$ (עבור $x = -1$) נקבל נקודת מכסימום (מינימום).

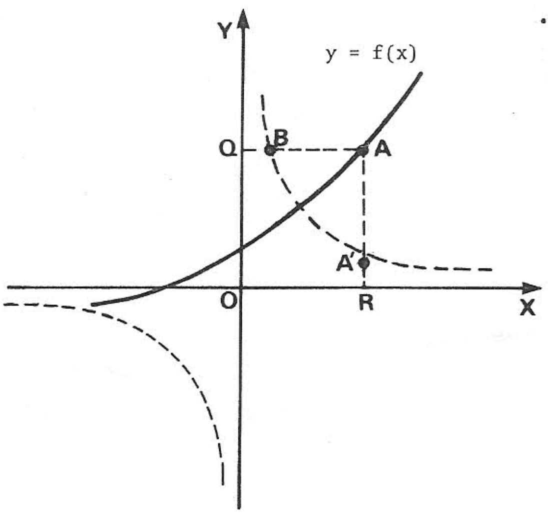
אפשר למצוא נקודות אלו גם בדרך הבאה: נצא מ- $a = \frac{x}{x^2+1}$ ונקבל $ax^2 - x + a = 0$. נקודות המכסימום והמינימום הן הנקודות בהן $\Delta = 0$.
כלומר: $1 - 4a^2 = 0$, מכאן $a = \pm\frac{1}{2}$ ו $x = \pm 1$, $y = \pm\frac{1}{2}$.

דוגמאות לבניית גרפים של פונקציות באמצעות "גרף מתווך"

דוגמא 1

בדוגמא זו נראה כיצד ניתן למצוא גרף של פונקציה מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$, כאשר נבחר כגרף מוצא את הגרף של $f(x)$ וכגרף מתווך את הגרף של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$.

נבחר נקודה $A(x_1,y_1)$ על גרף המוצא. אזי הנקודה $A'(x_1 , \frac{1}{y_1})$ היא נקודה בעלת אותו שיעור x הנמצאת על הגרף המבוקש.
מכאן, מציאת נקודות על הגרף המבוקש יכולה להעשות באופן הבא:



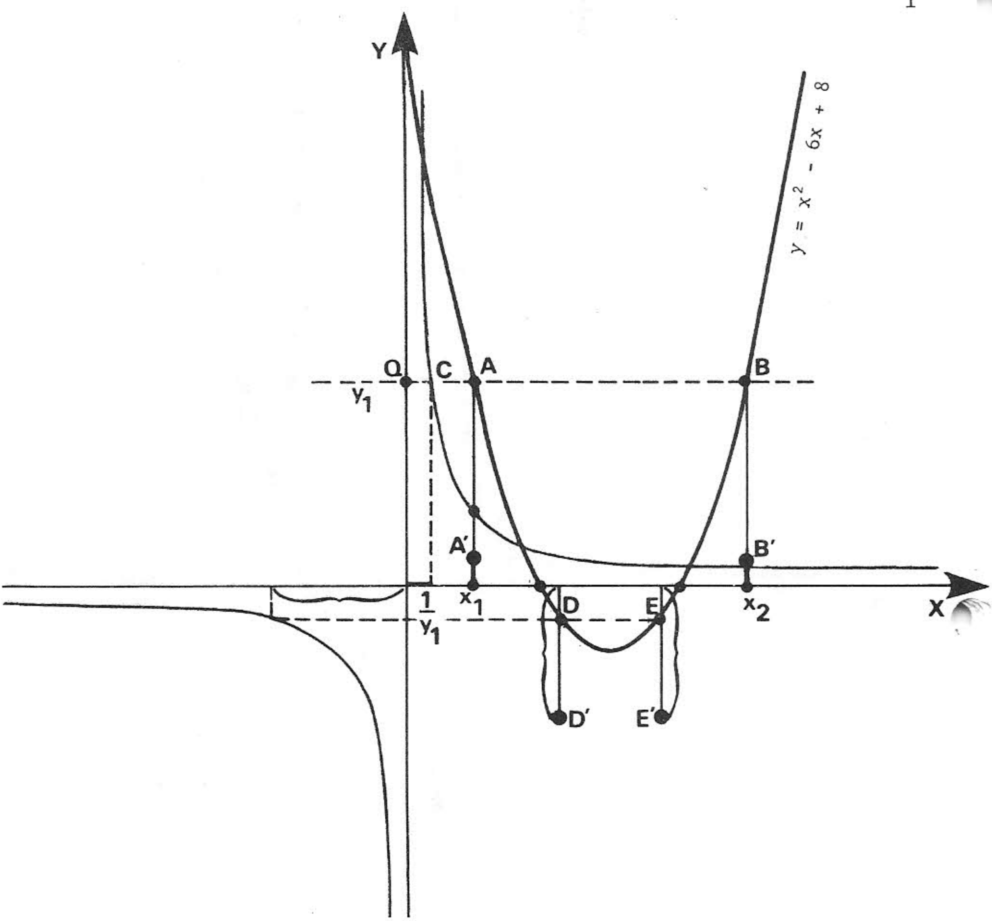
נבחר נקודה $A(x_1,y_1)$ על גרף המוצא. נוריד מ-A אנך לציר y. נסמן את נקודת החיתוך ב- Q. אנך זה (או המשכו) יחתוך את הגרף המתווך בנקודה B ששיעור y שלה הוא y_1. מכאן, שיעורי B הם $B(\frac{1}{y_1} , y_1)$.

