מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולר

חוברת למורה

מס' 3

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

ריבועים שלמים

הצגתי לפני תלמידי את הבעיה הבאה:

לפניכם עשרה מספרים, שרק שניים מהם הם ריבועים שלמים.

1. 562541
2. 592952
3. 654483
4. 669124
5. 703925
6. 715714
7. 769127
8. 842828
9. 870489
10. 864800

אין ברשותכם מחשב, לוחות שורשים וכו'.

מצאו, בדרך יעילה, מיהם שני המספרים שהם ריבועים שלמים.

בבעיה זו ובבעיות אחרות הקשורות לריבועים שלמים, נעסוק בחוברת זו.

ב ה צ ל ח ה!

המחבר

חשון, תשמ"ג

פתרון הבעיה שהוצגה בעמוד הקודם:

ראשית, נוכל לנפות מספרים שאינם ריבועים שלמים, על-פי ספרת היחידות שלהם. אם ספרת היחידות היא 2, 3, 7 או 8 - המספר איננו ריבוע שלם (מדוע?)

אחרי ניפוי ראשוני זה, נותרו 6 מספרים העשויים להיות ריבועים שלמים: 864800 , 870489 , 715714 , 703925 , 669124 , 562541.

נחפש דרך נוספת לניפוי מספרים שאינם ריבועים שלמים.

בחר כמה מספרים שהם ריבועים שלמים, ובדוק מהי השארית המתקבלת כאשר מחלקים ריבוע שלם ב 9 .

באופן כללי, כל מספר טבעי ניתן להציג בעזרת התבנית $9a + k$, כאשר a ו k מספרים שלמים לא שליליים ו $0 \leq k \leq 8$.

לדוגמא: $100 = 9 \cdot 11 + 1$ $(k = 1 , a = 11)$

לכן, כל ריבוע שלם ניתן להציג בעזרת התבנית $(9a + k)^2$, כאשר a ו k מספרים שלמים לא שליליים ו $0 \leq k \leq 8$.

נפתח את הסוגריים: $(9a + k)^2 = 81a^2 + 18ak + k^2$

שני המחוברים הראשונים מתחלקים ב 9. לכן, השאריות של חילוק ב 9 של ריבועים שלמים מתקבלות מהמחובר השלישי.

לא קשה לבדוק שאם k הוא ריבוע שלם ו $0 \leq k \leq 8$, אזי השארית המתקבלת מחלוקת k^2 ב 9, היא 0, 1, 4 או 7. אלו גם השאריות המתקבלות מחילוק ב 9 של ריבועים שלמים.

קיבלנו, אם כן, דרך חדשה לניפוי מספרים שאינם ריבועים שלמים: לחלק את המספר הנתון ב 9; אם השארית היא 2, 3, 5, 6 או 8 - אזי המספר <u>איננו</u> ריבוע שלם.

שיטה זו, של בדיקת שאריות בחילוק ל 9, איננה מסובכת. אך ישנה שיטה שקולה לה, קלה יותר לביצוע. שיטה זו מתבססת על **סכום הספרות הסופי** של מספר.

סכום הספרות הסופי של מספר, הינו המספר בן ספרה אחת המתקבל על-ידי חיבור חוזר של ספרות המספר. לדוגמא: סכום הספרות הסופי של 157389 הוא 6. כי

$$1 + 5 + 7 + 3 + 8 + 9 = 33$$

$$3 + 3 = 6$$

מה הקשר בין שאריות בחילוק ל 9 לבין סכום ספרות סופי של מספר?

הבה נבדוק. נבחר כדוגמא את 18534.

