מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולר

חוברת לתלמיד

מס' 3

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע- רחובות

© מכון ויצמן למדע

ריבועים שלמים

הצגתי לפני תלמידי את הבעיה הבאה:

לפניכם עשרה מספרים, שרק שניים מהם הם ריבועים שלמים.

1. 562541

2. 592952

3. 654483

4. 669124

5. 703925

6. 715714

7. 769127

8. 842828

9. 870489

10. 864800

איך ברשותנו מחשב, לוחות שורשים וכו'.

מצאו, בדרך יעילה, מיהם שני המספרים שהם ריבועים שלמים.

בבעיה זו ובבעיות אחרות הקשורות לריבועים שלמים, נעסוק בחוברת זו.

ב ה צ ל ח ה!

המחבר

שבט, תשמ"ב

פתרון הבעיה שהוצגה בעמוד הקודם:

ראשית, נוכל לנפות מספרים שאינם ריבועים שלמים, על-פי ספרת היחידות שלהם. אם ספרת היחידות היא 2, 3, 7 או 8 - המספר איננו ריבוע שלם (מדוע?)
אחרי ניפוי ראשוני זה, נותרו 6 מספרים העשויים להיות ריבועים שלמים:
864800 , 870489 , 715714 , 703925 , 669124 , 562541 .

נחפש דרך נוספת לניפוי מספרים שאינם ריבועים שלמים.

בחר כמה מספרים שהם ריבועים שלמים, ובדוק מהי השארית המתקבלת כאשר חלקים ריבוע שלם ב 9.
באופן כללי, כל מספר טבעי ניתן להציג בעזרת התבנית $9a + k$, כאשר a ו k מספרים שלמים לא שליליים ו $0 \le k \le 8$.
לדוגמא: $100 = 9 \cdot 11 + 1 \quad (k = 1 \ , \ a = 11)$
לכן, כל ריבוע שלם ניתן להציג בעזרת התבנית $(9a + k)^2$, כאשר a ו k מספרים שלמים לא שליליים ו $0 \le k \le 8$.

נפתח את הסוגריים: $(9a + k)^2 = 81a^2 + 18ak + k^2$

שני המחוברים הראשונים מתחלקים ב 9. לכן, השאריות של חילוק ב 9 של ריבועים שלמים מתקבלות מהמחובר השלישי.

לא קשה לבדוק שאם k הוא ריבוע שלם ו $0 \le k \le 8$, אזי השארית המתקבלת מחלוקת k^2 ב 9, היא 0, 1, 4 או 7. אלו גם השאריות המתקבלות מחילוק ב 9 של ריבועים שלמים.

קיבלנו, אם כן, דרך חדשה לניפוי מספרים שאינם ריבועים שלמים: לחלק את המספר הנתון ב 9; אם השארית היא 2, 3, 5, 6 או 8 - אזי המספר <u>איננו</u> ריבוע שלם.

שיטה זו, של בדיקת שאריות בחילוק ל 9, איננה מסובכת. אך ישנה שיטה שקולה לה, קלה יותר לביצוע. שיטה זו מתבססת על סכום הספרות הסופי של מספר.
סכום הספרות הסופי של מספר, הינו המספר בן ספרה אחת המתקבל על-ידי חיבור חוזר של ספרות המספר. לדוגמא: סכום הספרות הסופי של 157389 הוא 6 כי

$$1 + 5 + 7 + 3 + 8 + 9 = 33 \quad , \quad 3 + 3 = 6$$

מה הקשר בין שאריות בחילוק ל 9 לבין סכום ספרות סופי של מספר?
הבה נבדוק. נבחר כדוגמא את 18534.
השארית של חילוק 18534 ב 9 היא 3, וגם סכום הספרות הסופי של 18534
הוא 3: $1 + 8 + 5 + 3 + 4 = 21$

$$2 + 1 = 3$$

ובאופן כללי, *השארית של מספר בחילוק ב 9, שווה לסכום הספרות הסופי של המספר.*

נסביר כלל זה בעזרת הדוגמא:

$$10 = 1 \cdot 9 + 1$$

$$100 = 1 \cdot 99 + 1 = 11 \cdot 9 + 1$$

$$1000 = 1 \cdot 999 + 1 = 111 \cdot 9 + 1$$

$$10000 = 1 \cdot 9999 + 1 = 1111 \cdot 9 + 1$$

וכו'

