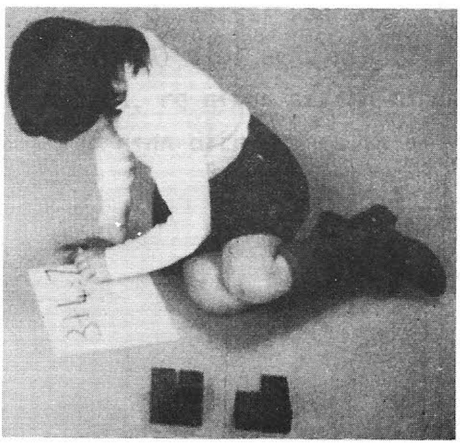
# מתמטיקה מתקדמת מנקודת מבט בסיסית: פונקציות, פעולות ומודלים

מאת: מקסים ברוקהיימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

הסימפוניה השישית של בטהובן (Beethoven) נכתבה כיצירה לתזמורת גדולה ומורכבת, אך נוכל לזהות את הנושאים העיקריים גם אם פסנתרן אחד ינגנה. אם הפסנתרן הוא מוזיקאי טוב, הוא יוכל בנגינתו להעביר אלינו לא רק את הנעימה, כי אם גם את המבנה והרוח העיקריים של היצירה.
גם בתחומים אחרים, בהם מופיעים מצבים מורכבים, אנו יכולים (ולפעמים רוצים או מוכרחים) להעביר אותם למצבים פשוטים יותר, המשמרים את המבנה הבסיסי. לימוד המודל הפשוט יכול הרבה פעמים לתרום להבנת המצב המורכב. במאמר זה נתרכז בלימוד סוג מודל ספציפי מאוד, המופיע בתחומים שונים של המתמטיקה, מהגן ועד האוניברסיטה.

דוגמא: ילדה צעירה מאוד נתבקשה למצוא את המספר הכולל של אבני בניה המונחות על הריצפה בשתי ערימות קטנות.
היא צירפה את שתי הערימות לערימה אחת ומנתה.

ילדה מבוגרת יותר שנתבקשה לבצע אותה מטלה, מנתה את אבני הבניה בכל ערימה בנפרד, וחיברה את התוצאות.



בכתיב מתמטי, הפעילות של שתי הילדות נראית כך:
כאשר A ו B הן שתי הערימות ו $n(A)$ , $n(B)$ מייצגים את מספר אבני הבניה ב A וב B בהתאמה, נוכל לומר שהילדה הצעירה יותר השתמשה בסכימה:

$$A,B \rightarrow A \cup B \longrightarrow n(A \cup B)$$

בעוד שהילדה המבוגרת יותר השתמשה בסכימה:

$$A,B \longrightarrow n(A)\ ,n(B) \longrightarrow n(A) + n(B)$$

שתי הילדות תקבלנה תוצאה זהה (אם ספרו נכון), שכן, במקרה זה:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

ניתן לתאר את שתי השיטות בדיאגרמה הבאה:

ילדה מבוגרת יותר

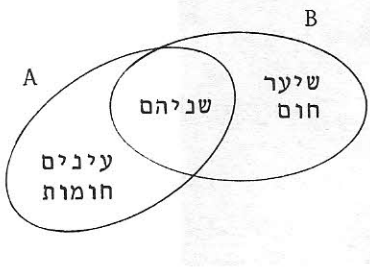
$$\begin{tikzcd}
A\ ,B \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\cup"'] & n(A)\ ,\ n(B) \arrow[d, "+"] \\
A \cup B \arrow[r, "n"'] & n(A \cup B) = n(A) + n(B)
\end{tikzcd}$$

ילדה צעירה

שים לב כי n היא פונקציה המעתיקה קבוצה כלשהי של קבוצות אל קבוצת המספרים השלמים הלא-שליליים. איחוד הוא פעולה בינארית על התחום של n וחיבור הוא פעולה בינארית על הטווח.

הילדה הצעירה מבצעת תחילה את הפעולה הבינארית על התחום ואחר כך מוצאת את התמונה המתקבלת על ידי הפונקציה, בעוד שהילדה המבוגרת יותר, מפעילה תחילה את הפונקציה ואחר כך מבצעת את הפעולה הבינארית על התמונות בטווח.