נוריד מ-A אנך לציר x אשר יחתוך אותו בנקודה R. נקצה את הקטע BQ, שאורכו $\frac{1}{y_1}$, על האנך RA, מהנקודה R. נקבל את הנקודה 'A ששיעוריה $A'(x_1 , \frac{1}{y_1})$. נקודה זו, כפי שראינו לעיל, נמצאת על הגרף המבוקש.

לדוגמא, נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$. (השווה לדוגמא 3 בסעיף הקודם).

הפעם נבחר כגרף מוצא את גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x + 8$, וכגרף מתווך את גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$.
נשרטט את גרף המוצא והגרף המתווך באותה מערכת צירים (ראה השרטוט).

נבחר, לדוגמא, את הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו $B(x_2, y_1)$ על גרף המוצא (ראה השרטוט). לשתיהן אותו שיעור y, והן סימטריות.
הנקודות המתאימות ל A ו B בגרף המבוקש, תהיינה אם כן $A'(x_1, \frac{1}{y_1})$ ו $B'(x_2, \frac{1}{y_1})$, שגם הן סימטריות לגבי ציר הסימטריה של הפרבולה.



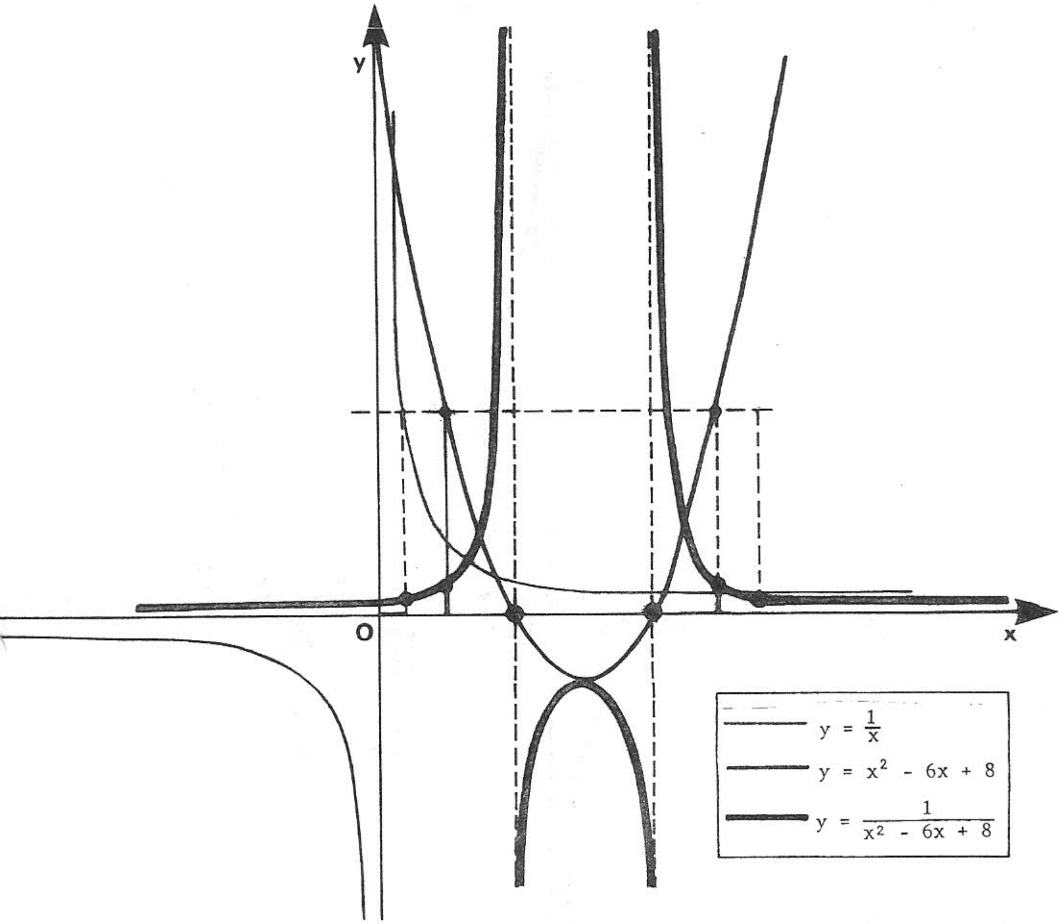
שים לב! בדרך זו, כאשר יוצאים מגרף סימטרי ביחס לישר המקביל לציר y, מקבלים על הגרף המבוקש, נקודות סימטריות ביחס לאותו ציר סימטריה.

