מהי החוקיות?

מאת: אברהם הרכבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

נתונה הסדרה:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 12$$

$$a_3 = 123$$

$$a_4 = 1234$$

. . . .

מהו a_n **?**

I תוך התבוננות במספרים, החוקיות ה"טבעית" שנראית לנו היא: כל מספר בנוי מרישום מספרים טבעיים עוקבים בזה אחר זה. כלומר:

$$a_5 = 12345$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_9 = 123456789$$

$$a_{10} = 12345678910$$

ובכלל:

$$a_n = 1234....91011....n$$

II דרך אחרת היא להסתכל בהפרשים שבין איברים עוקבים בסדרה הנתונה:

$$a_2 - a_1 = 11 \qquad \text{או} \qquad a_2 = a_1 + 11 \;,\; (a_1 = 1)$$

$$a_3 - a_2 = 111 \qquad\qquad a_3 = a_2 + 111$$

$$a_4 - a_3 = 1111 \qquad\qquad a_4 = a_3 + 1111$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = \underbrace{111...1}_{n} \qquad\qquad a_n = a_{n-1} + \underbrace{111...1}_{n}$$

במלים אחרות:

$$a_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111....11}_{n}$$

נסמן:

$$b_i = \underbrace{11....1}_{i}$$

ולכן:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (1)$$

כאשר לכל i:

$$b_i = 1 + 10 + ... + 10^{i-1} = \sum_{\ell=1}^{i} 10^{\ell-1}$$

ולפי נוסחת הסכום של טור הנדסי:

$$b_i = \frac{10^i - 1}{9}$$

כאשר נציב ב (1) נקבל:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{10^i - 1}{9} = \frac{1}{9}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} 10^i\right) - n\right] = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$$

לפי נוסחה זאת, כל תשעת האיברים הראשונים של הסדרה זהים לאלה המתקבלים לפי I (בדוק!) אך החל מהאיבר העשירי הם שונים.

$a_{10} = 12345678910$ *(לפי I)*

$a_{10} = 1234567900$ *(לפי II)*

ובאופן כללי:

$$a_{10+i} < a_{10+i}$$

(לפי I) *(לפי II)* לכל $i = 0,1,2...$

השוואה זאת בין איברי שתי הסדרות, בולטת יותר כאשר אנו מציגים כל אחת מהן באמצעות נוסחת הנסיגה שלה:

נוסחת נסיגה לסדרה I

$$a_1 = 1\ ,\ a_n = 10^t a_{n-1} + n$$

(כאשר t הוא מספר הספרות של n)

נוסחת נסיגה לסדרה II

$$a_1 = 1\ ,\ a_n = 10 \cdot a_{n-1} + n$$

כאן רואים שכל עוד $t = 1$ (כלומר, בעבור: $a_1,...,a_9$) האיברים של שתי הסדרות זהים, אך החל מהאיבר העשירי, איברי הסדרה I גדולים מאלה של הסדרה II.

III למעשה, אין שום הסתייגות מתמטית לקבל כתשובה נכונה כל סדרה שעולה על דעתנו ובלבד שארבעת איבריה הראשונים יהיו אלה הנתונים. נוכל, למשל, להגדיר את הסדרה באופן מפוצל כך שבעבור ארבעת האיברים הראשונים יתקיים:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 12$$
$$a_3 = 123$$
$$a_4 = 1234$$

ובעבור $n > 4$, $a_n = f(n)$, f פונקציה כלשהי (מהטבעיים אל הטבעיים או אף מהטבעיים אל הממשיים). אפשרות כזאת אינה מענינת במיוחד, מאחר והחוקיות של f אינה חלה על ארבעת האיברים הראשונים.
בסעיף II, למשל, מצאנו פונקציה (מעריכית) לא מפוצלת, אשר בנוסף לכך קיימה חוקיות "טבעית" (לפחות עד a_9).