לכן: $18534 = 1 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4$

$$= 1(1111 \cdot 9+1) + 8(111 \cdot 9+1) + 5(11 \cdot 9+1) + 3(1 \cdot 9+1) + 4$$

$$= 1 \cdot 1111 \cdot 9 + \underline{1} + 8 \cdot 111 \cdot 9 + \underline{8} + 5 \cdot 11 \cdot 9 + \underline{5} + 3 \cdot 1 \cdot 9 + \underline{3} + \underline{4}$$

כל הכפולות של 9 מתחלקות ב 9. לכן, השארית של חלוקת המספר 18534 ב 9, שווה לשארית המתקבלת מחלוקת סכום ספרותיו: $1 + 8 + 5 + 3 + 4 = 21$, ב 9.

נבצע שוב אותו תהליך:

$$21 = 2 \cdot 10 + 1 = 2(1 \cdot 9 + 1) + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 9 + \underline{2} + \underline{1}$$

השארית של חלוקת 18534 ב 9, תהיה אותה שארית המתקבלת בחלוקת סכום הספרו[illegible]
$3 = 1 + 2$ ב 9. כיוון שהפעם קיבלנו מספר בן ספרה אחת - זוהי השארית.

באותו אופן, ניתן להוכיח את הכלל הנ"ל למספר כלשהו.

כיוון שהשארית בחילוק ב 9 שווה לסכום הספרות הסופי של המספר, נקבל שאם סכום הספרות הסופי של מספר הוא 2, 3, 5, 6 או 8 - אזי המספר <u>איננו</u> ריבוע שלם.

נערוך ניפוי לפי שיטה זו:

562541: $5 + 6 + 2 + 5 + 4 + 1 = 23 \ , \ 2 + 3 = 5$

אינו ריבוע שלם.

669124: $6 + 6 + 9 + 1 + 2 + 4 = 28 \ , \ 2 + 8 = 10 \ , \ 1 + 0 = 1$

יכול להיות ריבוע שלם.

703925: $7 + 0 + 3 + 9 + 2 + 5 = 26 \ , \ 2 + 6 = 8$

אינו ריבוע שלם.

715714: $7 + 1 + 5 + 7 + 1 + 4 = 25 \ , \ 2 + 5 = 7$

יכול להיות ריבוע שלם.

870489: $8 + 7 + 0 + 4 + 8 + 9 = 36 \ , \ 3 + 6 = 9$

יכול להיות ריבוע שלם.

864800: $8 + 6 + 4 + 8 + 0 + 0 = 26 \ , \ 2 + 6 = 8$

אינו ריבוע שלם.

נותרו שלושה מספרים העשויים להיות ריבועים שלמים:

669124 , 715714 , 870489

עתה, עלינו למצוא אילו מספרים מבין השלושה הם ריבועים שלמים. נעשה זאת על-ידי חיפוש ובדיקת קיום שורשים שלמים.

אנו נדגים כאן רק אחת השיטות, אך ניתן לבצע זאת בדרכים שונות.

i) 669124: זהו מספר בן 6 ספרות. נניח יש לו שורש שלם, אזי השורש שלו הוא בן 3 ספרות. כיוון ששתי הספרות הראשונות הן ...66, אזי ספרת המאות של השורש היא 8.
ספרת היחידות של המספר הנתון היא 4, לכן ספרת היחידות של השורש היא 2 או 8.

לכן, אם קיים שורש שלם ל 669124, הוא אחד המספרים 8i2 או 8i8, כאשר $i = 0,1,...,9$.
כדי לצמצם למינימום את מספר הבדיקות, נבחר בכל פעם את המספר האמצעי מתוך המספרים היכולים לשמש כשורשים במרווח נתון.

נבדוק את המספר האמצעי בין 802 ו 898 (יש שניים, אזי נבחר אחד מהם): 852. $852^2 = 725904$, כלומר 852 גדול מהשורש.

נבדוק שוב מספר אמצעי, הפעם בין 802 ו 848: 828.
$828^2 = 685564$, כלומר גם 628 גדול מהשורש.

בשלב הבא נבדוק מספר אמצעי בין 802 ל 822: 812.

$812^2 = 659344$, כלומר 812 קטן מהשורש.