לנקודות החיתוך של $y = x^2 - 6x + 8$ עם ציר x אין שיעור y מתאים על גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$. עובדה זו מתישבת עם העובדה שהפונקציה $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$ אינה מוגדרת בנקודות אלו.

הנקודות A ו B שסימנו הן בתחום בו פונקצית המוצא חיובית. נבדוק עתה מה נקבל בתחום בו פונקצית המוצא שלילית.

נסמן בתחום זה נקודות D, E בעלות אותו שיעור y. נמצא 'D ו 'E תוך היעזרות בחלק הפרבולה הנמצא ברביע השלישי (ראה השרטוט הקודם).

אם נמשיך בשרטוט בדרך זו לגבי נקודות נוספות נקבל בסוף את השרטוט הבא:

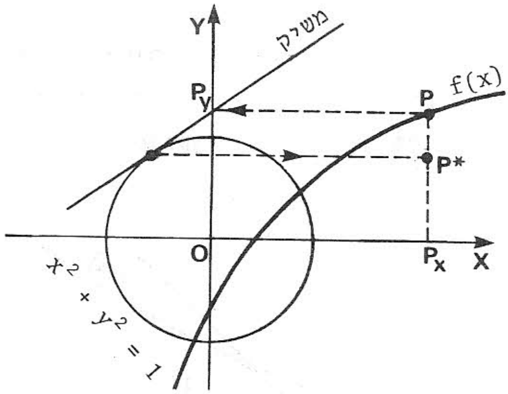


השווה לשרטוט של דוגמא 3 בסעיף הראשון.

שיטה זו מתאימה למעשה לכל גרף של פונקציה מהצורה $\frac{1}{f(x)}$ כאשר הגרף של $f(x)$ נתון.

דוגמא 2

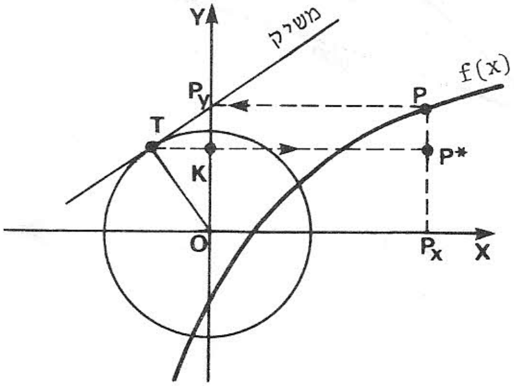
דרך נוספת לבנית גרף של פונקציה מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$ נקבל כאשר נבחר כגרף מתווך בגרף ההתאמה $x^2 + y^2 = 1$ (מעגל היחידה שמרכזו ראשית הצירים).



נשרטט במערכת צירים את המעגל $x^2 + y^2 = 1$ ואת הגרף של פונקצית המוצא $f(x)$. נבחר נקודה $P(x_o, y_o)$ על גרף הפונקציה $f(x)$, ונחפש נקודה $P^*(x_o, \frac{1}{y_o})$ (הנקודות בעלות אותו שיעור x, על הגרף המבוקש).

נוריד מ-P אנכים לצירים ונקבל את היטליה $P_x(x_o, 0)$ $.P_y(0, y_o)$

א) אם $|y_o| > 1$, P_y מחוץ למעגל היחידה. במקרה זה נעביר דרך P_y משיק למעגל, שיגע בו בנקודה T. שיעור y של T הוא שיעור y המבוקש של P^*.