ידוע כי השוויון $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, איננו נכון באופן כללי. לכן, אילו נתבקשו אותן שתי ילדות למצוא את מספר הילדים בכיתה שעיניהם חומות (A) ו/או שערם חום (B), אזי, בהנחה שכל ילדה היתה משתמשת בשיטתה הקודמת, רק הילדה הצעירה היתה מקבלת את התשובה הנכונה. הילדה המבוגרת יותר היתה מונה פעמיים את הילדים שצבע עיניהם וגם צבע שערם הוא חום.



ניתן לתאר זאת בעזרת הדיאגרמה הבאה:

ילדה מבוגרת יותר

$$\begin{tikzcd}
A, B \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\text{ילדה צעירה}\ \cup"'] & n(A)\ ,\ n(B) \arrow[d, "?"] \\
A \cup B \arrow[r, "n"'] & n(A \cup B)\ =
\end{tikzcd}$$

כנראה שלא קיימת פעולה בינארית $\square$ , המקיימת:

$$n(A \cup B) = n(A) \,\square\, n(B)$$

יש לשים לב לכך שלמרות שאנו יודעים כי:

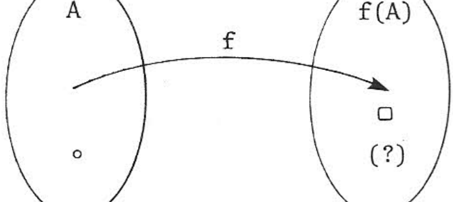
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

אזי האגף הימני אינו מגדיר פעולה בינארית $\square$ בין $n(A)$ ו $n(B)$ .

## בנית מודלים צעד א'

המתואר לעיל הינו דוגמא פשוטה מאוד אך מדויקת למצב המתאים לבנית מודל - תופעה המצויה במתמטיקה עיונית ושימושית כאחד.

קיים מצב אשר בו נתונה קבוצה $A$, פעולה בינארית (סגורה) $\circ$ על $A$ ופונקציה שתחומה $A$. הבעיה היא למצוא פעולה בינארית $\square$ על $f(A)$ שתשמש מודל של $\circ$ על $A$, כאשר ב"מודל" כוונתנו היא שביצוע $\square$ ב-$f(A)$ יתאים לביצוע $\circ$ ב-$A$.



ליתר דיוק, פירושו שאם $a_1,\ a_2 \in A$ אזי $a_1 \circ a_2$ ב- A יתאים ל- $f(a_1) \square f(a_2)$ ב-$f(A)$, כלומר:

$$f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) \square f(a_2)$$

ובדיאגרמה ניתן להציג זאת כך:

$$\begin{tikzcd}
a_1,\ a_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\circ"'] & f(a_1)\ ,\ f(a_2) \arrow[d, "\square"] \\
a_1 \circ a_2 \arrow[r, "f"'] & f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) \square f(a_2)
\end{tikzcd}$$

במתכוון ניסחנו את המצב המתאים לבנית מודל בצורת בעיה:

| |
|---|
| נתונים A , $\circ$ ו f . יש למצוא $\square$ (אם קיימת) כך ש- A, $\circ$ , f , $\square$ יהוו מצב המתאים לבניית מודל. |

**דוגמא:**

נתבונן בפונקצית הערך המוחלט:

$$f : x \longrightarrow |x| \qquad , \qquad x \in R$$

שקבוצת התמונות שלה היא $R_o^+$ - קבוצת המספרים הממשיים הלא שליליים.

ישנם סוגים שונים של פעולות בינאריות על R, אנו נחפש את "פעולות המודל" המתאימות להן ב- $R_o^+$ .

א) מהו המודל של $(R, \times)$?

נשתמש בדיאגרמה שלנו ונראה עד היכן נוכל להגיע.

$$\begin{tikzcd}
x,\ y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\times"'] & |x|\ ,\ |y| \arrow[d, "(?)"] \\
x \times y \arrow[r, "f"'] & |x \times y| =
\end{tikzcd}$$

מאחר וקיים $|x \times y| = |x| \times |y|$, נוכל להשלים את הדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] |x| , |y| \arrow[d, "\times"] \\ |x \times y| = |x| \times |y| \end{tikzcd}$$

ו-$(R_o^+, \times)$ הוא מודל של $(R, \times)$.

ב) מהו המודל של $(R, +)$?

כמו קודם ננסה להשלים את הדיאגרמה.

$$\begin{tikzcd} x, y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "+"'] & |x| , |y| \arrow[d, "(?)"] \\ x + y \arrow[r, "f"'] & |x + y| = \end{tikzcd}$$

לשם השלמת המודל עלינו למצוא צירוף בינארי של $|x|$ ו $|y|$ אשר ישווה ל- $|x + y|$.

