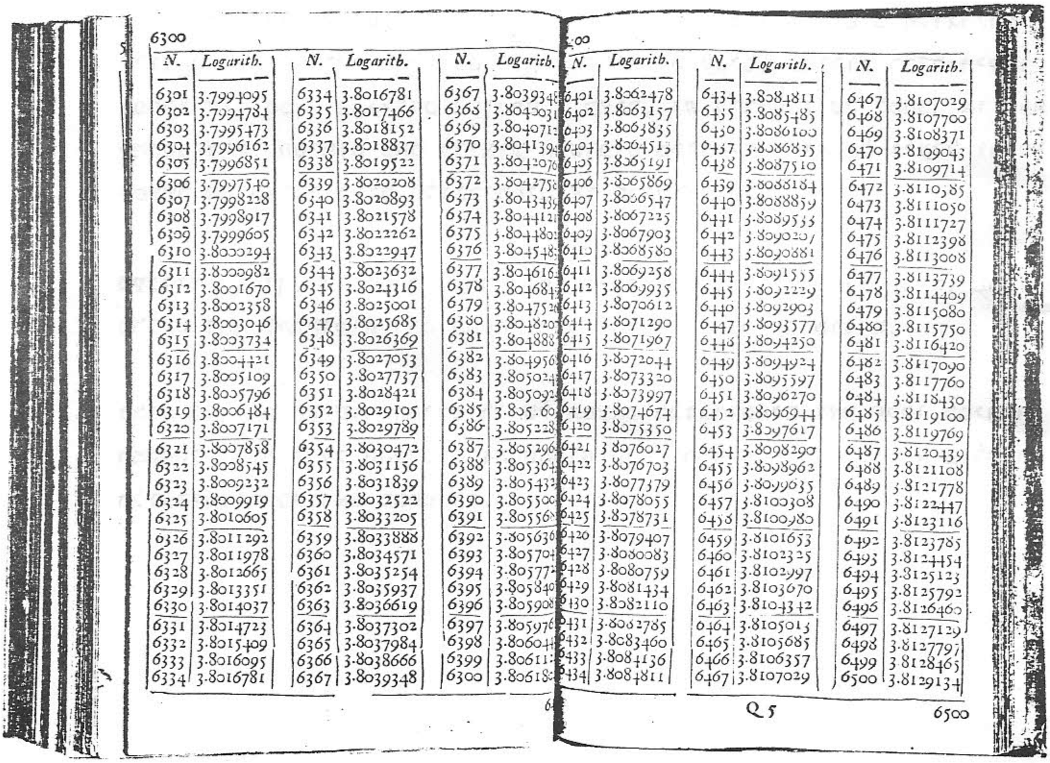
עלייתו ושקיעתו של לוח הלוגריתמים

מאת: נורית זהבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.



6300

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6301	3.7994095	6334	3.8016781	6367	3.8039348	6401	3.8062478	6434	3.8084811	6467	3.8107029
6302	3.7994784	6335	3.8017466	6368	3.8040031	6402	3.8063157	6435	3.8085485	6468	3.8107700
6303	3.7995473	6336	3.8018152	6369	3.804071	6403	3.8063835	6436	3.8086100	6469	3.8108371
6304	3.7996162	6337	3.8018837	6370	3.804139	6404	3.8064513	6437	3.8086835	6470	3.8109043
6305	3.7996851	6338	3.8019522	6371	3.8042076	6405	3.8065191	6438	3.8087510	6471	3.8109714
6306	3.7997540	6339	3.8020208	6372	3.804275	6406	3.8065869	6439	3.8088184	6472	3.8110385
6307	3.7998228	6340	3.8020893	6373	3.804343	6407	3.8066547	6440	3.8088859	6473	3.8111050
6308	3.7998917	6341	3.8021578	6374	3.804412	6408	3.8067225	6441	3.8089533	6474	3.8111727
6309	3.7999605	6342	3.8022262	6375	3.80448	6409	3.8067903	6442	3.8090207	6475	3.8112398
6310	3.8000294	6343	3.8022947	6376	3.804548	6410	3.8068580	6443	3.8090881	6476	3.8113008
6311	3.8000982	6344	3.8023632	6377	3.804616	6411	3.8069258	6444	3.8091555	6477	3.8113739
6312	3.8001670	6345	3.8024316	6378	3.804684	6412	3.8069935	6445	3.8092229	6478	3.8114409
6313	3.8002358	6346	3.8025001	6379	3.804752	6413	3.8070612	6446	3.8092903	6479	3.8115080
6314	3.8003046	6347	3.8025685	6380	3.804820	6414	3.8071290	6447	3.8093577	6480	3.8115750
6315	3.8003734	6348	3.8026369	6381	3.804888	6415	3.8071967	6448	3.8094250	6481	3.8116420
6316	3.8004421	6349	3.8027053	6382	3.804956	6416	3.8072044	6449	3.8094924	6482	3.8117090
6317	3.8005109	6350	3.8027737	6383	3.805024	6417	3.8073320	6450	3.8095597	6483	3.8117760
6318	3.8005796	6351	3.8028421	6384	3.805092	6418	3.8073997	6451	3.8096270	6484	3.8118430
6319	3.8006484	6352	3.8029105	6385	3.805[illegible]60	6419	3.8074674	6452	3.8096944	6485	3.8119100
6320	3.8007171	6353	3.8029789	6386	3.805228	6420	3.8075350	6453	3.8097617	6486	3.8119769
6321	3.8007858	6354	3.8030472	6387	3.805296	6421	3.8076027	6454	3.8098290	6487	3.8120439
6322	3.8008545	6355	3.8031156	6388	3.805364	6422	3.8076703	6455	3.8098962	6488	3.8121108
6323	3.8009232	6356	3.8031839	6389	3.805432	6423	3.8077379	6456	3.8099635	6489	3.8121778
6324	3.8009919	6357	3.8032522	6390	3.805500	6424	3.8078055	6457	3.8100308	6490	3.8122447
6325	3.8010605	6358	3.8033205	6391	3.80556	6425	3.8078731	6458	3.8100980	6491	3.8123116
6326	3.8011292	6359	3.8033888	6392	3.805636	6426	3.8079407	6459	3.8101653	6492	3.8123785
6327	3.8011978	6360	3.8034571	6393	3.805704	6427	3.8080083	6460	3.8102325	6493	3.8124454
6328	3.8012665	6361	3.8035254	6394	3.80577	6428	3.8080759	6461	3.8102997	6494	3.8125123
6329	3.8013351	6362	3.8035937	6395	3.805840	6429	3.8081434	6462	3.8103670	6495	3.8125792
6330	3.8014037	6363	3.8036619	6396	3.805908	6430	3.8082110	6463	3.8104342	6496	3.8126460
6331	3.8014723	6364	3.8037302	6397	3.805976	6431	3.8082785	6464	3.8105013	6497	3.8127129
6332	3.8015409	6365	3.8037984	6398	3.806044	6432	3.8083460	6465	3.8105685	6498	3.8127797
6333	3.8016095	6366	3.8038666	6399	3.80611	6433	3.8084136	6466	3.8106357	6499	3.8128465
6334	3.8016781	6367	3.8039348	6300	3.80618	6434	3.8084811	6467	3.8107029	6500	3.8129134