הוכחה

נעביר מ T מקביל לציר x שיחתוך את ציר y בנקודה K. ΔP_yTO הוא ישר זוית, ולכן $OT^2 = OP_y \cdot OK$. נתון כי רדיוס המעגל 1, וכי $OP_y = y_o$ ולכן: $1 = y_o \cdot OK$.

מכאן: $OK = \frac{1}{y_o}$ שהוא שיעור y של P^*.

ב) אם $|y_o| > 1$, P_y בתוך המעגל. נעביר דרכה מקביל לציר x שיחתוך את המעגל בנקודה T. דרך T נעביר משיק, חיתוך המשיק עם ציר y יתן את שיעור y המבוקש. בדוק!

ג) אם $|y_o| = 1$, PP_y משיק למעגל, ולכן $P^* = P$ (ואמנם $\frac{1}{1} = 1$ ו $\frac{1}{-1} = -1$).

יש לשים לב שעבור $y_o = 0$ המנה $\frac{1}{y_o}$ לא מוגדרת, ואכן אם ננסה לבנות נקודה מתאימה, נקבל שהמשיק למעגל מקביל לציר y (אין להם נקודת חיתוך!).

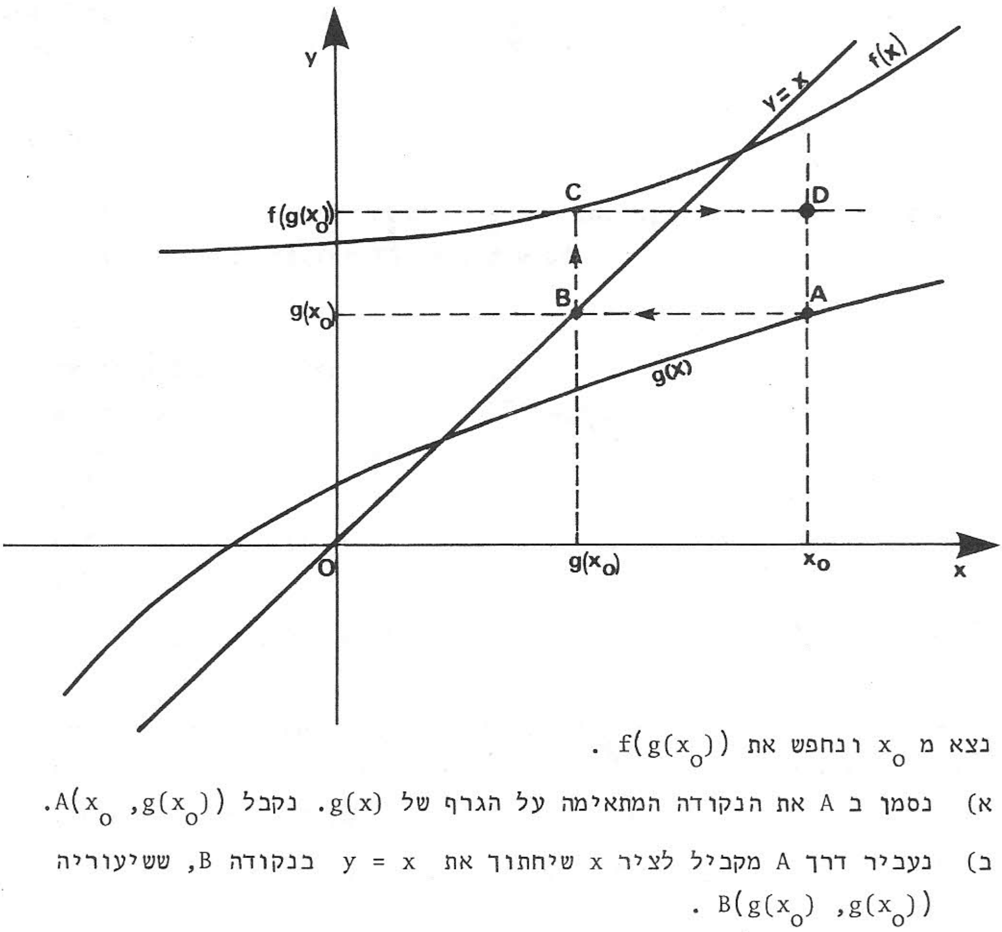
נסה לשרטט בדרך זו את הגרפים של הפונקציות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8} \qquad y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} .$$

דוגמא 3

בדוגמא זו נראה, כיצד ניתן למצוא גרף של פונקציה מורכבת $y = f(g(x))$ בעזרת הגרפים של $g(x)$ ו $f(x)$ כגרפי מוצא, וגרף הפונקציה $y = x$ כגרף מתווך.

