מתמטיקה בשחמט

מאת: אברהם קריימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

הקדמה

האגדה מספרת שמשחק השחמט הומצא בהודו. המלך שירם הציע לממציא ססה לבחור לעצמו מתנה. הממציא ביקש גרעין חיטה אחד בעבור המשבצת הראשונה בלוח השחמט, שני גרעינים בעבור השניה, 4 גרעינים בעבור השלישית, 8 בעבור הרביעית וכו'. המלך הסכים, שכן חשב שהבקשה צנועה מאוד, אך לא יכול היה לקיים את הבטחתו. בכל המדינה, לא היו מספיק גרעיני חיטה למוסרם לססה.

מספר הגרעינים שביקש הממציא היה סכום המספרים:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$

זהו סכום האיברים של הסדרה ההנדסית שבה $a_1 = 1$ ו- $q = 2$.

והסכום הוא:

$$\frac{1 \cdot 2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$$

המחשה לגודלו של המספר נוכל לקבל כשנענה על השאלות הבאות:

לכמה זמן זקוק משרת המלך כדי לספור את כל הגרעינים?

נניח ספירת גרעין אחד אורכת שניה אחת. גם אם המשרת יספור את הגרעינים ברציפות יצליח למנות 86,400 גרעינים במשך יממה אחת, ואת הכמות כולה - במשך כ-6,000,000,000,000 שנים.

ידוע כי ב-1 מטר מעוקב נמצאים כ-15,000,000 גרעינים של חיטה. מה צריך להיות אורך המחסן שבו אפשר לאכסן את הגרעינים, אם רוחבו 10 מ' וגובהו 4 מ'?

נפח הגרעינים כולם הוא כ-12,000 ק"מ מעוקב. לכן האורך המינימלי של המחסן הדרוש הוא כ-300,000,000 ק"מ. מספר זה הוא כפליים של המרחק בין כדור הארץ לבין השמש.

לוח השחמט היווה במשך שנים רבות מקור לחידות ובעיות שונות. לפניכם דוגמאות לסוגים שונים של בעיות מפורסמות.

אחת הבעיות המענינות היא הבעיה המפורסמת הנקראת ***מהלך הסוס:***

מצא סדרת מהלכים של סוס על לוח שחמט, כך שהסוס יעבור בכל אחת מ-64 המשבצות, בדיוק פעם אחת (ניתן להתחיל ממשבצת כלשהי).

מתמטיקאים מפורסמים וביניהם אוילר (Euler L. 1707-1783), מואבר (Moivre A. 1667-1754), המילטון (Hamilton W.R. 1805-1865), ונדרמונד (Vandermonde A.T. 1735-1796), ניסו כוחם בפתרון בעיה זו.

עד כה לא נמצא פתרון כללי לבעיה, אך הוכח כי מספר הפתרונות גדול מ-31 מיליון וקטן מ-$\binom{168}{63}$.

<u>הערה</u>: הסימון $\binom{n}{k}$ פירושו מספר הצירופים של k איברים מתוך n, כלומר, מספר האפשרויות לבחור קבוצה בת k איברים מתוך קבוצה בת n איברים.

אפשר לחשב את $\binom{n}{k}$ לפי הנוסחה:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

כאשר n! פירושו מכפלת המספרים הטבעיים מ 1 עד n:

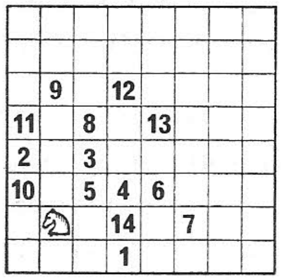
$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot \ldots \cdot n$$

המספר $\binom{168}{63}$ הינו בעל 100 ספרות!

לפניכם דוגמא לפתרון בעית ***מהלך הסוס*** של אוילר:

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

ורנסדורף (Warnsdorf) הציע דרך שבאמצעותה ניתן למצוא פתרון לבעיה. העקרון הוא שבכל מהלך נעביר את הסוס למשבצת שמספר היציאות האפשריות ממנה הוא הקטן ביותר (או אחד הקטנים ביותר).