Q 5 6500

תצלום דף מספר הטבלות של Vlacq שהוכן ב-1695

בהשפעת הרנסנס היתה במחצית השניה של המאה השש-עשרה התעוררות בתחומי המדע השימושי כגון אסטרונומיה, הנדסה וספנות, אשר בהם יש לבצע חישובים נומריים. ההתפתחות במקצועות אלו הציגה דרישות גוברות והולכות למתמטיקאים, לפתח שיטות חישוב מהירות ומדויקות יותר מבעבר. כתוצאה מכך הגיעו הטכניקות החישוביות לשיאים חדשים. המצאת הלוגריתמים על-ידי ג'והן נפיר(John Napier, 1550-1617) בתחילת המאה השבע-עשרה, היתה בהחלט דבר בעיתו, שכן בעזרת לוגריתמים נעשות פעולות מסובכות על-ידי חישובים פשוטים. הלוגריתמים התקבלו בהתלהבות והתפשטו עד מהרה בקרב המתמטיקאים ואנשי מדעי הטבע. להמצאה זו היתה תרומה מרחיקת לכת גם בתחום השימושי וגם בתחום העיוני. האפשרות לביצוע חישובים מורכבים הובילה להתפתחויות במדעים. במתמטיקה עצמה הופיעו מושגים ורעיונות חדשים.

במשך כמה מאות שנים היה לוח הלוגריתמים, או סרגל החישוב הלוגריתמי, ציוד קבוע ושימושי בילקוטם של תלמידים ומדענים. דורות רבים חישבו ופתרו אין ספור תרגילים בעזרתם. כיום, יש לרבים גישה למחשב או לפחות למחשב-כיס. השימוש בהם לביצוע חישובים מסובכים, הוא קל ויעיל ומבטל למעשה את הצורך בלוח הלוגריתמים או סרגל החישוב.

מעניין לציין, כי גם הופעתם וגם שקיעתם של טבלות הלוגריתמים, מהווים פריצת דרך להתקדמות רבה בשטחי מדע ובענפי מתמטיקה שונים.

נביא כאן את הסיפור ההיסטורי של המצאת הלוגריתמים ואת שלבי הפיתוח המתמטי ונעמוד על החשיבות והמשמעות החינוכית של שילוב נושא תולדות הלוגריתמים בהוראת מתמטיקה.

ג'והן נפיר (John Napier, 1550-1617)

ג'והן נפיר נולד בסקוטלנד למשפחה סקוטית ידועה ומכובדת. הוא חונך בביתו עד גיל 13, ואז נשלח לאוניברסיטה, תחילה בסקוטלנד ולאחר מכן בצרפת, דבר שהיה מקובל לגבי משפחות סקוטיות בעלות אמצעים. בזמן לימודיו גילה ענין באריתמטיקה ובתאולוגיה. כעבור שנים אחדות, חזר לסקוטלנד והשתקע באחוזת מרצ'ינסטון, אשר ליד אדינבורג. סקוטלנד היתה נתונה אז בויכוחים פוליטיים ומלחמות דת חריפות, ונפיר נטל בהן חלק במרץ רב.

בין מאבקיו הפוליטיים והדתיים עסק נפיר בלימודי מתמטיקה ומדע,ואחת התוצאות של עיסוקיו היתה המצאת הלוגריתמים.

אי שם בין כתביו מופיעה הטבלה הבאה:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
1	2	4	8	16	32	64	128

נפיר התפעל מטבלה זו והסתכל עליה כעל כלי משחק חדש. הבנתו העמוקה את ההתאמה שבין שתי סדרות מקבילות אלו, שהאחת היא אריתמטית והשניה גיאומטרית, היא שדחפה אותו (בסביבות 1590) לחפש שיטה להחליף תרגילי כפל בתרגילי חיבור.