השארית של חילוק 18534 ב 9 היא 3, וגם סכום הספרות הסופי של 18534 הוא 3:

$$1 + 8 + 5 + 3 + 4 = 21$$
$$2 + 1 = 3$$

ובאופן כללי (פרט למקרה שהשארית 0) __*השארית של מספר בחילוק ב 9, שווה לסכום הספרות הסופי של המספר.*__

נסביר כלל זה בעזרת הדוגמא:

$$10 = 1\cdot 9 + 1$$
$$100 = 1\cdot 99 + 1 = 11\cdot 9 + 1$$
$$1000 = 1\cdot 999 + 1 = 111\cdot 9 + 1$$
$$10000 = 1\cdot 9999 + 1 = 1111\cdot 9 + 1$$

וכו'

לכן:

$$18534 = 1\cdot 10000 + 8\cdot 1000 + 5\cdot 100 + 3\cdot 10 + 4$$
$$= 1(1111\cdot 9+1) + 8(111\cdot 9+1) + 5(11\cdot 9+1) + 3(1\cdot 9+1) + 4$$
$$= 1\cdot 1111\cdot 9 + \underline{1} + 8\cdot 111\cdot 9 + \underline{8} + 5\cdot 11\cdot 9 + \underline{5} + 3\cdot 1\cdot 9 + \underline{3} + \underline{4}$$

כל הכפולות של 9 מתחלקות ב 9. לכן, השארית של חלוקת המספר 18534 ב 9, שווה לשארית המתקבלת מחלוקת סכום ספרותיו: $1 + 8 + 5 + 3 + 4 = 21$, ב 9.

נבצע שוב אותו תהליך:

$$21 = 2\cdot 10 + 1 = 2(1\cdot 9 + 1) + 1 = 2\cdot 1\cdot 9 + \underline{2} + \underline{1}$$

השארית של חלוקת 18534 ב 9, תהיה אותה שארית המתקבלת בחלוקת סכום הספרות $2 + 1 = 3$ ב 9. כיון שהפעם קיבלנו מספר בן ספרה אחת - זוהי השארית.

באותו אופן, ניתן להוכיח את הכלל הנ"ל למספר כלשהו.

__הוכחה__ *(לא ניתנה בחומר לתלמיד)*:

יהי N מספר בן n ספרות. אזי:

$$N = a_1\cdot 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1}10 + a_n$$

(a_i מספר שלם, לא שלילי, לכל i).

ניעזר בפירוק של חזקות 10 ונקבל:

$$N = a_1\underbrace{(11\ldots 1}_{n-1\text{ פעמים}}\cdot 9+1) + a_2\underbrace{(11\ldots 1}_{n-2\text{ פעמים}}\cdot 9+1) + \dots + a_{n-1}(1\cdot 9+1) + a_n$$

$$= a_1 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{\text{פעמים } n-1} \cdot 9 + \underline{a_1} + a_2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{\text{פעמים } n-2} \cdot 9 + \underline{a_2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 1 \cdot 9 + \underline{a_{n-1}} + \underline{a_n}$$

כל הכפולות של 9 מתחלקות ב 9. לכן, השארית של חילוק המספר N ב 9, שווה לשארית המתקבלת מחלוקת סכום ספרותיו $a_1 + \ldots + a_n$ ב 9. אם סכום הספרות איננו מספר בן ספרה אחת, נמשיך בתהליך זה עד שנקבל מספר בן ספרה אחת. במקרה של ריבוע שלם נקבל 1, 4, 7 או 9.

כיוון שהשארית בחילוק ב 9 שווה לסכום הספרות הסופי של המספר, נקבל שאם סכום הספרות הסופי של מספר הוא 2, 3, 5, 6 או 8 - אזי המספר <u>איננו</u> ריבוע שלם.

נערוך ניפוי לפי שיטה זו:

562541: $5 + 6 + 2 + 5 + 4 + 1 = 23$, $2 + 3 = 5$

אינו ריבוע שלם.

669124: $6 + 6 + 9 + 1 + 2 + 4 = 28$, $2 + 8 = 10$, $1 + 0 = 1$

יכול להיות ריבוע שלם.

703925: $7 + 0 + 3 + 9 + 2 + 5 = 26$, $2 + 6 = 8$

אינו ריבוע שלם.

715714: $7 + 1 + 5 + 7 + 1 + 4 = 25$, $2 + 5 = 7$

יכול להיות ריבוע שלם.

870489: $8 + 7 + 0 + 4 + 8 + 9 = 36$, $3 + 6 = 9$

יכול להיות ריבוע שלם.

864800: $8 + 6 + 4 + 8 + 0 + 0 = 26$, $2 + 6 = 8$

אינו ריבוע שלם.