לדוגמא: נניח הסוס עומד על לוח השחמט כמתואר בציור. ממקומו זה הוא יכול לעבור למשבצות 1, 2, 3, 4.
ממשבצת 1 הוא יכול לעבור למשבצות 5, 6, 7;
כלומר, ממשבצת 1 יש לו שלוש יציאות אפשריות.
ממשבצת 2 יש לו שוב שלוש יציאות אפשריות: למשבצות 5, 8, 9.

ממשבצת 3 יש לו שבע יציאות אפשריות: למשבצות 6, 9, 10, 11, 12, 13,14.
וממשבצת 4 יש לסוס שוב שבע יציאות אפשריות.
לפי שיטתו של ורנסדורף, יש להעביר את הסוס למשבצת 1 או למשבצת 2.

משערים ששיטתו של ורנסדורף נותנת תמיד פתרון לבעיה, אך עדיין לא הצליחו להוכיח זאת. מאידך, לא קרה שהשיטה לא נתנה פתרון במקרה כלשהו.

הערה: בעיית *מהלך הסוס* הינה מקרה פרטי של בעיה כללית יותר הנקראת "דרך המילטונית בגרף סימטרי".
(ראה: Lietzman W. Visual topology 1965. London, Chatto & Windus).

בעיות קומבינטוריות

בעיות העוסקות באפשרויות של העמדת כלי שחמט על לוח שחמט נקראות בעיות שחמט קומבינטוריות.
ניתן לחלק את בעיות השחמט הקומבינטוריות לשתי קבוצות:
הקבוצה האחת כוללת בעיות העוסקות במציאת המספר הגדול ביותר של כלי שחמט מאותו הסוג (מלכות, צריחים וכו'), אשר ניתן להעמיד על לוח שחמט, כך שאף שניים לא יאיימו זה על זה.
הקבוצה האחרת כוללת בעיות העוסקות במציאת המספר הקטן ביותר של כלי שחמט מאותו הסוג, שאפשר להעמיד על לוח שחמט, כך שכל משבצת תהיה מותקפת.
להלן מספר דוגמאות לבעיות משתי קבוצות אלו.

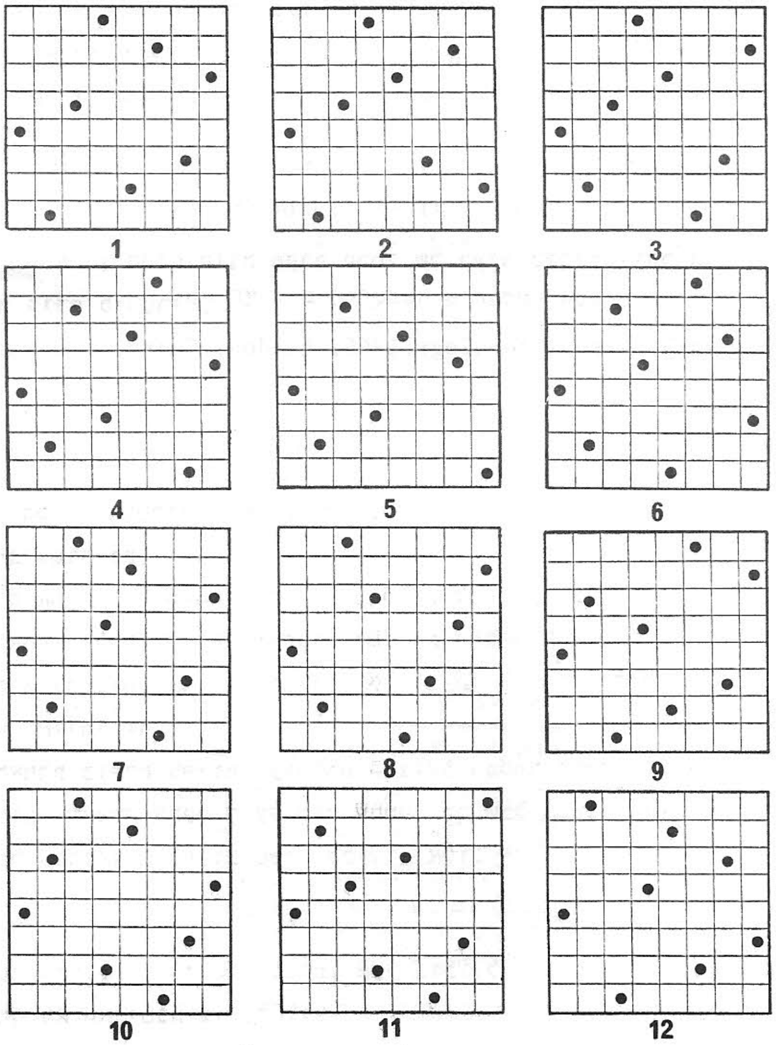
דוגמא א

מהו המספר הגדול ביותר של מלכות, אשר נוכל להציב על לוח שחמט, כך שאף שתיים מהן לא תאיימנה זו על זו?