בימיו של נפיר היו בשימוש טבלות טריגונומטריות המקשרות בין זויות וסינוסים שלהן. הסינוסים נרשמו לא בתור יחסים בין אורכים כי אם בתור אורכים של חצאי מיתרים,וערכם היה תלוי בגודל של ה"סינוס השלם" הוא הרדיוס. על מנת להימנע משברים בטבלות הטריגונומטריות קבעו מספר גדול מאוד כאורך הרדיוס - 10^7 (או אפילו 10^{10}).לפי זה הסינוס של 90^o שווה ל- 10^7 והסינוס של 45^o (למשל),שווה ל-7071068. בטריגונומטריה נתקלים לעיתים קרובות במכפלה של סינוסים ומאחר וערכם של הסינוסים הובע במספרים בעלי שבע ספרות ויותר, הכפלתם זה בזה הצריכה עבודה רבה. נפיר השתעשע בנסיונות למצוא שיטה קלה לביצוע תרגילי כפל אלו. בעצם הרעיון היתה העזה רבה, כי כפל וחילוק נחשבו במשך מאות בשנים כפעולות יסודיות כל כך, שלא עלה על הדעת, כי אפשר לבצען באמצעות פעולות פשוטות יותר.

באותה העת החלו אסטרונומים להשתמש בשיטה שנקראה Prosthaphaeresis, שמטרתה היתה לתחליף פעולות כפל וחילוק על-ידי פעולות חיבור וחיסור. שיטה זו התבססה על נוסחה טריגונומטרית שהיתה ידועה עוד מקודם:

$$2\sin A \cdot \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

משערים שנפיר ידע על השיטה, כשהחל בעבודתו, וזה דרבנו להמשיך ברעיונותיו[2].

נפיר ראה בבירור רב את התועלת הגלומה בעבודתו ונטש את עיסוקיו האחרים והתפנה למשימת חייו. עשרים שנים חלפו עד אשר פרסם את הלוחות הראשונים. עוד לפני פירסומן של טבלות הלוגריתמים הן עוררו ענין רב, אך נפיר התקדם לאט ובבטחון ופרסם את הטבלות הראשונות רק ב-1614. הוא פירסם זאת בספר בן 147 עמודים, אשר 90 מהם הכילו טבלות מספרים, בשם:

"Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio".

הספר תורגם מלטינית לאנגלית ויצא לאור בלונדון ב-1616 ונקרא:

"A Description of the Marvelous Canon of Logarithms"

הספר מכיל הסבר למשמעותם של הלוגריתמים ואופן השימוש בהם וטבלה של הלוגריתמים עבור הסינוסים של זויות הנבדלות זו מזו בדקות.

שנתיים אחרי מותו של נפיר, התפרסם ספר קטן בשם:

"Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio"

בספר זה שנכתב למעשה שנים אחדות לפני ה-Descriptio, הסביר נפיר כיצד הגיע למסקנותיו ואיך חישב את טבלותיו. הוא העיר בצניעות שלא היה בכוונתו להסביר את שיטותיו, אלא אם יגלו המתמטיקאים עניין בהצעתו.

הספר תורגם מלטינית לאנגלית ב-1888. (הדפסה מחודשת של תרגום זה [1], שימשה מקור עיקרי בהכנת מאמר זה). קטעים ממנו מופיעים בספרו של Smith[3].

THE

CONSTRUCTION OF THE

WONDERFUL CANON OF

LOGARITHMS;

And their relations to their own natural numbers;

WITH

An Appendix as to the making of another and better kind of Logarithms.

TO WHICH ARE ADDED

Propositions for the solution of Spherical Triangles by an *easier method: with Notes on them and on the above-mentioned Appendix by the learned* HENRY BRIGGS.

By the Author and Inventor, *John Napier*, Baron *of Merchiston*, &c., in Scotland.

Printed by ANDREW HART,

OF EDINBURGH;

IN THE YEAR OF OUR LORD, 1619.

Translated from Latin into English by William Rae Macdonald, 1888.

<u>דף הפתיחה בתרגום האנגלי של ה-Constructio</u>

נקודת המוצא של נפיר היתה ההתאמה בין סדרה גיאומטרית וסדרה אריתמטית. סדרות אלו היו ידועות עוד לפני זמנו של נפיר, אך כלים לרישום חזקות לא היו ידועים עדיין, ורק יותר מאוחר הכניס דקרט (1596-1650,Descartes) את הסימון a^n. בהעדר הכלים של האלגברה המודרנית היתה עבודתו של נפיר מסורבלת ביותר.

בטרם ניגש לתאר כיצד בנה נפיר את הטבלות הראשונות נציג את המושג היסודי של הלוגריתמים בעזרת האלגברה שבידינו. גם בהמשך נביא הבהרות בעזרת "כלים מודרניים".

נתבונן בסדרה הגיאומטרית הבאה:

$$2 \,,\, 4 \,,\, 8 \,,\, 16 \,,32 \,,\, 64 \,,\, 128 \,,\, 256 \,,\ldots$$

נרשום אותה בכתיב חזקות:

$$2^1 \,,\, 2^2 \,,\, 2^3 \,,\, 2^4 \,,\, 2^5 \,,\, 2^6 \,,\, 2^7 \,,\, 2^8 \,,\ldots$$

אנו אומרים כי n הוא הלוגריתמוס של a^n לפי הבסיס a.

אם נכפול שני מספרים, יהיה הלוגריתמוס של המכפלה שווה לסכום הלוגריתמים של הגורמים.

לדוגמא:

3 הוא הלוגריתמוס של 8 לפי הבסיס 2;

6 הוא הלוגריתמוס של 64 לפי הבסיס 2;

9 הוא הלוגריתמוס של המכפלה $512 = 8\times 64$ לפי הבסיס 2, וזהו שווה לסכום הלוגריתמים של הגורמים.