(השגיאה הנפוצה בין תלמידים: $|x + y| = |x| + |y|$, היא דוגמא ל"פתרון" שגוי לבעיה שלנו.) הבעיה תיפתר, לכאורה, אם נגדיר פעולה $\square$ כך ש:

$$|x| \square |y| = |x + y|$$

ואולם נתבונן בשתי הדוגמאות:

$$\begin{tikzcd} -2,3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "+"'] & 2 , 3 \arrow[d, "\square"] \\ 1 \arrow[r, "f"'] & 1 = 2 \square 3 \end{tikzcd}$$

מכאן, מסתבר כי $2 \square 3 = 1$.

$$\begin{tikzcd} 2,3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "+"'] & 2 , 3 \arrow[d, "\square"] \\ 5 \arrow[r, "f"'] & 5 = 2 \square 3 \end{tikzcd}$$

מכאן, מסתבר כי $2 \square 3 = 5$.

אך שניהם יחד לא יתכנו: לפעולה בינרית צריכה להיות תוצאה אחת ויחידה, וכאן יש שתיים. הגענו, איפוא, למסקנה שלא קיימת $\square$ בעבור פונקצית הערך המוחלט, שתהיה "מודל" של החיבור.

## בנית מודלים – צעד ב'

הבעיה הכללית שלנו, של בניית מודלים, נוסחה קודם באופן הבא:

| |
|---|
| נתונים $A$, $\circ$ ו $f$. יש למצוא $\square$ (אם קיימת) כך ש-$A$, $\circ$, $f$, $\square$ יהוו מצב המתאים לבניית מודל. |

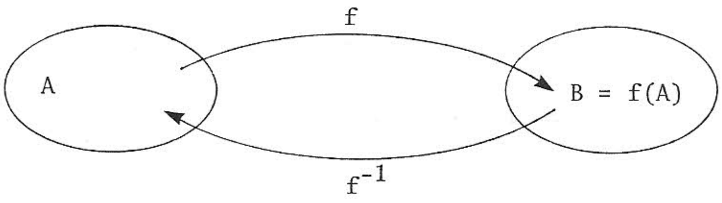
בדוגמה הקודמת לא היתה קיימת $\square$ מתאימה - בהמשך ננסה למצוא מהם התנאים לקיום $\square$. אם אכן קיימת $\square$, אזי הגדרתה נובעת מתנאי המודל:

$$f(a_1) \;\square\; f(a_2) = f(a_1 \circ a_2)$$

הבעיה בהגדרה זו מתגלה כאשר אנו רוצים לבצע את $\square$. האיברים ב-$f(A)$ אינם נתונים בצורה $f(a_1)$ ו $f(a_2)$, אלא בצורה $b_1$, $b_2$, כאשר $b_1, b_2 \in f(A)$.
איך נגדיר, אם כך, $b_1 \square b_2$ ?

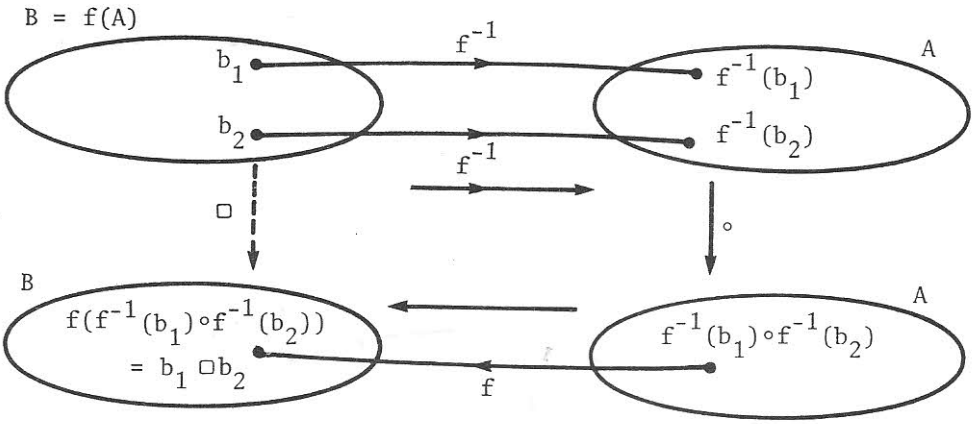
אם $f$ היא חד-חד ערכית, הבעיה איננה קשה. פשוט נמצא את $a_1$ ו $a_2$ המתאימים ל-$b_1$ ו $b_2$ על ידי $f^{-1}$ שהיא הפונקציה ההפוכה של $f$:

$$f^{-1}(b_2) = a_2 \quad \text{-ו} \quad f^{-1}(b_1) = a_1$$




ואז, במקום: $\quad f(a_1) \;\square\; f(a_2) = f(a_1 \circ a_2)$

נקבל: $\quad b_1 \square b_2 = f\left(f^{-1}(b_1) \circ f^{-1}(b_2)\right)$




חלק מהבעיה נפתר, איפוא, באופן תאורטי: בכל מקרה ש $f$ היא חד-חד ערכית, מתקיימים מצב המתאים לבניית מודל, ונוכל להגדיר $\square$ על-ידי שימוש בדיאגרמת המודל בכיוון הפוך.

**דוגמא:**

$$f : x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

$$\text{(i)} \qquad (R_{-o}, +) \longrightarrow (R_{-o}, ?)$$

$$\text{(ii)} \qquad (R_{-o}, \times) \longrightarrow (R_{-o}, ?)$$

כאשר $R_{-o}$ היא קבוצת המספרים הממשיים ללא אפס.

הפונקציה היא חד-חד ערכית (כמו כן $f^{-1} = f$ במקרה זה), לכן אנו יודעים שקיימת פעולת מודל בשני המקרים והיא מוגדרת כך:

$$\text{(i)} \qquad x \;\square\; y = f^{-1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = f^{-1}\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \frac{xy}{x+y}$$

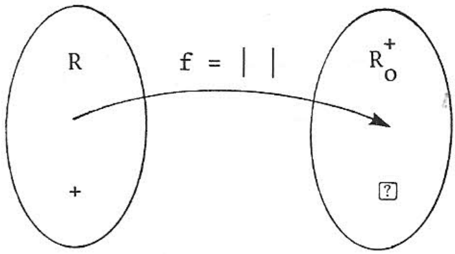
$$\text{(ii)} \qquad x \;\square\; y = f^{-1}\left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{y}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{xy}\right) = xy$$

במקרה השני, $\times = \square$ , וכמובן מוכר היטב, בעוד שבמקרה הראשון קיבלנו פעולה בינארית חדשה:

$$x \;\square\; y = \frac{xy}{x+y}$$

# בנית מודלים – צעד ג'

נותר לנו לדון במקרה ש f היא רב-חד ערכית, ולקבוע תנאי לקיום פעולת המודל. הבה נתבונן שוב בדוגמא 2, שבה לא הצלחנו להגדיר פעולת מודל המתאימה ל +:




כאשר נתונים שני איברים $x,y \in R_o^+$ , ברצוננו להגדיר $x \square y$ כך שיהיה מודל של + . לשם כך עלינו להשתמש ב-$f^{-1}$ על מנת לחזור ל-R, לבצע שם חיבור, ואז לשוב חזרה באמצעות f .

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y \\ -y \end{cases} \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} x \\ -x \end{cases}$$

לכן יש לנו ארבע אפשרויות בעבור $f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$:

$$x + y \ , \ -x + y \ , \ x - y \ , \ -x - y$$

ארבע אפשרויות אלו מצטמצמות לשתיים כאשר חוזרים ל- $R_o^+$; כלומר:

$$f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = \begin{cases} |x + y| \\ |x - y| \end{cases}$$

אך כדי שנוכל להגדיר $\square$ , עלינו לקבל תשובה יחידה בשלב זה. במלים אחרות, כדי לבנות מודל הולם למערכת $(R, +)$ על ידי הפונקציה הרב-חד ערכית f, הכרחי שהתמונה של סכום איברים נתונים תהיה שווה לתמונת הסכום של איברים שהם בעלי אותן תמונות כמו האיברים הנתונים.

באופן כללי, בעבור $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \in A$ אם $f(a_1) = f(a_2)$ ו $f(a_3) = f(a_4)$ אזי: $f(a_1 \circ a_3) = f(a_2 \circ a_4)$ .

<u>הערה:</u> ה-$a_i$ אינם צריכים להיות שונים: התוצאה חייבת להיות נכונה לכל $a_i$ עם התכונה הנ"ל .