נותרו שלושה מספרים העשויים להיות ריבועים שלמים:

669124 , 715714 , 870489

עתה, עלינו למצוא אילו מספרים מבין השלושה הם ריבועים שלמים. נעשה זאת על-ידי חיפוש ובדיקת קיום שורשים שלמים.

אנו נדגים כאן רק אחת השיטות, אך ניתן לבצע זאת בדרכים שונות.

i) <u>669124</u>: זהו מספר בן 6 ספרות. נניח יש לו שורש שלם, אזי השורש שלו הוא בן 3 ספרות. כיוון ששתי הספרות הראשונות הן ...66, אזי ספרת המאות של השורש היא 8.

ספרת היחידות של המספר הנתון היא 4, לכן ספרת היחידות של השורש היא 2 או 8.

לכן, אם קיים שורש שלם ל 669124, הוא אחד המספרים 8i2 או 8i8, כאשר $i = 0,1,\ldots,9$.

כדי לצמצם למינימום את מספר הבדיקות, נבחר בכל פעם את המספר האמצעי מתוך המספרים היכולים לשמש כשורשים במרווח נתון.

נבדוק את המספר האמצעי בין 802 ו 898 (יש שניים, אזי נבחר אחד מהם): 852.
$852^2 = 725904$, כלומר 852 גדול מהשורש.

נבדוק שוב מספר אמצעי, הפעם בין 802 ו 848: 828 .
$828^2 = 685564$, כלומר גם 828 גדול מהשורש.

בשלב הבא נבדוק מספר אמצעי בין 802 ל 822: 812.
$812^2 = 659344$, כלומר 812 קטן מהשורש.

האפשרויות לקיום השורש הצטמצמו למספרים: 818, 822. נבדוק את 818:
$818^2 = 669124$, כלומר 818 הוא השורש המבוקש. מכאן, 669124 הוא ריבוע שלם.

בבדיקת המספר הבא נקצר בהסברים:

ii) 715714: אם יש שורש שלם הוא בן 3 ספרות. ספרת המאות שלו היא 8, וספרת היחידות - 2 או 8.
מבדיקת המספר הקודם, אנו יודעים כי 852 גדול מהשורש.
שכן $852^2 = 725904$; ואילו 828 קטן מהשורש, שכן $828^2 = 685564$.

נבדוק אם 842 הינו השורש. $842^2 = 708964$, ולכן קטן מהשורש.
נשאר לבדוק את 848: $848^2 = 719104$.
כיון שאין מספר טבעי אחר היכול לשמש כשורש של 715714, אין למספר זה שורש שלם.

עתה נבדוק את המספר האחרון מבין השלושה:
iii) 870489: אם יש שורש שלם הוא בן 3 ספרות. ספרת המאות שלו היא 9, וספרת היחידות - 3 .
$953^2 = 908209$, לכן 953 גדול מהשורש.
$933^2 = 870489$, ולכן 933 הוא השורש של 870489. מכאן, 870489 הינו ריבוע שלם.

לסיכום, מבין עשרת המספרים שהוצגו בתחילה: 669124 ו 870489 הינם ריבועים שלמים.

לפניך פתרונות של הבעיות שניתנו לתלמיד, אשר קשורות גם הן לנושא של **ריבוע שלם:**

<u>בעיה 1</u>

ידוע כי אם ספרת היחידות של מספר טבעי N היא 5, אזי ספרת היחידות של N^2 גם היא 5. מהי ספרת העשרות של 65^2, של 145^2? האם תמיד ספרת העשרות של N^2 (כאשר N הוא מספר טבעי שספרת יחידותיו 5) היא 2? הוכח תשובתך.

נסמן ב a את המספר המתקבל ע"י מחיקת ספרת היחידות מ N .

אזי $N = 10a + 5$. נעלה את N בריבוע:

$$N^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$$

ומכאן, ספרת היחידות של N^2 היא 5, וספרת העשרות **שלו** - 2 .

<u>בעיה 2</u>

ריבוע שלם מורכב מהספרות הבאות: 5, 3, 2, 0. מהו המספר?