אם כך, כאשר רושמים ליד כל איבר בסדרה גיאומטרית, שאיברה הראשון שווה למנת הסדרה, את מספרו הסידורי, מקבלים בעצם טבלה של לוגריתמים. כך יש לנו לוגריתמים רק של מספרים שהם איברי הסדרה הגיאומטרית ועלינו למצוא על ידי אינטרפולציה, לוגריתמים של ערכי ביניים.

נפיר השתמש ברדיוס שאורכו 10^7 בתור איבר ראשון בסדרה גיאומטרית ובחר כמנה לסדרה ערך שהוא קרוב מאוד ל-1, 0.9999999 $(1 - 1/10^7)$. (איברי הסדרה קרובים מאוד אחד לשני וזה עוזר בחישוב ערכי ביניים). כל איבר מתקבל אם מוצאים $1/10^7$ של האיבר הקודם ומחסרים זאת מן האיבר הקודם.

בטבלה הראשונה ב-Constructio חישב נפיר את 100 האיברים הראשונים בסדרה. האיבר ה-100 בטבלה הוא 9999900.0004950.

First table.

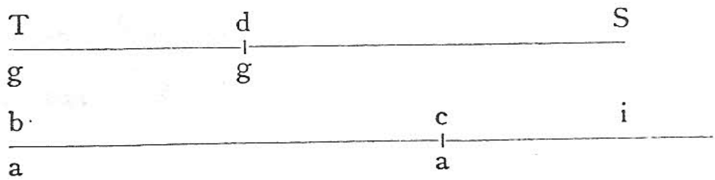
10000000.0000000
1.0000000
9999999.0000000
.9999999
9999998.0000001
.9999998
9999997.0000003
.9999997
9999996.0000006
to be continued up to
9999900.0004950

<u>הטבלה הראשונה ב-Constructio</u>

<u>הערה</u>: נפיר היה הראשון אשר השתמש בפועל בנקודה העשרונית בהצגה של שברים עשרוניים אשר כבר היו ידועים בזמנו.

לנפיר לא היו הכלים האלגבריים של חזקות ומעריכים והוא נזקק לאינטרפרטציה דינמית גיאומטרית על מנת להגדיר את הלוגריתמים. נביא עתה את ההגדרה הגיאומטרית בסימונים המקוריים של נפיר.

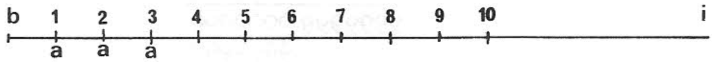
26. *The logarithm of a given sine is that number which has increased arithmetically with the same velocity throughout as that with which radius began to decrease geometrically, and in the same time as radius has decreased to the given sine.*



<u>הגדרת הלוגריתמים של נפיר</u>

הסבר:

אם נקודה a נעה במהירות קבועה על קרן bi, אזי היא עוברת בפרקי זמן שווים קטעי דרך שווים והמרחקים b-1 , b-2 , b-3 וכו' מהווים סדרה אריתמטית עולה.



TS הוא קטע שאורכו כאורך הרדיוס ונקודה g יוצאת מ-T ונעה עליו כך שבפרקי זמן שווים היא עוברת תחילה מרחק T-1 שהוא (למשל) 1/10 של TS, ואחר כך מרחק 1-2 שהוא 1/10 של המרחק 1-S ואחר כך מרחק 2-3 שהוא 1/10 של המרחק 2-S וכו'. בצורה כזו המהירות של g בכל נקודה פרופורציונית למרחק שעוד נותר לה לעבור והיא יורדת לפי סידרה גיאומטרית.

המרחקים TS, 1-S, 2-S וכו' מהווים סדרה גיאומטרית:

$$R\ ,\ R - R\cdot p = R(1-p)\ ,\ R(1-p) - R(1-p)p = R(1-p)^2\ ,\ \ldots$$

נסמן: $1 - p = q$.

אם כך מתקבלת הסדרה הגיאומטרית:

$$R\ ,\ Rq\ ,\ Rq^2\ ,\ \ldots\ ,\ Rq^n\ ,\ \ldots$$

גם המרחקים T-1 , 1-2 , 2-3 וכו' מהווים סדרה גיאומטרית שמנתה q שכן:

המרחק T-1: Rp

המרחק 1-2: $Rq - Rq^2 = Rpq$

המרחק 2-3: $Rq^2 - Rq^3 = Rpq^2$

<u>הגדרה:</u> נקודה g יוצאת מ-T במהירות היורדת לפי סדרה גיאומטרית. באותו זמן יוצאת מ-b נקודה a באותה המהירות שבה יצאה g ונעה במהירות קבועה. כאשר g מגיעה ל-d , a מגיעה ל-c .

אורך הקטע BC הוא הלוגריתמוס של המספר dS

לפי הגדרה זו הלוגריתמוס של TS (שאורכו כאורך הרדיוס) שווה לאפס, וככל שהמספר dS (הסינוס) קטן הלוגריתמוס שלו גדל. עוד ניתן לומר כי הלוגריתמוס של dS שהוא אורך הקטע bc חסום מלמטה על-ידי האורך Td, שכן מהירותה של g הולכת ופוחתת. בהנחה שמהירותה של g הולכת ופוחתת בהתקרבה ל-T משמאל, באותו היחס שבו היא יורדת בהמשך הדרך, ניתן לחסום מלמעלה את bc על ידי הערך $Td\cdot\frac{TS}{dS}$.

