שבבי שבבים

"הוכחה חדשה" של 1-=1+

מאת: אסתר רמתי
התיכון ע"ש רוגוזין, אשקלון

ב"שבבים" הופיעו בעבר מספר מאמרים על האפשרויות לנצל שגיאות תלמידים כאמצעי הוראה*.

הנה עוד שגיאה "יפה" שהגישה לי תלמידה והשיחה שהתנהלה בכיתה לתיקונה:

השאלה: פתור את מערכת המשוואות

$$100x^y = 1 \qquad (I)$$

$$y + \log_{10}x = 1 \qquad (II)$$

התשובה: מן המשוואה הראשונה מקבלים:

$$x^y = \frac{1}{100} \qquad (III)$$

$$x^y = 10^{-2}$$

$$x = 10$$

$$y = -2$$

*ש. אביטל: "מה אפשר לעשות עם שגיאותיו של תלמיד", שבבים, תיק מס' 15.
א. רמתי : "הטעויות ותועלתן בהוראה", שבבים, תיק מס' 6

הצבה במשוואה השניה נותנת:

$$-2 + \log_{10} 10 = 1$$

$$-2 + 1 = 1$$

$$-1 = 1$$

"קולות" מן הכיתה:

א) שתי המשוואות סותרות זו את זו!

ב) המשוואה השניה היתה מיותרת!

ג) אולי יש עוד פתרונות למשוואה III?

מנסים ומוצאים טבלה של "פתרונות" למשוואה III:

x	y
$\frac{1}{10}$	2
10000	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{100}$	1

בהמשך, הבינו התלמידים כי הם ניחשו פתרון אחד מבין כל הפתרונות האפשריים של אחת המשוואות הנתונות. פתרון זה איננו חייב להיות גם פתרון של המשוואה האחרת.

מובן מאליו שהשיעור הסתיים בפתרון נכון של מערכת המשוואות הנתונה.

ספרת העשרות של ריבוע שלם

הערה למאמר קודם

מאת: סלאח חנא
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

בחוברת "מתמטיקה לחוגי העשרה" מס' 3, שהופיעה ב"שבבים" תיק מס' 20, הופיעה הבעיה הבאה (ראה גם החוברת למורה המופיעה בתיק זה - המערכת):

לפניכם עשרה מספרים, שרק שניים מהם הם ריבועים שלמים.

1. 562541
2. 592952
3. 654483
4. 669124
5. 703925
6. 715714
7. 769127
8. 842828
9. 870489
10. 864800

אין ברשותנו מחשב, לוחות שורשים וכו'.

מצאו, בדרך יעילה, מיהם שני המספרים שהם ריבועים שלמים.

לצורך ניפוי המספרים שאינם יכולים להיות ריבועים שלמים השתמש המחבר בשתי שיטות:

1. בדיקה לפי סיפרת האחדות של המספר.
2. בדיקה לפי סכום הספרות הסופי של המספר.

אחרי בדיקות אלה נותרו שלושה מספרים העשויים להיות ריבועים שלמים:
870489 , 715714 , 669124

בשלב זה, במקום להמשיך לפתור בדרך של ניסוי על ידי חיפוש ובדיקת קיומם של שורשים שלמים, נראה לי כדאי יותר לנפות את המספר הלא מתאים על-ידי בדיקת סיפרת העשרות.

<u>כלל</u>: אם סיפרת האחדות של ריבוע שלם היא 1, 4 או 9, אזי סיפרת העשרות הינה מספר זוגי.

<u>הוכחה</u>: כאשר סיפרת האחדות של ריבוע שלם היא 9, אזי סיפרת האחדות של השורש היא 3 או 7. ניתן להציג את השורש בצורה:

$100y + 10x + 3$ או $100y + 10x + 7$

כאשר x היא סיפרת העשרות.

$$(100y + 10x + 3)^2 = 100^2y^2 + 2\cdot 100y(10x + 3) + (10x + 3)^2$$

$$(100y + 10x + 7)^2 = 100^2y^2 + 2\cdot 100y(10x + 7) + (10x + 7)^2$$

סיפרת העשרות של הריבוע השלם תתקבל רק מהביטוי $(10x + 3)^2$ או מהביטוי $(10x + 7)^2$.

$$(10x + 3)^2 = 100x^2 + 60x + 9$$

$$(10x + 7)^2 = 100x^2 + 140x + 49$$

מכאן, סיפרת העשרות היא $6x \pmod{10}$ או $(14x + 4) \pmod{10}$.
בשני המקרים סיפרת העשרות היא זוגית.