הרעיון המנחה של הדרך שתוצג הוא בניה תוך שימוש בגרף $y = x$, באופן המקביל לחישוב האלגברי של הרכבת פונקציות. כלומר, תהליך המקביל להצבת תמונה של פונקציה אחת כמקור של הפונקציה השניה וקבלת התמונה המבוקשת.



נצא מ x_o ונחפש את $f(g(x_o))$.

א) נסמן ב A את הנקודה המתאימה על הגרף של $g(x)$. נקבל $A(x_o\ ,g(x_o))$.

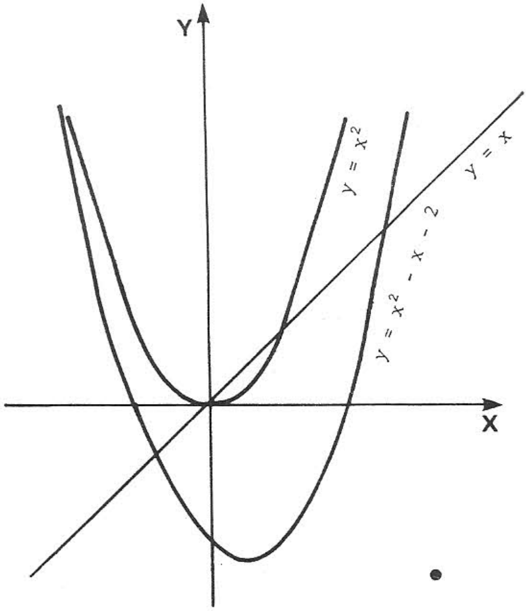
ב) נעביר דרך A מקביל לציר x שיחתוך את $y = x$ בנקודה B, ששיעוריה $B(g(x_o)\ ,g(x_o))$.

ג) נחפש עכשיו נקודה על $f(x)$ ששיעור x שלה הוא $g(x_o)$. לשם כך נעביר מקביל לציר y דרך B, ונקבל: $C(g(x_o)\ ,\ f(g(x_o)))$.

ד) הנקודה D, נקודת החיתוך של המקביל לציר x דרך C והמקביל לציר y דרך A, היא הנקודה המבוקשת. שיעוריה $D(x_o,\ f(g(x_o)))$.

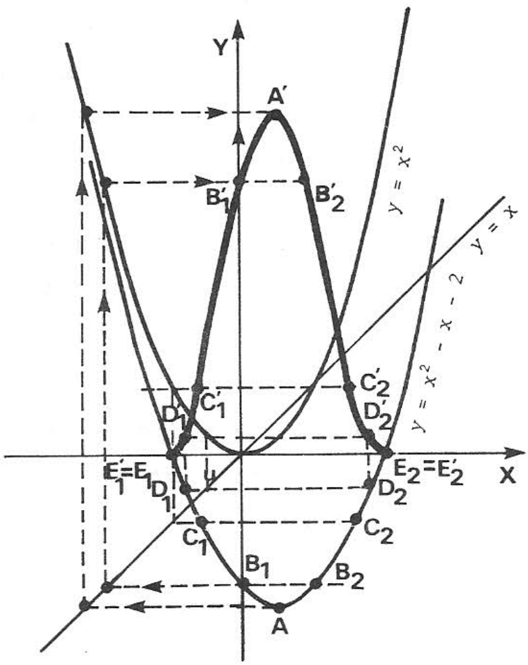
נדגים דרך זו על אחת הפונקציות שהגרף שלה כבר שורטט בסדרה הראשונה של הדוגמאות: הפונקציה $y = (x^2 - x - 2)^2$ המופיעה שם בדוגמא 1.

הפעם הבניה תיעשה בעזרת גרפי המוצא: $y = x^2 - x - 2$, $y = x^2$ והגרף המתווך: $y = x$ (ראה השרטוט).



נצא משיעורי x עבורם הפונקציה $y = x^2 - x - 2$ מקבלת ערכים שליליים, ונחפש את הנקודות המתאימות על גרף הפונקציה המבוקשת.

כלומר, נצא מנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $y = x^2 - x - 2$, מתחת לציר x. מאחר שכל ערכי y של נקודות אלו שליליים, המקבילים לציר x שיצאו מהן, יחתכו את $y = x$ ברביע ה-III (ראה לדוגמא, את הנקודות A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 שבשרטוט). מסיבה זו, כל התמונות על $y = x^2$ תהיינה ברביע ה-II, כלומר בענף השמאלי של $y = x^2$.