נחזור לטבלה הראשונה שבה מופיעים 100 מספרים (סינוסים) היורדים לפי סדרה גיאומטרית ביחס $1 - 1/10^7$. האיבר השני בטבלה היה 9999999.0000000 ואם כך הלוגריתמוס שלו יהיה בין 1.0000000 (Td) ובין 10000000:9999999 $(Td\cdot\frac{TS}{dS})$ כלומר 1.00000010. ההבדל בין שני חסמים אלו קטן ביותר ואפשר לקחת את הממוצע שלהם 1.00000005 בתור הלוגריתמוס המתאים. הלוגריתמוס של המספר הבא בטבלה הראשונה יהיה כפול פי שניים מזה של הלוגריתמוס של האיבר הקודם וזה של המספר הבא אחריו פי שלושה וכך הלאה, מאחר והנקודה a עוברת מרחקים שווים בזמנים שווים.

בעזרת כתיב החזקות של ימינו נוכל לכתוב כי אם $N = 10^7(1-1/10^7)^L$, אזי L הוא הלוגריתמוס לפי נפיר של N. אם נחלק את N ו L ב 10^7, נוכל לרשום:

$$N/10^7 = ((1-1/10^7)^{10^7})^{L/10^7}$$

לפי הגדרה זו, כאשר N קטן, L גדל. בסיס הלוגריתמים הוא בעצם 1/e (e - הבסיס של הלוגריתמים הטבעיים) שכן $(1-1/10^7)^{10^7}$ הוא קרוב מאוד ל-$\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = 1/e$.

עד כאן יש לנו לוגריתמים של המספרים בטבלה הראשונה. כדי לקבל את הלוגריתמים של מספרים אשר נמצאים בין המספרים של הטבלה הראשונה חיפש נפיר קשרים בין הלוגריתמים.

38. *Of four geometrical proportionals, as the product of the means is equal to the product of the extremes; so of their logarithms, the sum of the means is equal to the sum of the extremes. Whence any three of these logarithms being given, the fourth becomes known.*

<u>קשר יסודי בין לוגריתמים</u>

הסבר:

לגבי רביעיה a:b = c:d שאיבריה הם איברי סדרה גיאומטרית מתקיים:

ad = bc ; לגבי הלוגריתמים שהם איברי סדרה אריתמטית מתקיים

loga + logd = logb + logc ובהינתן שלושה מהם אפשר למצוא את הרביעי.

נפיר הראה כיצד למצוא בדיוק מניח את הדעת, על-ידי חישוב לוגריתמוס של רביעי פרופורציוני, את החסמים של הלוגריתמים של ערכים קרובים למספרים המופיעים בטבלה. למשל, הסינוס האחרון המופיע בטבלה הראשונה הוא 9999900.0004950. לו היה ממשיך לחשב איברים בסדרה הזו היו הרווחים ביניהם הולכים וקטנים יתר על המידה. נפיר בחר במספר קרוב לערך האחרון, 9999900 ומצא את הלוגריתמוס שלו בעזרת הקשרים. היחס בין סינוס זה ובין הרדיוס הוא נוח לחישוב ($1-1/10^5$) ובו השתמש נפיר, כיחס לבנית טבלה שניה בת 50 איברים.

Second table.

10000000.000000
100.000000
9999900.000000
99.999000
9999800.001000
99.998000
9999700.003000
99.997000
9999600.006000
&c., up to
9995001.222927

הטבלה השניה ב-Constructio

<u>הערה:</u> הערך האחרון שגוי וצריך להיות 9995001.224804.
(ראה להלן הערה של נפיר, עמ' 12).

על ידי כפל פי שניים, שלושה וכך הלאה של הלוגריתמוס של האיבר הראשון אחרי הרדיוס בטבלה השניה, ניתן למצוא את הלוגריתמים של יתר איברי הטבלה השניה. בעזרת החסמים של הלוגריתמוס של הערך האחרון בטבלה זו ניתן למצוא את הלוגריתמוס של מספר קרוב אליו 9995000 (5001.2485387).

ערך סינוס זה הוא נוח לחישוב ומשמש כיחס ליצירת הטבלה השלישית, שהיא העיקרית ונפיר קרא לה Radical Table.

Proportionals of the Third Table.

First Column.	*Second Column.*	*69th Column.*
10000000.0000	9900000.0000	5048858.8900
9995000.0000	9895050.0000	5046334.4605
9990002.5000	9890102.4750	5043811.2932
9985007.4987	9885157.4237	5041289.3879
9980014.9950	9880214.8451	5038768.7435
&c., continuously to	&c., descending to	finally to
9900473.5780	9801468.8423	4998609.4034

הטבלה השלישית ב-Constructio

בטבלה השלישית יש 69 עמודים ובכל עמוד 21 מספרים. העמוד הראשון מתחיל ברדיוס והיחס בין כל שני איברים הוא 0.9995 (כדי למצוא איבר עוקב יש לחסר 1/2000 מקודמו). האיבר ה-21 בעמוד הראשון הוא 9900473.57808 והיחס בינו לבין הרדיוס הוא בקירוב 0.99. 69 המספרים הראשונים של העמודים הם סדרה המתחילה מהרדיוס ביחס 0.99. 69 המספרים השניים בכל עמוד מהווה סדרה המתחילה מהאיבר השני בעמוד הראשון ביחס 0.99 וכך הלאה. המספר האחרון בעמוד ה-69 הוא 4998609.4034. עכשיו יש לרשום ליד כל המספרים בטבלה השלישית את הלוגריתמים שלהם. הלוגריתמים של הטור הראשון הם סדרה אריתמטית שהפרשה הוא הלוגריתמוס של האיבר השני. את הלוגריתמוס של האיבר הראשון בטור השני מוצאים על-ידי מציאת פרופורציוני רביעי ואחר כך אפשר להתקדם, או אנכית בעמודים או אופקית בשורות המתאימות על-ידי חישוב איברי הסדרות האריתמטיות.

The Radical Table.