## סיכום

לשם קיצור, נכניס מספר מונחים מתמטיים.

תהי $f$ פונקציה בעלת תחום $A$ וקבוצת תמונות $f(A) = B$ .

כמו כן, תהי $\circ$ פעולה בינארית (סגורה) על $A$. אזי נאמר כי $f$ ו $\circ$ *משתוות* (compatible) זו עם זו, אם לכל $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ המקיימים:

$$f(a_1) = f(a_2) \quad , \quad f(a_3) = f(a_4)$$

קיים גם:

$$f(a_1 \circ a_3) = f(a_2 \circ a_4)$$

כאשר $f$ ו $\circ$ משתוות, נוכל להגדיר פעולה בינארית $\square$ על $B$ באופן הבא:

$$b_1 \,\square\, b_2 = f(a_1 \circ a_2)$$

כאשר $a_1$ ו $a_2$ הם שני איברים כלשהם של $A$ המקיימים:

$$f(a_1) = b_1 \quad \text{ו-} \quad f(a_2) = b_2$$

כלומר, במקרה ש $f$ ו $\circ$ משתוות ואנו מגדירים $\square$ באופן זה - תנאי המודל שלנו מתמלא ו $\square$ , $f$, $\circ$, $A$ הינו מצב מתאים לבניית מודל. $\square$ נקראת <u>הפעולה הבינארית המושרית</u> (induced). במילים אחרות, $(B , \square)$ הוא מודל של $(A, \circ)$ בעבור הפונקציה $f$ אם:

$$f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) \,\square\, f(a_2)$$

לכל $a_1, a_2 \in A$ .

הדיאגרמה המתאימה:

$$\begin{tikzcd}
a_1 , a_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\circ"'] & f(a_1) , f(a_2) \arrow[d, "\square"] \\
a_1 \circ a_2 \arrow[r, "f"'] & f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) \,\square\, f(a_2)
\end{tikzcd}$$

נקראת <u>דיאגרמה קומוטטיבית</u>, שכן ניתן ללכת בה בשתי דרכים מהקצה השמאלי העליון לקצה הימני התחתון. הפונקציה $f$ נקראת <u>מורפיזם</u> (morphism) או הומומורפיזם (homqmorphism) של $(A , \circ)$ על $(B, \square)$.

## דוגמאות

מורפיזמים שזורים במתמטיקה, החל מבית הספר היסודי ועד למחקר מתקדם. קיומם או אי-קיומם מהווה גורם מרכזי בתיאוריות רבות. בסעיף זה נביא דוגמאות רבות מהמתמטיקה של בית הספר, מלוות בהערות במידת הצורך, נשאיר את מרבית הדוגמאות לחקירה עצמית של הקורא, כדי שיגלה אם תנאי ההשתוות מתקיימים - ואם כן, מהי הפעולה הבינארית המושרית.

1. א) הדוגמא הראשונה שנתנו בתחילת המאמר היתה:

$A =$ קבוצה של קבוצות חלקיות של קבוצה $U$ (סופית).

$f = n$ , כאשר $n$ מתאימה לקבוצה נתונה את מספר האיברים שלה.

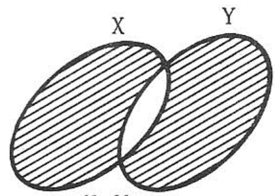
$\circ = \cup$

(בדרך כלל, תנאי ההשתוות אינו מתקיים, מלבד במקרה שהקבוצות הן זרות, כמו בבעיית הספירה, שם אנו משתמשים בתכונת המורפיזם).

ב) כנ"ל עם $\circ = \cap$.

ג) כנ"ל כאשר $X \circ Y$ מוגדר כהפרש הסימטרי של $X$ ו $Y$: $X \cup Y - X \cap Y$.

כלומר:




$X \circ Y$

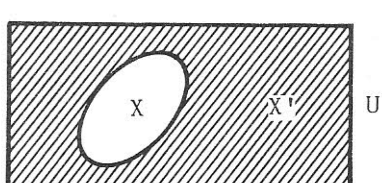
ד) כנ"ל כאשר $X \circ Y$ מוגדר כ- $Z = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

(במקרה זה, תנאי ההשתוות מתקיים ו $\square$ מתאים לכפל.)

<u>הערה</u>: דוגמאות א) ו ד) מהוות בסיס להגדרות של חיבור וכפל בקבוצת המספרים הטבעיים, כפי שהן מובאות בספרות העוסקת ביסודות המתמטיקה.