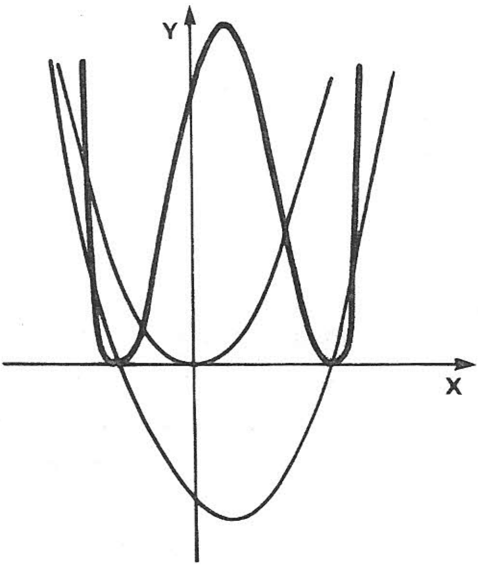


כאשר $x^2 - x - 2 = 0$ (הנקודות E_1, E_2 בשרטוט) החיתוך של המקביל לציר x היוצא מהן עם $y = x$ הוא ראשית הצירים. שיעור y המתאים על $y = x^2$ ישאר 0 ולכן הנקודות על גרף הפונקציה המורכבת זהות לנקודות על גרף הפונקציה $y = x^2 - x - 2$. כלומר, $E_1' = E_1$ ו $E_2' = E_2$.

באופן דומה, נמשיך לחפש נקודות על גרף הפונקציה המורכבת המתאימות לנקודות על $y = x^2 - x - 2$ כאשר $y > 0$.

הפעם הנקודות על $y = x$ תתקבלנה ברביע הראשון, ולכן כל הנקודות על $y = x^2$ תהיינה בענף הימני.

מכיון ששיעורי x מהם יוצאים עכשיו גדולים בערכם המוחלט מאלו שסימנו בשלב הקודם, נקבל שני ענפים הנמצאים ימינה ושמאלה לענפים הקודמים.



השרטוט כולו יראה איפוא כך:

שים לב! גרף הפונקציה המורכבת הוא סימטרי, וציר הסימטריה שלו זהה לזה של $y = x^2 - x - 2$.

הדבר ברור גם מדרך הבניה. מכיון שציר הסימטריה של $y = x^2 - x - 2$ מקביל לציר y, עבור כל שיעור y על גרף פונקציה זו נקבל שתי נקודות סימטריות, אשר שתיהן תעבורנה לאותה נקודה על $y = x$ ולכן לאותה נקודה על $y = x^2$.

שיעור y של נקודה זו יהיה שיעור y של הנקודות ששיעור x שלהן זהה לזה של הנקודות מהן יצאנו.

קיבלנו איפוא שוב שתי נקודות סימטריות ביחס לישר מקביל לציר y, כאשר ישר זה הוא הישר ממנו יצאנו.

__הערה__:

קל להראות בדרך אלגברית כי איך זה מקרה שציר הסימטריה של הפונקציה המורכבת זהה לזה של הפונקציה המופעלת ראשונה.

נסתכל על $h(x) = f\big(g(x)\big)$ ונניח שיש ל $g(x)$ ציר סימטריה $x = a$ אזי:

$$h(a + \alpha) = f\big(g(a + \alpha)\big) = f\big(g(a - \alpha)\big) = h(a - \alpha)$$

ולכן $x = a$ ציר סימטריה גם של h.

סיכום

במאמר הובאו דוגמאות שונות לחקירת פונקציות ובניית גרפים המתאימות לתלמידים. לא ניתנה סידרת כלים המאפשרת, באופן אלגוריתמי, שרטוט כל גרף, אלא הוצגו דוגמאות המיועדות לפתח אצל התלמיד דרכי חשיבה וגמישות לחיפוש אינפורמציה בדרכים לא שיגרתיות.

אנו רואים חשיבות לדוגמאות אלו, לאור העובדה שתלמידים לא נוטים לקשר בין הצורה הגרפית והצורה האלגברית של פונקציה, דבר הגורם לעיתים לעבודה קשה ומסובכת, שהיתה נחסכת במעבר להצגה האחרת. העובדה שבדוגמאות שניתנו שילבנו את שתי ההצגות תוך עבודה בגישות שונות, תתרום, אולי, בכיוון זה.