First column. Natural numbers.	First column. Logarithms.		69th column. Natural numbers.	69th column. Logarithms.
10000000.0000	.0	and the others, up to	5048858.8900	6834225.8
9995000.0000	5001.2		5046334.4605	6839227.1
9990002.5000	10002.5		5043811.2932	6844228.3
9985007.4987	15003.7		5041289.3879	6849229.6
9980014.9950	20005.0		5038768.7435	6854230.8
&c., up to	up to		up to	up to
9900473.5780	100025.0		4998609.4034	6934250.8

טבלת לוגריתמים

אם בידך מחשבון מצא בעזרתו את הערך של x^y עבור $x = 0.9999999$
ו $y = 6934250.8$ והשוה עם הטבלה.

כך התקבלו הלוגריתמים של כל האיברים בטבלה השלישית המתחילה ברדיוס ומסתיימת בקירוב במחצית הרדיוס (זהו סינוס של זוית קרובה ל-30^o).
כמו כן אפשר למצוא על-ידי אינטרפולציה, לוגריתמים של ערכי ביניים וכך אפשר לבנות טבלת לוגריתמים של סינוסים של זוויות.

בתחילה קרא נפיר למספרים העולים בסדרה אריתמטית, "מספרים מלאכותיים" ואחר כך קבע את השם לוגריתמוס המורכב משתי מילים יווניות:
arithmos - מספר ו-logos - יחס.

מן הראוי להביא את ההערה שהוסיף נפיר בדף אחרון של ה-Descriptio (ספר טבלות הלוגריתמים):

Note.

Since the calculation of this table, which ought to have been accomplished by the labour and assistance of many computors, has been completed by the strength and industry of one alone, it will not be surprising if many errors have crept into it. These, therefore, whether arising from weariness on the part of the computor or carelessness on the part of the printer, let the reader kindly pardon, for at one time weak health, at another attention to more important affairs, hindered me from devoting to them the needful care. But if I perceive that this invention is likely to find favour with the learned, I will perhaps in a short time (with God's help) give the theory and method either of improving the canon as it stands, or of computing it anew in an improved form, so that by the assistance of a greater number of computors it may ultimately appear in a more polished and accurate shape than was possible by the work of a single individual.

Nothing is perfect at birth.

THE END.

נפיר מתנצל על טעויות אפשריות של האיש המחשב(!) ושל המדפיס ומסכם כי "אין דבר המושלם בעת הוולדו".

ההגדרה שנתן נפיר הביעה בעצם משוואה דיפרנציאלית והוא הציע לה פתרון שלם. בעזרת חשבון דיפרנציאלי, שלא היה ידוע לנפיר, נוכל אנו להראות כי:

$$Naplogy = 10^7 \log_{1/e}(y/10^7)$$

הוכחה: (ראה ציור בעמ' 7).

אורכו של TS הוא כאורך הרדיוס, $TS = 10^7$. נניח כי המהירות ההתחלתית של הנקודות g ו a היא גם 10^7.

נסמן: $y = dS$

$$x = bc$$

$$Td = 10^7 - y$$

לגבי המהירות של g מתקיים: $-\frac{dy}{dt} = y$

ומכאן: $\frac{dy}{y} = -dt$

ע"י אינטגרציה: $\ln y = -t + k$ (כאשר $\ln$ פרושו לוג טבעי, $\log_e$).

נמצא את קבוע האינטגרציה k על-ידי שנציב $t = 0$ ונקבל:

$$\ln 10^7 = 0 + k$$

כלומר: $k = \ln 10^7$

לכן: $\ln y = -t + \ln 10^7$

המהירות של a היא: $\frac{dx}{dt} = 10^7$

ע"י אינטגרציה: $x = 10^7 t$

$$Naplogy = x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) = 10^7 \ln(10^7/y) =$$

$$= 10^7 \log_{1/e} (y/10^7)$$

<u>הערה</u>: הלוגריתמים הטבעיים בלוחות לפי בסיס e, נקראים לוגריתמים נפיריים, למרות שאין זה בדיוק הבסיס של הלוגריתמים שקיבל נפיר.

המצאת הלוגריתמים עוררה ענין רב באנגליה; במיוחד התעניין בכך הנרי בריגס (1561-1613, Henry Briggs), פרופסור לגיאומטריה בלונדון. בפגישתם הראשונה אמר בריגס לנפיר: "באתי בדרך ארוכה כדי ללמוד מניין צמחה הגאוניות שהביאה להמצאת הלוגריתמים, עכשיו בראותי אותך, תמה אנוכי מדוע איש לא חשב על כך מקודם, הרי כאשר זה ידוע - זה בעצם כל כך פשוט" [4]. בין בריגס ונפיר נוצרה ידידות עמוקה והם החלו לעסוק בצוותא בשיפור הטבלות. עבודתם המשותפת לא ארכה זמן רב, כי בשנת 1617 נפטר נפיר.

הלוגריתמים העשרוניים

בנספח ל-Constructio הציע נפיר לבנות לוגריתמים "מסוג טוב יותר", היינו כאלה שעבורם הלוגריתמוס של 1 יהיה אפס. הוא בחר בתור לוגריתמוס של 10 את המספר 10^{10} והצביע על דרך לקבל טבלות לוגריתמים בעזרת חישובים מסובכים מאוד של הוצאת שורשים ומציאת ממוצעים.