פתרון:

כדי שאף שתי מלכות לא תאיימנה זו על זו, על כל טור של הלוח יכולה להימצא, לכל היותר, מלכה אחת. לכן, על הלוח לא יכולות להיות יותר מ-8 מלכות. כפי שמודגם בציור שלהלן, (12 הפתרונות של בעיית 8 המלכות), ניתן להעמיד 8 מלכות על לוח שחמט, כך שתקיימנה את הדרוש. מכאן, 8 הוא המספר הגדול ביותר של מלכות המקיים את תנאי השאלה.

בבעיה זו עסקו אנשים רבים, ביניהם מקס ביצל - שחמטאי מפורסם מגרמניה במאה ה-19, ופ. גאוס (Gauss K.F. 1777-1855) אשר חשב שלבעיה זו ישנם 72 פתרונות.
פרנץ נרוך פירסם ב-1850 את 12 הפתרונות הבאים, הנקראים בסיסיים, שכן אף אחד מהם לא יכול להתקבל מאחר באמצעות שיקוף הלוח או סיבובו.



12 הפתרונות של בעית 8 המלכות

גלשר הוכיח ב-1874, באמצעות תורת הדטרמיננטים, ש-12 הפתרונות הנ"ל הם כל הפתרונות הקיימים לבעיה זו.
בנוסף להם קיימים 80 פתרונות המתקבלים על-ידי שיקופים וסיבובים של הלוחות המופיעים בפתרונות הנ"ל. נדגיש כי בימינו אפשר לפתור בעיה כזו תוך מספר דקות, מספיק לחבר תוכנית מחשב לא קשה, ובזמן קצר נקבל את כל 92 הפתרונות.

דוגמא ב

מהו המספר הקטן ביותר של מלכות אשר ניתן להעמיד על לוח שחמט, כך שהן תאיימנה על כל משבצת בלוח?

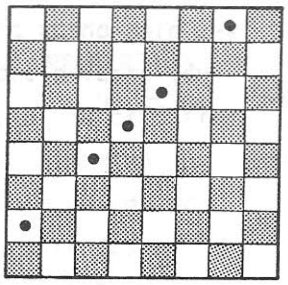
פתרון:

ננסה תחילה למצוא חסמים למספר המבוקש, N .

אם 8 מלכות עומדות על אלכסון ראשי של לוח שחמט, אזי כל משבצת של הלוח הינה תחת איום. אפשר להוריד את שתי המלכות הקיצוניות מן הלוח ועדיין כל משבצת תהיה תחת איום. לכן, מספר המלכות המבוקש אינו גדול מ-6 .

לא יתכן ש N = 1, 2, 3, 4 (הוכח!).

אך, כפי שמודגם בציור, ניתן למלא את התנאי שכל משבצת תהיה תחת איום, על-ידי העמדת 5 מלכות על הלוח.



דוגמא לפתרון בעיית 5 המלכות

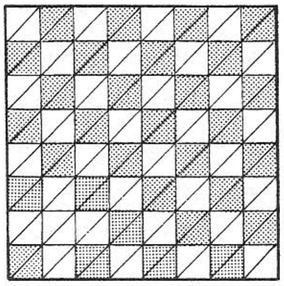
לבעיה זו ישנם 638 פתרונות שונים בסיסיים, שמהם ניתן ליצור עוד 4222 פתרונות, על-ידי שיקופים וסיבובים של הלוח.

מעניין לציין שקיים פתרון שבו אף מלכה אינה מאיימת על מלכה אחרת.

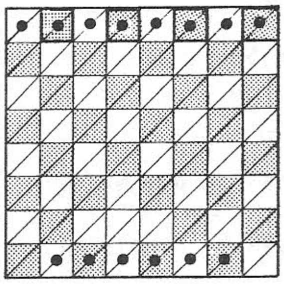
דוגמא ג

מהו המספר הגדול ביותר של רצים, אשר נוכל להציב על לוח שחמט כך שאף שניים מהם לא יאיימו זה על זה?