2. א) $A =$ קבוצה של קבוצות חלקיות של קבוצה $U$.

$f(X) = X'$, כאשר $X'$ הוא המשלים של $X$ ב $U$ , כלומר:




$\circ = \cup$

ב) כנ"ל עם $\circ = \cap$

הערה: שתי דוגמאות אלו נותנות מורפיזמים; $f$ היא פונקציה חד-חד ערכית המוכרת כמשלים, משוואות המודל המתאימות מוכרות בתורת הקבוצות כחוקי דה-מורגן (De Morgan's laws).

3. א) $A$ = קבוצה של קבוצות חלקיות של קבוצה $U$ ,
$f(x) = K \cap X$ , כאשר $K$ היא קבוצה חלקית קבועה של $U$ .
$\circ = \cup$

ב) כנ"ל עם $\circ = \cap$

ג) כנ"ל עם $f(X) = K \cup X$ , כאשר $K$ היא קבוצה חלקית קבועה של $U$ ,
ו $\circ = \cap$.

הערה: משוואות המודל בדוגמאות א) ו-ג) ניתנות לפירוש כחוקי הפילוג המתאימים. למעשה, ניתן למצוא מורפיזם בכל מקום בו מופיע חוק הפילוג. לדוגמא, בקבוצת המספרים הממשיים:

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

ניתן לפירוש כ:

$$f : x \longrightarrow ax$$

$$\circ = +$$

והדיאגרמה המתאימה:

$$\begin{tikzcd}
x, y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "+"'] & ax , ay \arrow[d, "\square"] \\
x + y \arrow[r, "f"'] & a(x + y) = ax \square ay = ax + ay
\end{tikzcd}$$

4. א) $A = R$ , קבוצת המספרים הממשיים.
$f(x) = a + x$, כאשר $a \in R$ קבוע.
$\circ = +$

הערה: מאחר ו $f$ היא חד-חד ערכית, ברור מאליו, שתנאי ההשתוות מתקיים. במקרים כאלה, עיקר הענין הוא ב"זיהוי" הפעולה הבינארית המושרית. היא "מוגדרת" על-ידי:

$$(a + x) \square (a + y) = a + (x + y)$$

אך האיברים של קבוצת התמונות $f(R) = R$ אינם מופיעים בצורה $a + x$, אלא כאיברים של R. במילים אחרות, כאשר נתונים $z \in R$, w, אזי:

$$w \square z = ?$$

ניתן תמיד למצוא את הפתרון לבעיה זו על ידי שימוש בדיאגרמה הקומוטטיבית "בכיוון הפוך", כלומר, מהקצה הימני-העליון לקצה הימני-התחתון.

ב) כנ"ל, אבל עם $\circ = \times$

ג) $A = R$

$f(x) = ax$, כאשר $a \in R$ קבוע.

$\circ = +$

(ראה הערה אחרי דוגמא 3.ג).

ד) כנ"ל, אבל עם $\circ = \times$.

ה) $A = R$

$f(x) = -x$

$\circ = +$

<u>הערה</u>: זהו מקרה מיוחד של חלק ג), המתאים לתכונה חשובה בחשבון אלמנטרי ובאלגברה.

5. א) $A =$ קבוצת כל המספרים הממשיים שאפשר להציגם כשבר עשרוני סופי.

$f(x) =$ מספר הספרות אחרי (מימין) הנקודה העשרונית.

$\circ = +$

ב) כנ"ל, אבל עם $\circ = \times$

<u>הערה</u>: שימו לב שהמורפיזם בחלק ב) הינו עזר חישובי בעל ערך רב.

6. א) $A = R$

$f(x) = a^x$, כאשר $a \in R^+$ הוא קבוע כלשהו $(a \neq 1)$.

$\circ = +$

ב) כנ"ל, אבל עם $\circ = \times$

הערה: המורפיזם בחלק א) מהווה יסוד לחלק גדול מהמתמטיקה, החל מבית הספר התיכון והלאה. למעשה, משתמשים לעיתים קרובות במשוואה $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ כדרישה המרכזית בהגדרה האכסיומטית של הפונקציה המעריכית. כיון שהפונקציה היא חד-חד ערכית, נקבל גם בחלק ב) מורפיזם, אך אין לו משמעות מתמטית מיוחדת.
הפונקציה ההפוכה של מורפיזם חד-חד ערכי היא תמיד מורפיזם; במקרה המובא בחלק א', זוהי, כמובן, הפונקציה הלוגריתמית.