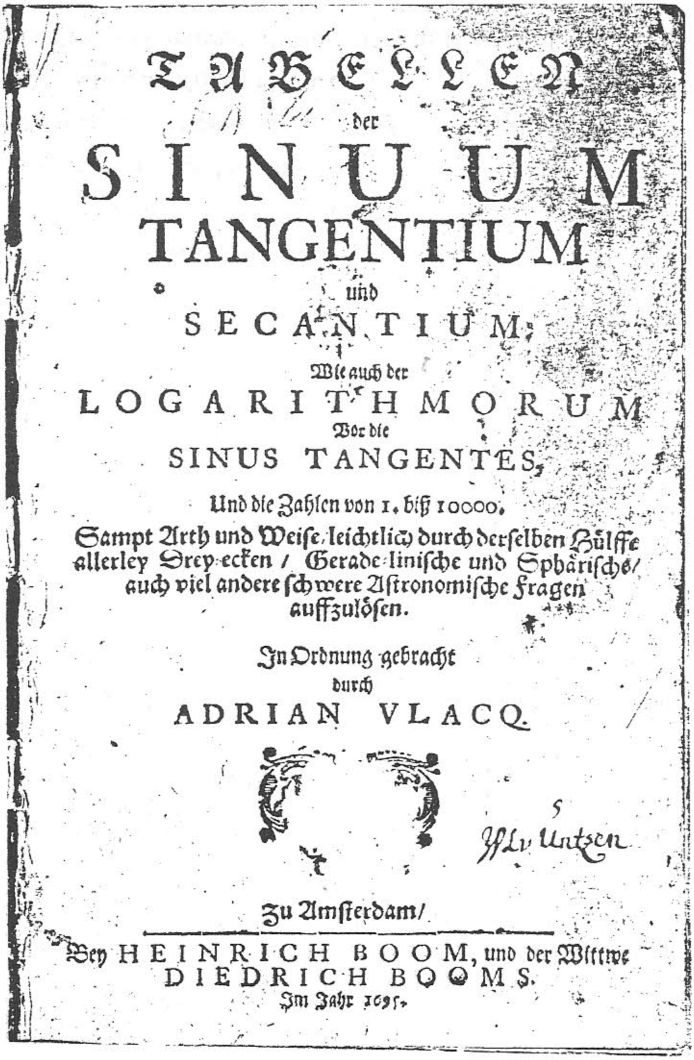
כמו כן הוא מציין בנספח כי כאשר הלוגריתמוס של 1 שווה לאפס מתקבלות תכונות מיוחדות של הלוגריתמים. למשל,

> IF *two numbers with known* Logarithms *be multiplied together, forming a third; the sum of their* Logarithms *will be the* Logarithm *of the third.*

<u>לוגריתמוס של מכפלה שווה לסכום הלוגריתמוס של הגורמים</u>

בעקבות ביקורו של בריגס אצל נפיר החליטו שניהם לעבוד על "הסוג הטוב יותר" של הלוגריתמים ובחרו את הלוגריתמים של 10 בתור 1 וכך נולדו הלוגריתמים הבריגיים שהם בעצם הלוגריתמים העשרוניים של היום. הלוגריתמים העשרוניים מתאימים במיוחד, כאשר סופרים בשיטה העשרונית.

אחרי מותו של נפיר, המשיך בריגס במרץ רב בחיבור הטבלות. ב-1624 הוא פרסם את: Arithmetica Logarithmia המכיל לוגריתמים עשרוניים בדיוק של 14 מקומות, של המספרים מ-1 עד 20000 וכן מ-90000 עד 100000. את הפער שבין 20000 ו-90000 השלים ההולנדי אדריאן וולק (Adrian Vlacq, 1600-1666), ולמרות שעבודתו היתה רבה מאוד הוא הצטנע וקרא לטבלות שלו מהדורה שניה של ספר הטבלות של בריגס.



TABELLEN der
SINUUM
TANGENTIUM
und
SECANTIUM;
Wie auch der
LOGARITHMORUM
Vor die
SINUS TANGENTES,
Und die Zahlen von 1. biß 10000.
Sampt Arth und Weise leichtlich durch derselben Hülffe
allerley Drey-ecken / Gerade-linische und Sphärische /
auch viel andere schwere Astronomische Fragen
auffzulösen.
In Ordnung gebracht
durch
ADRIAN VLACQ.

Zu Amsterdam /
Bey HEINRICH BOOM, und der Wittwe
DIEDRICH BOOMS.
Im Jahr 1695.

<u>דף הפתיחה לספר הטבלות של Vlacq מ-1695</u>

הטבלות של בריגס וולק, היו נהוגות בשימוש במשך שנים רבות. טבלות לוגריתמים בדיוק של 20 מקומות הוכנו לקראת אמצע המאה העשרים.

בריגס הכניס את המושגים מנטיסה (mantissa) ומציין (characteristic). בטבלות הראשונות נהגו לרשום גם את המציין וגם את המנטיסה ורק במאה השמונה-עשרה, התחילו לכתוב רק את המנטיסה, כפי שזה מופיע בלוחות המוכרים לנו (אך לא לתלמידינו כיום).

אדמונד גונתר (Edmund Gunter), אחד מעמיתיו למקצוע של בריגס היה אבי הרעיון של סרגל החישוב (1620). הוא הכין סרגלים באורכים שונים בהתאם ללוגריתמים של מספרים והבחין בעובדה שמקל שארכו log2 ועוד מקל שארכו log3 שווים בארכם ביחס למקשל שארכו log6. בשנת 1626 הציע המתמטיקאי ויליאם אוטרד (William Oughtred) להרכיב שתי סקלות של גונתר זו לצד זו, וזהו כידוע העקרון של סרגל החישוב.

זכות הראשונים של נפיר

בדרך כלל מיוחסת המצאת הלוגריתמים לנפיר ללא עוררין. בהמצאתו הוא הרחיק מעבר לידע של תקופתו לגבי סדרות ולגבי שיטת ה-Prosthaphaeresis, והמקוריות והגאוניות של עבודתו זכו להערכה רבה.

