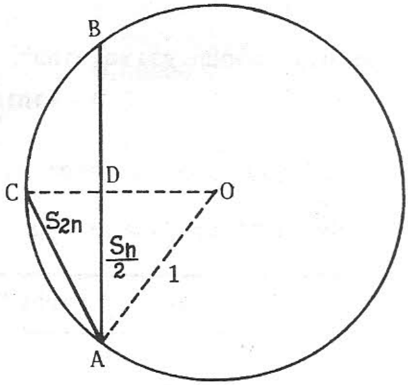
קירוב להלכה הוא גם למעשה – האמנם?!*

עובד ע"י מערכת שבבים

בולדאק (Bolduc, 1977) דן בשיטה לחישוב π כדוגמה לשימוש במחשבון בבית הספר. השיטה מבוססת על גישת ארכימדס, שמצא חסמים ל π, בהשתמשו במצולעים משוכללים חסומים וחוסמים מעגל ברדיוס 1.

ככל שמספר הצלעות גדל, כך מתקרבות הסדרות של מחצית ההקפים המתאימים ל π. ערכי הסידרה האחת תמיד גדולים מ π, וערכי השניה תמיד קטנים ממנו. כאשר מחשבון בידינו, אנו יכולים לחזור ללא מאמץ רב על אותם תהליכי חישוב פעמים אחדות. כתוצאה, ניתן להשיג קירוב מספיק טוב בטיפול בסידרה אחת של מצולעים (חסומים, למשל), על-ידי הגדלה מתאימה של מספר הצלעות.

הבעיה שלנו היא למצוא דרך להגדלה מהירה של מספר הצלעות תוך מתן אפשרות להשתמש בתוצאות הביניים המושגות. למטרה זו נפתח נוסחה שתאפשר למצוא את אורך צלעו של מצולע משוכלל חסום (במעגל שרדיוסו נתון) בעל 2n צלעות, על-פי אורך צלעו של מצולע משוכלל (חסום באותו מעגל) בעל n צלעות.



בשרטוט, מעגל שרדיוסו יחידה. AB מייצג את הצלע של מצולע משוכלל חסום בעל n צלעות, ואורכה יצוין על ידי S_n. אם C אמצע הקשת AB, אז AC היא הצלע של המצולע המשוכלל החסום בעל 2n צלעות ואורכה, בהתאם, S_{2n}.

*המאמר מבוסס על:

Bolduc, E.J., Using a Minicalculator to find an approximate value of π. School Science and Mathematics, LXXVII, 689-691 (1977).

Huber, J., Stabilizing Archimedes' Algorithm for Pi. School Science and Mathematics, LXXXII, 380-382 (1982).

לפי משפט פיתגורס: $OD = \sqrt{1 - \frac{1}{4} S_n^2}$

ומכאן: $CD = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} S_n^2}$

בשימוש נוסף במשפט פיתגורס, נקבל:

$$S_{2n}^2 = \frac{1}{4} S_n^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} S_n^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} S_n^2 + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4} S_n^2} + 1 - \frac{1}{4} S_n^2 =$$

$$= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4} S_n^2}$$

$$S_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4} S_n^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

מחצית ההיקף של המצולע בעל n הצלעות, שהוא $\frac{n \cdot S_n}{2}$, הוא, בשלב זה, הקירוב ל π.

בשלב הבא אחריו יתקבל הקירוב: $\frac{2n \cdot S_{2n}}{2} = n \cdot S_{2n}$

כל שנותר לעשות הוא לבחור מצולע התחלתי נוח ולארגן את החישובים ביעילות בהתאם למחשבון שברשותנו.

מצולע התחלתי נוח הוא משושה משוכלל, שכן $S_6 = 1$.

התוצאות, כפי שניתנו ע"י בולדאק בטבלה הבאה:

מספר הצלעות	אורך הצלע	הקירוב ל π
6	1	3.
12	0.517638	3.105828...
24	0.261052	3.132628...
48	0.130806	3.139350...
96	0.065438	3.141032...
192	0.032723	3.141452...
384	0.016362	3.141558...
768	0.008181	3.141585...
1536	0.004091	3.141590...
3072	0.002045	3.141592...