מבין הספרות הנתונות, רק 5 ו 0 יכולות לשמש כספרת יחידות של ריבוע שלם. אך אם 0 הוא ספרת יחידות של ריבוע שלם, ספרת העשרות צריכה גם היא להיות 0 (הוכח!). לכן, 5 היא ספרת היחידות של המספר המבוקש.

מבעיה 1 נובע ש 2 הינה ספרת העשרות.

מכאן, 0 הינה ספרת המאות והמספר הוא: 3025 .

<u>בעיה 3</u>

האם המספר $\overline{abab}$ (מספר בן 4 ספרות, שבו ספרת האלפים וספרת העשרות היא a ספרת המאות וספרת היחידות היא b) יכול להיות ריבוע שלם?

$\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$.

101 הינו מספר ראשוני, והוא מופיע פעם <u>אחת</u> בלבד בפירוק של $\overline{abab}$ לגורמים. אך בפירוק של ריבוע שלם לגורמים, צריך כל גורם להופיע מספר זוגי של פעמים. לכן $\overline{abab}$ איננו ריבוע שלם.

בעיה 4

האם המספר $\overline{abcabc}$ יכול להיות ריבוע שלם?

$$\overline{abcabc} = \overline{abc}\cdot 1001$$

הפירוק של 1001 לגורמים הוא $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$.

לא יתכן ששלושת גורמים אלה מופיעים מספר זוגי של פעמים, שכן

$\overline{abc} < 7\cdot 11\cdot 13 = 1001$.

לכן: $\overline{abcabc}$ אינו ריבוע שלם.

בעיה 5

האם יתכן שמכפלה של מספר טבעי ומספר הגדול ממנו ב 2, תהיה ריבוע שלם?

$$a(a + 2) = a^2 + 2a$$

ברור ש: $a^2 + 2a < a^2 + 2a + 1$

אבל: $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$

לכן: $a^2 < a(a + 2) < (a + 1)^2$

$a(a + 2)$ נמצא בין שני ריבועים עוקבים ולכן איננו ריבוע שלם.

בעיה 6

נסה למצוא a שלם כך ש $5a^2 + 10$ יהיה ריבוע שלם.

$$5a^2 + 10 = 5(a^2 + 2)$$

אם קיים a שעבורו $5a^2 + 10$ הוא ריבוע שלם, אזי $a^2 + 2$ מתחלק ב 5.
במקרה זה, ספרת היחידות של $a^2 + 2$ היא 5 או 0.

i) אם ספרת היחידות היא 5, אזי ספרת היחידות של a^2 היא 3. אך לא קיים ריבוע שלם שספרת יחידותיו היא 3.

ii) אם ספרת היחידות היא 0, אזי ספרת היחידות של a^2 היא 8. גם במקרה זה לא קיים ריבוע שלם מתאים.

לכן, לא קיים a שלם כך ש $5a^2 + 10$ הינו ריבוע שלם.

__בעיה 7__

האם ניתן למצוא חמישה מספרים עוקבים, שסכום ריבועיהם הוא ריבוע שלם?

נוח לסמן את המספר האמצעי ב a, ואז חמשת המספרים העוקבים הם:

$$a - 2 \ , \ a - 1 \ , \ a \ , \ a + 1 \ , \ a + 2$$

סכום ריבועיהם:

$$(a - 2)^2 + (a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 = 5a^2 + 10$$

בפתרון לבעיה 6 הראינו כי $5a^2 + 10$ אינו יכול להיות ריבוע שלם. לכן לא קיימים חמישה מספרים עוקבים שסכום ריבועיהם הוא ריבוע שלם.

__בעיה 8__

האם המספר $3a + 2$ (a מספר טבעי) יכול להיות ריבוע שלם?

כל מספר טבעי ניתן להצגה כ- $3x$, $3x + 1$ או $3x + 2$, כאשר x מספר טבעי או 0. לכן, כל ריבוע שלם ניתן להצגה כ- $(3x)^2$, $(3x + 1)^2$ או $(3x + 2)^2$, כאשר x מספר טבעי או 0 .