פתרון:



ישנם 15 אלכסונים מקבילים זה לזה כמתואר בציור. על כל אלכסון ניתן להציב, לכל היותר, רץ אחד. אי-אפשר להציב 15 רצים, שכן שני האלכסונים הקיצוניים (כל אחד מהם מורכב ממשבצת אחת) הם על אותו אלכסון ראשי. לכן, אפשר להציב רץ רק באחת משתי משבצות אלה.

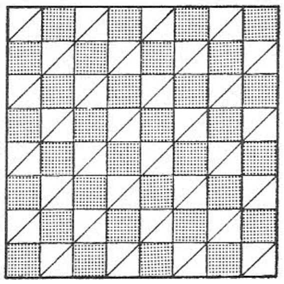


מכאן, המספר הגדול ביותר של רצים המקיימים את תנאי הבעיה הוא לכל היותר 14. מהציור נוכל לראות שהמספר הוא בדיוק 14.

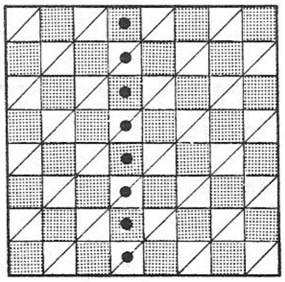
דוגמא ד

מהו המספר הקטן ביותר של רצים, אשר ניתן להציב על לוח שחמט כך שהם יאיימו על כל משבצת של הלוח?

פתרון:



על הלוח ישנם 8 אלכסונים לבנים מקבילים זה לזה (ראה הציור). אם נציב עליהם פחות מ-4 רצים, ישארו לפחות 5 אלכסונים לבנים ללא רצים. לפחות אחד מאלכסונים אלה כולל יותר מ-3 משבצות. רץ שאינו עומד על אלכסון מסויים, יכול לאיים רק על משבצת אחת של אלכסון זה. לכן, ישארו משבצות לבנות, אשר לא מאיים עליהן אף רץ. מכאן, מספר הרצים המוצבים על משבצות לבנות, חייב להיות לפחות 4.



באופן דומה, מספר הרצים המוצבים על משבצות שחורות, חייב להיות לפחות 4. כלומר, המספר הקטן ביותר של רצים הממלאים את הדרוש הוא לפחות 8.

מספר זה הוא מספיק, שכן 8 הרצים המוצבים באופן המודגם בציור מאיימים על כל משבצת של הלוח.

דוגמא ה

א) מהו המספר הגדול ביותר של צריחים שניתן להציב על לוח שחמט, כך שאף שניים מהם לא יאיימו זה על זה?

ב) בכמה אופנים שונים ניתן לעשות זאת?

פתרון:

א) i) בלוח שחמט ישנם 8 שורות ו-8 טורים. כדי שצריח לא יאיים על צריח אחר, אסור ששני צריחים יעמדו באותה השורה או באותו הטור. מכאן ברור שמספר הצריחים אינו יכול להיות גדול מ-8.

ii) ניתן להציב 8 צריחים על האלכסון הראשי, ואז הם אינם מאיימים זה על זה. מכאן, המספר הגדול ביותר שניתן להציב הוא 8.

ב) נציב צריח ראשון בטור I, צריח שני בטור II וכו'.
ניתן להציב את הצריח הראשון באחת מבין שמונה השורות, כלומר, יש 8 אפשרויות שונות להציבו. לצריח השני יש 7 אפשרויות שונות להצבתו. לכן, שני צריחים ניתן להציב ב- $8 \cdot 7$ דרכים. אם שניים כבר מוצבים, אזי לצריח השלישי יש רק 6 אפשרויות, ולשלושה: $8 \cdot 7 \cdot 6$ אפשרויות.

בשיקול דומה מגיעים לכך שישנן $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ אפשרויות, ובמלים אחרות, $8!$ אפשרויות.

דוגמא ו

א) מהו המספר הקטן ביותר של צריחים שאפשר להציב על לוח שחמט, כך שהם יוכלו לאיים על כל משבצת של הלוח?

ב) בכמה אופנים שונים אפשר לעשות זאת?