האפשרויות לקיום השורש הצטמצמו למספרים: 818, 822. נבדוק את 818:

$818^2 = 669124$, כלומר 818 הוא השורש המבוקש. מכאן, 969124 הוא ריבוע שלם.

בבדיקת המספר הבא נקצר בהסברים:

ii) <u>715714</u>: אם יש שורש שלם הוא בן 3 ספרות. ספרת המאות שלו היא 8, וספרת היחידות - 2 או 8.

מבדיקת המספר הקודם, אנו יודעים כי 852 גדול מהשורש (בהנחה שקיים), שכן $852^2 = 725904$; ואילו 828 קטן מהשורש, שכן $828^2 = 685564$.

נבדוק אם 842 הינו השורש. $842^2 = 708964$, ולכן קטן מהשורש.

נשאר לבדוק את 848: $848^2 = 719104$.

כיוון שאין מספר טבעי אחר היכול לשמש כשורש של 715714, אין למספר זה שורש שלם.

עתה נבדוק את המספר האחרון מבין השלושה:

iii) <u>870489</u>: אם יש שורש שלם הוא בן 3 ספרות. ספרת המאות שלו היא 9, וספרת היחידות - 3.

$953^2 = 908209$, לכן 953 גדול מהשורש (בהנחה שקיים).

$933^2 = 870489$, ולכן 933 הוא השורש של 870489. מכאן, 870489 הינו ריבוע שלם.

לסיכום, מבין עשרת המספרים שהוצגו בתחילה: 669124 ו 870489 הינם ריבועים שלמים.

לפניכם אוסף של בעיות הקשורות לנושא של **ריבוע שלם**.

בעיה 1

ידוע כי אם ספרת היחידות של מספר טבעי N היא 5, אזי ספרת היחידות של N^2 גם היא 5. מהי ספרת העשרות של 65^2, של 145^2? האם תמיד ספרת העשרות של N^2 (כאשר N הוא מספר טבעי שספרת יחידותיו 5) היא 2? הוכח תשובתך.

בעיה 2

ריבוע שלם מורכב מהספרות הבאות: 5, 3, 2, 0. מהו המספר?

בעיה 3

האם המספר $\overline{abab}$ (מספר בן 4 ספרות, שבו ספרת האלפים וספרת העשרות היא a; ספרת המאות וספרת היחידות היא b) יכול להיות ריבוע שלם?

בעיה 4

האם המספר $\overline{abcabc}$ יכול להיות ריבוע שלם?

בעיה 5

האם יתכן שמכפלה של מספר טבעי ומספר הגדול ממנו ב 2, תהיה ריבוע שלם?

בעיה 6

נסה למצוא a שלם כך ש $5a^2 + 10$ יהיה ריבוע שלם.

בעיה 7

האם ניתן למצוא חמישה מספרים עוקבים, שסכום ריבועיהם הוא ריבוע שלם?

בעיה 8

האם המספר $3a + 2$ (a מספר טבעי) יכול להיות ריבוע שלם?

בעיה 9

האם !50 הינו ריבוע שלם?

(!50 פרושו $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot48\cdot49\cdot50$)

בעיה 10

נתון: $\overline{1a5}^2 \cdot 9 = \overline{1b9025}$

מצא את הערכים המספריים של a ו b .

בעיה 11

במרובע קמור העבירו את האלכסונים. שטחי ארבעת המשולשים שהתקבלו מבוטאים במספרים שלמים.

האם מכפלת ארבעת המספרים יכולה להיות מספר המסתיים בספרות 1982?

בעיה 12

בדקנו ומצאנו כי:

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 1 = 1^2$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$$

האם ניתן להכליל זאת? כלומר, האם תוספת של 1 למכפלה של ארבעת מספרים עוקבים כלשהם, נותנת תמיד ריבוע שלם? הוכח!

בעיה 13

פתור את המשוואה: $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + x! = y^2$

כאשר $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ו x, y הם מספרים טבעיים.

מצא את כל הפתרונות!

בעיה 14

צרף מימין למספר 400 מספר בן 4 ספרות, כך שתקבל מספר בן 7 ספרות שהוא ריבוע שלם. מצא את כל האפשרויות.

בעיה 15

מצא ריבוע שלם בן 4 ספרות, אשר אם נחסר מספרת האלפים שלו 3, ונוסיף 3 לספרת יחידותיו - נקבל שוב ריבוע שלם.