אם בהישג ידך מחשבון, נציע כי תמשיך קצת את הטבלה בטרם תקרא הלאה, הן כדי לקבל תחושה כלפי החישוב והן כדי לראות מה יקרה.
הובר (Huber, 1982), בהמשך למאמרו של בולדאק, עשה בדיוק כך והתוצאות הרי הן בטבלה הבאה:

מספר הצלעות	אורך הצלע	הקירוב ל π
6	1.0000000000	3.000000000
12	0.5176380902	3.105828541
24	0.2610523844	3.132628613
48	0.1308062585	3.139350203
96	0.0654381656	3.141031951
192	0.0327234633	3.141452473
384	0.0163622792	3.141557615
768	0.0081812081	3.141583911
1536	0.0040906127	3.141590529
3072	0.0020453076	3.141592407
6144	0.0010226544	3.141594284
12288	0.0005113277	3.141597288
24576	0.0002556658	3.141621319
49152	0.0001278358	3.141693413
98304	0.0000639218	3.141885657
196608	0.0000319687	3.142654499
393216	0.0000160000	3.145728000
786432	0.0000080623	3.170208743
1572864	0.0000041232	3.242542203
3145728	0.0000022361	3.517030823
6291456	0.0000014142	4.448731201

הבלתי צפוי - קרה. מעבר לשלב מסוים, במקום שהקירוב ילך וישתפר הוא נעשה גרוע יותר ויותר.*

*הערת המערכת: למרות שהאיבר הראשון ותהליך החישוב זהים, איברי הסידרה המתקבלים בדרך זו, במחשבים שונים, עשויים להיות שונים זה מזה. גם בדיקה בעזרת מחשב גדול הראתה שסידרה זו אינה מתכנסת, אם כי בצורה פחות "דרסטית".

הסיבה נעוצה בנוסחה שהשתמשנו ובטבעה של מכונת החישוב. ככל שמתקדמים שלבי החישוב, S_n קטן והולך ו- S_n^2 קטן עוד יותר.
כל מחשבון בו נשתמש "מעגל" את התוצאות המתקבלות. בשלב מסוים, התלוי במכונת החישוב, שגיאה זו נעשית גדולה יחסית לערכו של S_n^2. עבור S_n^2 קטן, $\sqrt{4 - S_n^2}$ קרוב ל 2. אבל אם השגיאה היחסית ב S_n^2 גדולה, הקירוב ל 2 יהיה יחסית לא מדויק.
לבסוף, אם בביטוי $\sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$ נחסר מ 2 גודל, הקרוב למדי ל 2, אך מכיל שגיאה יחסית גדולה, נקבל תוצאה שלמרות שהיא קטנה, הרי יחסית לגודלה, מאוד בלתי מדויקת. תוצאות בלתי מדויקות אלה עוד מוכפלות ב n-ים גדולים ובאות לידי ביטוי בטבלה.

נדגיש כי שגיאות החישובים המעוגלים על ידי המכונה נגרמות משום שאנו מחסרים שני ביטויים כמעט שווים: 2 ו $\sqrt{4 - S_n^2}$.

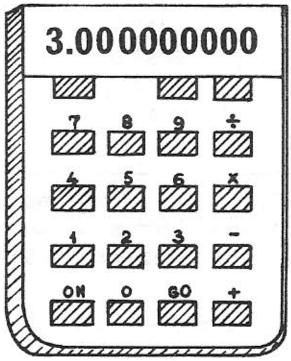
בדרך כלל, בשיעורי אלגברה נהגנו ל"היפטר" מביטויים אי-רציונליים במכנה. נוכל למנוע את הבעיה שהתעוררה אם ננהג בדיוק להיפך ממה שלימדו אותנו בשיעורי האלגברה; ניפטר מהחיסור המזיק על ידי כפל מונה ומכנה בגורם: $\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}$.

כך נקבל:

$$S_{2n} = \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}}$$

עתה, לשגיאת החישוב המעוגל ב S_n^2 יש, יחסית, מעט מאוד השפעה שכן המכנה קרוב ל 4.

הקירוב ל π המושג באמצעות נוסחה זו ניתן בטבלה הבאה:



מספר הצלעות	אורך הצלע	הקירוב ל π
6	1.0000000000	3.000000000
12	0.5176380902	3.105828541
24	0.2610523844	3.132628613
48	0.1308062585	3.139350203
96	0.0654381656	3.141031951
192	0.0327234633	3.141452472
384	0.0163622792	3.141557608
768	0.0081812081	3.141583892
1536	0.0040906126	3.141590463
3072	0.0020453074	3.141592106
6144	0.0010226538	3.141592517
12288	0.0005113269	3.141592619
24576	0.0002556635	3.141592645
49152	0.0001278317	3.141592651
98304	0.0000639159	3.141592653
196608	0.0000319579	3.141592653
393216	0.0000159790	3.141592654
786432	0.0000079895	3.141592654
1572864	0.0000039947	3.141592654
3145728	0.0000019974	3.141592654
6291456	0.0000009987	3.141592654

מוסר ההשכל הוא, כי גם אם תהליך חישוב נראה באופן תיאורטי, פשוט ואלגנטי, יש לבדוק אם הוא גם מעשי. במילים אחרות: **אל תשכח לחשוב, לפני שאתה נותן למחשב לחשב.**

π=3.14159265358979....