עד כמה המצאת הלוגריתמים היתה דבר בעיתו, מלמדת אותנו העובדה כי מישהו נוסף גילה אותם. ממש באותן השנים בהן שקד נפיר על המצאתו היה השען השוויצי בורג'י (Jobst Buergi, 1552-1632) עסוק בפרוייקט דומה, גם הוא הסתמך על קשרים בין סדרות גאומטריות ואריתמטיות. בניגוד לנפיר שבחר בבסיס הקטן במעט מ-1, הוא בחר בסיס שהוא קצת גדול מ-1, $1 + 10^{-4}$. בצורה כזו התקבלו לוגריתמים העולים כאשר המספרים עולים.

בורג'י פרסם את מסקנותיו ואת הטבלות שהכין ב-1620. באותו זמן כבר היו בשימוש הלוחות של נפיר ובריגס. מאחר ונפיר פרסם את עבודותיו הראשונות ב-1614 וידוע כי החל לעבוד על הנושא בערך ב-1594, מייחסים היסטוריוני המתמטיקה את זכות הראשונים על המצאת הלוגריתמים לג'והן נפיר.

ביולי 1914 חגגה אנגליה שלוש מאות שנה להמצאת הלוגריתמים ואת הקונגרס המדעי הבינלאומי אשר התכנס באדינבורג לכבוד החג, פתחו בדברים אלו [5] (יש הסבורים שהם נמלצים ומופרזים מעט): "המצאת הלוגריתמים באה לעולם כרעם ביום בהיר. שום עבודה קודמת לא קרבה את גילויה, שום דבר לא רמז עליה ולא בישר את בואה. היא הופיעה בדד בהתפרצה לפתע פתאום לתוך מחשבת האדם, מבלי להקיף מאומה מעבודתם של חכמים אחרים ומבלי לעקוב שום קו ידוע בהלך המחשבה המתמטית. היא תישאר כאחד מאותם איי אוקינוס, הבוקע פתאום ממעמקי התהום ועומד בדד, כשגבכי מים עמוקים מקיפים אותו מכל עבריו". (התרגום לעברית: ד"ר ב. בן יהודה, [6]).

הוראת נושא הלוגריתמים

במשך שנים רבות מאוד ביצעו תלמידים חישובים בעזרת לוח לוגריתמים. ביניהם היו כאלו אשר התפעלו מהמכשיר שבידם ושאלו מי המציא זאת ומתי התחילו להשתמש בלוגריתמים. היו תלמידים ששמו לב ותהו מה פירוש השם "בריגיים" בדף הלוגריתמים העשרוניים ו"נפיריים" בדף הלוגריתמים הטבעיים. אזי אולי שמעו מפי המורה על המצאת הלוגריתמים ועל מקומה של המצאה זו בתולדות המתמטיקה ובהתפתחות המדע.

בשנים האחרונות דחק מחשב-הכיס את רגליו של לוח הלוגריתמים מבית הספר. לאחרונה הותר השימוש במחשב-כיס בבחינות הבגרות ובוגרי המחזורים האחרונים לא מכירים כלל את לוח הלוגריתמים. אולי דווקא עתה כדאי להביא בפני התלמידים את סיפור המצאת הלוגריתמים, ולהדגיש כי, נפיר לא הסתפק במציאת התכונות התיאורטיות של הלוגריתמים, אלא גם בנה טבלות בדיוק של שבע ספרות. לא ייפלא, כי הוא שקד על כך למעלה מעשרים שנה בסבלנות מופתית.

לביצוע חישובים טכניים כיום, אין צורך במושג הלוגריתמים. במסגרת לימודי האנליזה פוגשים תלמידי התיכון את הפונקציה הלוגריתמית, תכונותיה ושימושיה. מבחינה דידקטית, יתכן שקל יותר לפתח את תורת הפונקציה הלוגריתמית על-ידי שמגדירים אותה כהפוכה לפונקציה המעריכית a^x, המוגדרת לכל x ממשי. כדאי לספר לתלמידים כי מבחינה היסטורית כרונולוגית המצאת הלוגריתמים קדמה לטיפול בחזקות ומעריכים.

מורי המתמטיקה שרגילים היו להקדיש מספר ניכר של שיעורים להקניית דרכי עבודה בעזרת לוח לוגריתמים וזמן רב לפתרון חישובי של בעיות מוצאים, כי אם מתירים שימוש במחשב כיס "נשאר זמן". רצוי לחשוב איך למלא זמן זה בתכנים מתמטיים חדשים המתאימים לעבודה בעזרת מחשבים, למשל,מתחום האנליזה הנומרית. נושא שעשוי אולי לעניין תלמידים הוא הבנת הוראות הקבע הנמצאות ב"ספריתו הפנימית" של מחשב הכיס, לקבלת ערכים של פונקציות החזקה והלוגריתמוס והפונקציות הטריגונומטריות.

שקיעתו של לוח הלוגריתמים מסמלת במדע ובמתמטיקה תקופה חדשה מתוחכמת יותר מבחינת אפשרויות החישוב. אין ספק שהתקדמות זו צריכה לבוא לידי ביטוי גם בהוראה.

מקורות

[1] Napier, J.: The Construction of the Wonderful Cannon of Logarithms. Dawsons, London, 1966.

[2] Boyer, C.B.: A History of Mathematics. John Wiley, New York, 1969.

[3] Smith, D.E.: A Source Book in Mathematics. McGraw-Hill, New York, 1929.

[4] Eves, H.: An Introduction to the History of Mathematics. Holt Reinhart, Winston, 1969.

[5] Hooper, A.: Makers of Mathematics. Faber and Faber, London, 1949.

[6] בן יהודה, ברוך: הוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון. הוצאת מסדה, תל-אביב, תש"ך.