7. א) $R_o^+ = A$

$x^2 = f(x)$

$+ = \circ$

ב) כנ"ל, אבל עם $\times = \circ$

(שימו לב! העובדה ש-$\circ$ ו $f$ אינן משתוות בחלק א), "מתאימה" לשגיאה הנפוצה בין תלמידים: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.)

ג) כמו בחלקים א) ו ב), אבל עם $f(x) = \sqrt{x}$ .

ד) כנ"ל, אבל עם $f(x) = x^n$ , $n$ קבוע כלשהו.

<u>הערה:</u> המורפיזמים בחלקים ב) ו ד) מהווים יסודות בפירוק לגורמים בחשבון ובאלגברה.

8. א) $A =$ קבוצת נתונים, או מספרים המייצגים קירובים.

$f(x) = e_x$ , השגיאה המוחלטת ב $x$; כלומר, $x = X + e$, כאשר $X$ הוא הערך האמיתי של $x$ .

$+ = \circ$

ב) כנ"ל, אבל עם $\times = \circ$

ג) $A$ כמו בחלק א)

$f(x) = r_x$ , השגיאה היחסית ב $x$; כלומר, $r_x = \frac{e_x}{x}$

$+ = \circ$

ד) כנ"ל, אבל עם $\times = \circ$

<u>הערה:</u> בחלק א) $f$ ו $\circ$ משתוות והמורפיזם המתקבל כתוצאה מכך, מהווה בסיס ל"חשבון שגיאות": השגיאה המוחלטת של הסכום שווה לסכום של השגיאות המוחלטות.

גם סעיף ד) הוא מעניין.

$$\begin{tikzcd} x, y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\times"'] & r_x , r_y \arrow[d] \\ x \times y \arrow[r, "f"'] & r_{xy} \end{tikzcd}$$

עתה נוכל למצוא את $r_{xy}$ מתוך החישובים שבחלק ב). שם יש לנו:

$$x \times y = (X + e_x)(Y + e_y)$$

$$= XY + e_xY + e_yX + e_xe_y$$

לכן: $$e_{xy} = e_xY + e_yX + e_xe_y$$

וכן: $$r_{xy} = \frac{e_x}{X} + \frac{e_y}{Y} + \frac{e_xe_y}{XY} = r_x + r_y + r_xr_y$$

כלומר, יש לנו השתוות, והפעולה הבינארית המושרית על קבוצת התמונות היא:

$$w \,\square\, z = w + z + wz$$

במציאות, כלומר, ב"חשבון שגיאות", משתמשים בתוצאה "מדויקת" זו לעיתים רחוקות. אם השגיאות (היחסיות) הן קטנות, אזי מכפלתן, בדרך כלל, קטנה מאוד וניתנת להזנחה ללא חשש. וכך, הפעולה המושרית בה משתמשים, בדרך כלל, היא פשוט חיבור: השגיאה היחסית של המכפלה היא סכום השגיאות היחסיות.

9. א) $N = A$, קבוצת המספרים הטבעיים.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{אם } x \text{ הוא זוגי} \\ -1, & \text{אם } x \text{ הוא אי-זוגי} \end{cases}$$

$$+ = \circ$$

ב) כנ"ל, אבל עם $\circ = \times$

(הצע הגדרה "טבעית" יותר בעבור f בחלק ב).)

10. א) $N = A$

$x \pmod n = f(x)$ , כאשר $n \in N$ קבוע כלשהו.

$+ = \circ$

ב) כנ"ל, אבל עם $\circ = \times$

11. א) $N = A$

$f(x) =$ קבוצת הגורמים הראשוניים של $x$, רשומים לפי הריבוי שלהם;

לדוגמא: $f(12) = \{2, 2, 3\}$ .

$\circ =$ הגורם המשותף הגדול ביותר.

ב) כנ"ל, אבל עם $\circ =$ הכפולה המשותפת הקטנה ביותר.

12. א) $A =$ תבניות פסוק שקבוצת הצבתן היא $R$ .

$f(x) =$ קבוצת האמת של $x$

$\circ =$ "וגם"

ב) כנ"ל, אבל עם $\circ =$ "או".

(בשני המקרים יש לנו השתוות. הפעולות הבינאריות המושרות הן $\cap$ ו $\cup$ , בהתאמה. מורפיזמים אלו הם, כמובן, חשובים ביותר בפתרון משוואות ואי-שוויונים וגרפים.)