נפתח סוגריים:

$$(3x)^2 = 9x^2$$

$$(3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1 = 3(x^2 + 2x) + 1$$

$$(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4 = 3(3x^2 + 4x + 1) + 1$$

נובע שכל ריבוע שלם משאיר שארית של 0 או 1 בחלוקתו ב 3. אך המספר הנתון - $3a + 2$ - משאיר שארית של 2 בחלוקתו ב 3, ולכן __אינו__ יכול להיות ריבוע שלם.

__בעיה 9__

האם !50 הינו ריבוע שלם?

(!50 פירושו $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50$)

לא, כיוון שאילו !50 היה ריבוע שלם, אזי כל גורם שלו היה מופיע מספר זוגי של פעמים. אך 47 (למשל) הינו גורם של !50 אשר מופיע רק פעם אחת.

__בעיה 10__

נתון: $\overline{1a5}^2 \cdot 9 = \overline{1b9025}$

מצא את הערכים המספריים של a ו b .

$\overline{1b9025}$ מתחלק ב 9. לכן סכום ספרותיו מתחלק ב 9.

סכום הספרות: $1 + b + 9 + 0 + 2 + 5 = 17 + b$. מכאן: $b = 1$.

קיבלנו: $\overline{1a5}^2 \cdot 9 = 119025$

$\overline{1a5}^2 = 13225$

כיוון ש: $115^2 = 13225$

נקבל: $b = 1$, $a = 1$.

<u>בעיה 11</u>

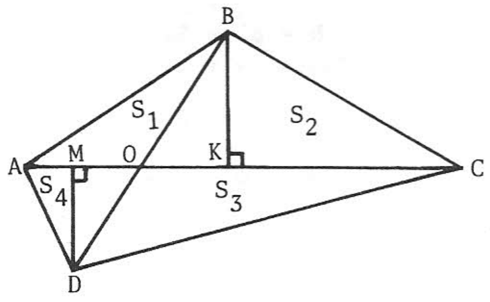
במרובע קמור העבירו את האלכסונים. שטחי ארבעת המשולשים שהתקבלו מבוטאים במספרים שלמים.

האם מכפלת ארבעת המספרים יכולה להיות מספר המסתיים בספרות 1982?

BK גובה במשולש ABO ובמשולש BCO .

אזי: $S_1 = \dfrac{AO \cdot BK}{2}$ $S_2 = \dfrac{OC \cdot BK}{2}$

נקבל: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{AO \cdot BK}{2}}{\frac{OC \cdot BK}{2}} = \dfrac{AO}{OC}$



DM גובה במשולש AOD ובמשולש COD .

אזי: $S_3 = \dfrac{OC \cdot DM}{2}$ $S_4 = \dfrac{AO \cdot DM}{2}$

נקבל: $\dfrac{S_4}{S_3} = \dfrac{\frac{AO \cdot DM}{2}}{\frac{OC \cdot DM}{2}} = \dfrac{AO}{OC}$

לכן: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{S_4}{S_3}$ או: $S_1S_3 = S_2S_4$

מכאן: $S_1S_2S_3S_4 = (S_1S_3)(S_2S_4) = (S_1S_3)^2$

כלומר, המכפלה $S_1S_2S_3S_4$ היא ריבוע שלם. ריבוע שלם אינו יכול להסתיים בספרה 2. לכן מכפלת ארבעת המספרים אינה יכולה להיות מספר המסתיים בספרות 1982.

בעיה 12

בדקנו ומצאנו כי:

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 1 = 1^2$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$$

האם ניתן להכליל זאת? כלומר, האם תוספת של 1 למכפלה של ארבעת מספרים עוקבים כלשהם, נותנת תמיד ריבוע שלם? הוכח!

נניח a מספר שלם, ונראה כי קיים b שלם כך ש:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = b^2$$

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 &= [a(a+3)][(a+1)(a+2)] + 1 \\ &= (a^2+3a)(a^2+3a+2) + 1 \\ &= (a^2+3a)[(a^2+3a)+2] + 1 \\ &= (a^2+3a+1)^2 \end{aligned}$$

מכאן: $b = a^2 + 3a + 1$

בעיה 13

פתור את המשוואה: $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + x! = y^2$

כאשר $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ *, ו x, y הם מספרים טבעיים.*

מצא את כל הפתרונות!