פתרון:

א) אם עומדים על הלוח פחות מ-8 צריחים, אזי ישנו לפחות טור אחד (ושורה אחת) עליו אין צריח. במקרה זה לא כל המשבצות נמצאות באיום.
8 צריחים מספיקים כדי לאיים על כל משבצות הלוח. נוכל, למשל, להציבם על האלכסון הראשי.

ב) כדי ש-8 צריחים, יאיימו על כל משבצת של הלוח, חייב להיות צריח אחד על כל טור (או על כל שורה).
מספר האפשרויות להעמיד צריח על טור הוא 8.

מיקום צריח על טור אחד, אינו תלוי במיקום שאר הצריחים על הטורים האחרים, ולכן מספר האפשרויות להעמיד 8 צריחים על 8 טורים הוא 8^8.

באופן דומה, נוכל להציב את 8 הצריחים על 8 השורות ב- 8^8 אופנים שונים.

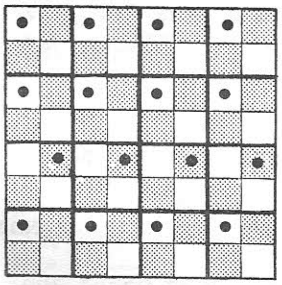
קיבלנו $2\cdot8^8$ אופנים שונים, אך ספרנו פעמיים את המצבים בהם על כל טור ושורה נמצא צריח אחד בלבד.

ישנם !8 מצבים כאלה, ולכן מספר האופנים שניתן להציב 8 צריחים כך שיאיימו על כל משבצות הלוח הוא: $2\cdot8^8 - 8! = 33514312$.

דוגמא ז

מהו המספר הגדול ביותר של מלכים אשר ניתן להציב על לוח שחמט, כך שאף אחד מהם לא יאיים על אחר?

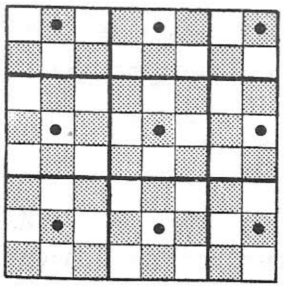
פתרון:



נחלק את לוח השחמט ל-16 חלקים - כל חלק הוא ריבוע 2×2. בכל אחד מהחלקים אפשר להציב מלך אחד בלבד, כך ששום שניים לא יאיימו זה על זה. מכאן, המספר הגדול ביותר של מלכים אינו גדול מ 16. כיוון שניתן להציב על לוח שחמט 16 מלכים, אשר אינם מאיימים זה על זה (כבציור), המספר המבוקש הוא 16.

דוגמא ח

מהו המספר הקטן ביותר של מלכים שניתן להציב על לוח שחמט, כך שהם יאיימו על כל המשבצות הפנויות של הלוח?



פתרון:

נחלק את הלוח ל-9 חלקים כמודגם בציור. בכל אחד מהחלקים ישנה משבצת שעליה יכולים לאיים רק מלכים הנמצאים באותו חלק. מכאן, כדי שכל משבצות הלוח תהיינה באיום, בכל אחד מ-9 החלקים צריך לעמוד לפחות מלך אחד. לכן המספר המבוקש הוא לפחות 9. כיוון שניתן להציב 9 מלכים כך שהם יאיימו על כל משבצות הלוח (ראה הציור), המספר המבוקש הוא 9.

בעיות שונות

נסה כוחך בפתרון הבעיות הבאות:

1. בכמה אופנים שונים ניתן להציב שני סוסים על לוח שחמט, כך שהם לא יוכלו לאיים זה על זה?

2. א) מצא סדרת מהלכים של צריח על לוח שחמט, כך שהצריח יעבור בכל אחת מ-64 המשבצות, בדיוק פעם אחת (ניתן להתחיל ממשבצת כלשהי).

   ב) מצא סדרת מהלכים של צריח על לוח שחמט, כך שהצריח יעבור בכל אחת מ-64 המשבצות בדיוק פעם אחת, ולבסוף יחזור למשבצת המוצא.

3. בפינה השמאלית התחתונה של לוח שחמט עומד סוס. האם יוכל להגיע לפינה הימנית העליונה, כך שבדרכו יעבור דרך כל משבצות הלוח, ובכל אחת מהן פעם אחת בלבד?