13. א) $R = A$

$\sin x = f(x)$

$+ = \circ$

שימו לב: שגיאה נפוצה בין תלמידים היא $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$.

ב) כנ"ל, אבל עם $f(x) = \cos x$

ג) כנ"ל, אבל עם $f(x) = \operatorname{tg} x$

פונקצית הטנגנס משתווה עם פעולת החיבור, אך דרושה תשומת לב רבה בתחום $R$, בגלל בעיות ב- $\pm\frac{\pi}{2}$ וכדי'. הפעולה הבינארית המושרית איננה טריויאלית

$$x \,\square\, y = \frac{x + y}{1 - xy}$$

14. א) $A = \exists$ , קבוצת הפונקציות הגזירות

$f = D$ , פונקצית הנגזרת

$\circ = +$ , חיבור פונקציות

ב) כנ"ל, אבל $\circ = \times$

<u>הערה:</u> במקרה הראשון ניתן להחליף את D בכל פולינום של D , כמו למשל,

$$D^2 + 3D + 1$$

העובדה שפונקציות אלו הן כולן מורפיזמים, עם פעולה בינארית מושרית +, מהווה יסוד לתורת המשוואות הדיפרנציאליות הלינאריות.

(כמו בחלקים 13 א) ו-ב), כך גם בחלק 14 ב), היעדר השתוות מעיד כי אם קיימת נוסחא בעבור תמונת הצירוף, אזי היא תהיה מורכבת יותר מאשר סתם צירוף של התמונות. בדבר זה, כשלעצמו, ניתן להשתמש כדי לעורר ענין בחיפוש אחר נוסחא כזו.)

15. קורא יקר, ישנן דוגמאות רבות נוספות. נסה למצוא כמה מהן.

# סיכום

המושג של בניית מודלים מהווה יסוד בפעילויות אינטלקטואליות אנושיות רבות. הסיבות לבניית מודלים הן שונות - המודל נבחר בדרך כלל משום היותו פשוט, או מוכר יותר מאשר המקור. המושג הכללי של מודל לובש צורות שונות, אך ברשימה זו נתנו לו מובן מסוים ביותר: קבוצה עם פעולה בינארית הינה מבנה והפונקציה מעתיקה מבנה זה על קבוצת התמונות - כדי שהעתק יהיה מודל, דרשנו שתוצאת הפעולה הבינארית בתחום, תשתקף בתוצאת הפעלתה של פעולה בינארית (מושרית) כלשהי בקבוצת התמונות. למודל זה, למרות פשטותו הרבה, ישנם שימושים רבים - החל מהפשוט שבהם כעזר בחישובים או כמספק נוסחא שימושית בפתרון בעיות, ועד לתורה מקיפה שטרם עסקנו בה כאן.

מספר הדוגמאות למורפיזמים הינו אינסופי - אנו רק נגענו בחלק מהם המצויים במתמטיקה בסיסית - ככל שנתקדם הלאה, תלך ותגבר החשיבות של רעיון המורפיזם. כמו כן, לא נגענו בתחום המתמטיקה השימושית. ריבוי הדוגמאות לבדו, דיו לשכנע בחשיבות הרעיון. כיון שפונקציה ופעולה בינארית מטופלים כיום בפירוש בתוכנית הלימודים, אין סיבה שמורפיזם ורעיונות הקשורים אליו לא ינוצלו, אם כי לא בצורה מפורשת, כדי לתת לתוכנית הלימודים יותר אחידות, וכן יהוו בסיס לאלו שימשיכו לעסוק במתמטיקה. המושג של בניית מודלים והדיאגרמה הקומוטטיבית כפי שהוצגו בסעיף בניית מודלים - צעד א', ניתנים לפיתוח בקלות כאשר משתמשים בהם בדוגמאות רבות. ההגדרות המדויקות, במיוחד זו של השתוות, כפי שמובאת בסיכום של הסעיף בניית מודלים - צעד ג', שייכות לשלב שני ומתקדם יותר.

הדגש היה אומנם, בצדק, על קיומם של מורפיזמים. אך אי-קיומם של מורפיזמים (כלומר, כאשר הפונקציה והפעולה הבינארית אינן משתוות), יכול לשמש, באופן דידקטי, כהנעה לחיפוש נוסחא מסובכת יותר.