באופן כזה מוכיחים שסיפרת העשרות היא מספר זוגי גם בשאר המקרים.

עתה, ברור שמבין שלושת המספרים שנותרו, 715714 <u>אינו</u> ריבוע שלם, והריבועים השלמים הם:

870489 , 669124

הערה: נסה למצוא מהי סיפרת העשרות של ריבוע שלם, כאשר סיפרת האחדות היא 6. ואם היא 5? או 0?

חישוב שנת השמיטה בתלמוד

הערה למאמר קודם

מאת: זרח מילר
בני-ברק

במאמר "מבחן התחלקות כללי למספרים שלמים", שהופיע בעלון "שבבים" תיק מס' 18 - הובאה הצעה מקורית של תלמיד, שעסקה בהתחלקות מספר ב 7.
ההצעה היא להפריד כל מספר - N - לשני מרכיבים:
x - המספר הנוצר מהעשרות והיחידות של N .
y - המספר הנוצר משאר הספרות.

אזי: $N = 100y + x = 98y + 2y + x$

מכיון שהביטוי הראשון - $98y$ - מתחלק ב 7, עלינו רק לברר האם $2y + x$ מתחלק ב 7. תהליך זה הוא תהליך מחזורי הנמשך עד שהביטוי $2y + x$ מקבל ערך הקטן מ-100, שהוא התחום בו קל ביותר לברר אם המספר מתחלק ב 7.

שיטה זו,כפי שאראה להלן - מקורותיה קדומים. היא מופיעה בצורה זהה בתלמוד. שימושה של השיטה בתלמוד קשור עם שנת השמיטה: האם השנה בה אנו עומדים היא שנת השמיטה, קרי שנת השבע, ואם לאו - באיזו שנה משנות מחזור שבע השנים - עומדים אנו.
(שנת השמיטה - כל שנה שביעית למנין. בה נוהגת שביתת עבודה בשדה ובכרם והפקרת כל היבול לעניים ולחיית השדה.)

וזה לשון הגמרא: (מסכת עבודה זרה דף ט', ע"ב).
"אמר ר' הונא בריה דרב יהושע האי מאן דלא ידע כמה שני בשבוע הוא עומד ניטפי חד שתא ונחשוב כללי ביובלי ופרטי בשבועי ונשקל ממאה תרי ונשדי אפרטי ונחשובינהו לפרטי בשבועי וידע כמה שני בשבוע..."

ופרושו כך הוא: אמר ר' הונא בנו של רב יהושע: זה שאינו יודע באיזו שנה משנות מחזור השבע הוא עומד - יחסיר שנה (ממנין השנים). מהמספר הנ"ל - יטול שנתיים מכל 100 שנים, והשנים שאינם עולים ל-100,כלומר היחידות והעשרות. יוסיף עליהן מה שבידו מן "השנתיים של כל 100" ויחלק ב 7.
השארית שיקבל, מציינת את מספר השנה בה הוא עומד במחזור שבע השנים.
הרי לפנינו אותה שיטה:

א) $N = 100y + x$ מציין את מנין השנים חסר שנה אחת.

ב) "נשקול ממאה תרי" (מכל מאה), הרי לפנינו $100y$ - סכום המאות. וסכום השנתיים של כל 100 עולה ל-$2y$.

ג) "נשדי אפרטי ונחשובינהו לפרטי בשבועי": אנו מוסיפים את סכום השנתיים של כל 100 - $(2y)$, למספר היחידות והעשרות - x. מספר זה נחלק ב 7 כדי לבדוק האם המספר הנ"ל מתחלק ב 7.

הרי לפנינו $2y + x$, הביטוי הנבדק בשיטה המוצעת במאמר הנ"ל.

הערת המערכת: שיטת החישוב בתלמוד אכן שקולה לזו שבמאמר - אבל היא נובעת מטעמים אחרים.