4. על 64 המשבצות של לוח שחמט רשומים מספרים טבעיים החל מ-1 (ראה הציור). שמונה צריחים עומדים על הלוח כך שאף אחד מהם אינו מאיים על אחר. מצא את סכום המספרים הרשומים במשבצות שעליהן עומדים הצריחים. האם הסכום שמצאת הוא יחיד?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

מעין סיכום

חלק גדול מהבעיות שעסקנו בהן הינן בעיות של "קיום". כלומר, היה עלינו לבדוק אם ניתן להציב כלים על לוח שחמט, כך שהם יקיימו תנאי מסוים. לעיתים קרובות, הפתרון התחלק לשני חלקים: ראשית, בדקנו מה תהיה צורת הפתרון - אם הוא קיים; ואחר-כך הראינו שאכן פתרון כזה קיים. הוכחת קיומו או אי-קיומו של פתרון, על-ידי בדיקת כל האפשרויות, הינה דרך מסורבלת וארוכה או לגמרי בלתי אפשרית. דרך אלגנטית להוכחה מתבססת, בדרך כלל, על מהלכי כלי השחמט וצבע המשבצות.

משפטי קיום במתמטיקה אלו משפטים הקובעים תנאים לקיומו של עצם מתמטי מסוים, או לקיומו של פתרון לבעיה.

לעיתים, במקביל לקביעת תנאים לקיומו של פתרון לבעיה, נקבעים גם תנאים המבטיחים את יחידות הפתרון.

דוגמאות:

א) כידוע, למשוואה $x^2 - 5 = 0$ אין פתרון בקבוצת המספרים הרציונליים, ולמשוואה $x^2 + 1 = 0$ אין פתרון בקבוצת המספרים הממשיים.
לשאלה, האם קיימת קבוצת מספרים שבה יהיה פתרון לכל משוואה מהצורה

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

(a_i מקדמים, n מספר טבעי)..

עונה המשפט:
לכל משוואה מהצורה *(1)* קיים לפחות פתרון (שורש) אחד בקבוצת המספרים המרוכבים.

ב) בבית הספר לומדים שלא לכל פונקציה קיימת פונקציה הפוכה. כמו כן, מוכיחים את המשפט: לכל פונקציה מונוטונית עולה (או יורדת) ממש, קיימת פונקציה הפוכה. משפט זה נקרא משפט הקיום של הפונקציה ההפוכה.

ישנן דוגמאות רבות נוספות למשפטי קיום חשובים במתמטיקה, העוסקים בקיומה של נגזרת לפונקציה, קיומו של אינטגרל מסוים, קיומו של פתרון למשוואה דיפרנציאלית ועוד.

כאשר מגדירים מושג חדש, מקובל להוכיח שקבוצת העצמים המתאימים למושג זה, אינה ריקה. לדוגמא, אחרי הגדרת המושג *פיאון משוכלל*, מוכיחים קיומם של 5 פאונים משוכללים שונים; ואחרי הגדרת המושג *מספרים טרנסצנדנטיים*, מוכיחים קיומם של מספרים אלה וכדי'.

נזכיר עוד, כי ההוכחות של משפטי קיום אינן תמיד פשוטות. לעיתים, מספיק לבנות דוגמא אחת (דרך זו נקראת דרך קונסטרוקטיבית), אך לעיתים יש לנקוט בדרכים אחרות.

ישנן בעיות קיום שאינן פתורות עדיין. דוגמא ידועה היא המשפט הגדול של פרמה (Pier Fermat 1601-1665) אשר טוען כי למשוואה $x^n + y^n = z^n$ אין פתרון במספרים טבעיים, כאשר n מספר טבעי גדול מ-2. עד היום לא הצליחו להוכיח או להפריך טענה זו, אלא ל-n-ים מסויימים.
(קומר, Kummer E.E. 1810-1893 הוכיח את הטענה יחד עם תלמידיו ל-n-ים בין 3 ל-100).

ספרות

1. Martin Gardner, Mathematical puzzels and diversions.
London
Bell and Sons.

2. Martin Gardner, New mathematical diversions from scientific american.
New York, Simon and Schuster, 1966.

3. Martin Gardner, The unexpected hanging and other mathematical diversions.
New York, Simon and Schuster, 1969.

4. А.М. Яглом и И.М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении.
Москва, 1954.

5. Квант, 8,9,10 - 1971.