אם $x = 1$ אזי $y^2 = 1! = 1$.

ונקבל את הפתרון: $x = 1$, $y = 1$.

אם $x = 2$ אזי $y^2 = 1! + 2! = 3$

ואין פתרון במספרים טבעיים.

אם $x = 3$ אזי $y^2 = 1! + 2! + 3! = 9$

ונקבל את הפתרון: $x = 3$, $y = 3$.

אם $x = 4$ אזי $y^2 = 1! + 2! + 3! + 4! = 33$.

ואין פתרון במספרים טבעיים.

אם $x > 4$, אזי:

$$y^2 = \underbrace{1! + 2! + 3! + 4!}_{33} + \underbrace{5! + 6! + \ldots + x!}_{\text{בכל אחד מהמחוברים מופיע הגורם } 2\cdot5\text{, ולכן ספרת היחידות של הסכום היא 0.}}$$

כלומר, אם $x > 4$ אזי ספרת היחידות של $1! + 2! + 3! + \ldots + x!$ היא 3.
לא קיים ריבוע שלם המסתיים בספרה 3, ולכן $(y = 1, x = 1)$ ו $(y = 3, x = 3)$
הם שני הפתרונות היחידים של המשוואה הנתונה.

בעיה 14

צרף מימין למספר 400 מספר בן 4 ספרות, כך שתקבל מספר בן 7 ספרות שהוא ריבוע שלם. מצא את כל האפשרויות.

נצרף ל 400 את $\overline{abcd}$ ונקבל את המספר $\overline{400abcd}$.
אנו מחפשים את הפתרונות של $\overline{400abcd} = y^2$.

או:

$$4000000 + \overline{abcd} = y^2$$

$$\overline{abcd} = y^2 - 4000000$$

$$\overline{abcd} = (y + 2000)(y - 2000)$$

$y - 2000 > 0$ לכן: $y > 2000$ (ואז $y + 2000 > 4000$)

אם $y = 2001$ אזי $\overline{abcd} = 4001\cdot1 = 4001$

אם $y = 2002$ אזי $\overline{abcd} = 4002\cdot2 = 8004$

אם $y > 2002$ אזי $\overline{abcd} > 10000$, וזה לא יתכן.

לכן שתי האפשרויות היחידות הן:

א) לצרף ל 400 את 4001 ולקבל: $4004001 = 2001^2$
ב) לצרף ל 400 את 8004 ולקבל: $4008004 = 2002^2$

בעיה 15

מצא ריבוע שלם בן 4 ספרות, אשר אם נחסר מספרת האלפים שלו 3, ונוסיף 3 לספרת יחידותיו - נקבל שוב ריבוע שלם.

נסמן את המספר ב $\overline{abcd}$. אזי $\overline{abcd} = x^2$.

אחרי החיסור וההוספה מתקבל המספר: $\overline{(a-3)bc(d+3)}$.

גם זהו ריבוע שלם ונסמן $\overline{(a-3)bc(d+3)} = y^2$.

$$x^2 - y^2 = \overline{abcd} - \overline{(a-3)bc(d+3)}$$
$$= 1000a+100b+10c+d-1000a+3000-100b-10c-d-3$$
$$= 2997$$

נפרק לגורמים: $(x+y)(x-y) = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot37$

x^2 הוא מספר בן 4 ספרות, כלומר: $1000 \le x^2 < 10000$

ואז: $31 < x < 100$

y^2 הוא מספר בן 3 או 4 ספרות, כלומר: $100 \le y^2 < 10000$

ואז: $10 \le y < 100$

לכן: $40 < x + y < 200$

מכאן: $\begin{cases} x+y = 3\cdot3\cdot3\cdot3 \\ x-y = 37 \end{cases}$ או $\begin{cases} x+y = 3\cdot37 \\ x-y = 3\cdot3\cdot3 \end{cases}$

כלומר: $x = 59$ או $x = 69$

ואז: $\overline{abcd} = 59^2 = 3481$ או $\overline{abcd} = 69^2 = 4761$

הריבוע השלם המתקבל מ 3481 הוא $22^2 = 484$.
מ 4761 מתקבל $42^2 = 1764$.