נבנה עתה פונקציה פולינומית לא מפוצלת.
לשם כך נעבור מסימון של סדרות לסימון של זוגות סדורים (נקודות במישור).
דרך שתי נקודות עוברת רק פונקציה פולינומית אחת מהצורה $f(n) = an + b$.
דרך 3 נקודות עוברת רק פונקציה פולינומית אחת מהצורה
$f(n) = an^2 + bn + c$, וכן הלאה.
כאשר הנקודות נתונות, קל לבנות את הפולינום. נניח שבמקרה שלנו היו נתונות רק 2 נקודות: $(1, 1)$, $(2, 12)$. אחת הדרכים לבנות את הפולינום היא כדלקמן:

נצא מהצורה: $f(n) = p(n - 1) + q(n - 2)$
נקבע את המקדמים p ו q:

$$f(1) = q(1 - 2) = 1$$
$$f(2) = p(2 - 1) = 12$$

ואז:
$$q = -1$$
$$p = 12$$

מכאן נקבל את הפונקציה:

$$f(n) = 12(n - 1) - (n - 2) = 11n - 10$$

במקרה שלנו נתונות ארבע נקודות. לכן, נבנה את $f(n)$ כך:

$$f(n) = p(n-2)(n-3)(n-4) + q(n-1)(n-3)(n-4) + r(n-1)(n-2)(n-4) + s(n-1)(n-2)(n-3)$$

עתה נקבע את המקדמים p, q, r ו s לפי התנאים $f(1) = 1$, $f(2) = 12$, $f(3) = 123$, $f(4) = 1234$.

לאחר החישוב נקבל:

$$p = -\frac{1}{6}\ ,\quad q = 6\ ,\quad r = -\frac{123}{2} \text{ ו } s = \frac{617}{3}\ .$$

והפולינום בצורה מפושטת הוא:

$$f(n) = 150n^3 - 850n^2 + 1511n - 810$$

בעזרת נוסחה זאת נוכל לחשב, למשל, $f(5)$, או במונחים של סדרות - a_5, ואז נקבל:

$$a_5 = 4245$$

אילו היינו מקבלים את הסדרה:

$$1\ ,12\ ,123\ ,1234\ ,4245,...$$

היינו "חושדים" שהאיבר החמישי הינו שרירותי. לכן, אולי, חוקיות זאת נראית "פחות טבעית" מאשר הקודמות.

מפתרון זה ניתן לעבור לאינסוף פתרונות אחרים, אם רק נוסיף ל $f(n)$ את המחובר: $\phi(n)\cdot[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]$, כאשר $\phi(n)$ היא פונקציה כלשהי (פולינומית או לא).

כלומר:

$$f(n) = 150n^3 - 850n^2 + 1511n - 810 + \phi(n)[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]$$

סיכום

שאלות מהסוג שהצגנו, הן בעלות פוטנציאל גדול ולא תמיד אנו מנצלים אותו היטב.

ראשית, אל לנו להסתפק בתשובה הנראית "טבעית", אלא לעודד חשיבה מסתעפת ויצירתית על-ידי בקשת תשובות אלטרנטיביות. נופתע לשמוע מפי תלמידים תשובות מקוריות ומעניינות מאוד.

נוסף לכך, נוכל לדון במשותף בכל הפתרונות שהתקבלו ולהשוותם. בתרגיל שלנו, אם נתרכז בקבוצת כל הפתרונות האפשריים, נוכל להגדיר את היחס הבא:

הפתרון $\{a_i\}$ והפתרון $\{b_i\}$ "שקולים" מסדר n אם ורק אם

$$a_i = b_i \quad \text{לכל} \quad i \leq n \text{, ו} \quad a_{n+1} \neq b_{n+1}$$

מהגדרה זאת נובעות מספר מסקנות מענינות:

א) על כל שני פתרנות ניתן להגיד אם הם "שקולים" או אינם "שקולים" מסדר מסוים. הסדר הקטן ביותר,בו שני פתרונות לבעיה שהצענו כאן יכולים להיות "שקולים", הוא 4.

ב) פתרון I ופתרון II, "שקולים" מסדר 9.

ג) ניתן לבנות פתרון "שקול" מסדר 5 לזה שמצאנו בסעיף III,אם נמצא את הפולינום היחיד ממעלה רביעית שעובר דרך הנקודות (1, 1) , (2, 12), (3, 123) , (4, 1234) ו (5, 4245). וכן הלאה.

ד) ניתן להראות כי היחס המוגדר בין הפתרונות איננו יחס שקילות במובן האלגברי, כי הוא איננו רפלקסיבי. בכך מצאנו דוגמא מעניינת ליחס שהוא סימטרי וטרנסטיבי, אך איננו רפלקסיבי, דבר שלא תמיד קל למצוא בספרי האלגברה.