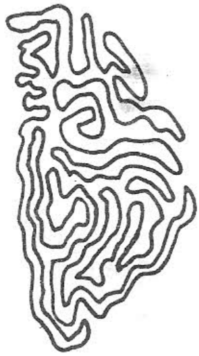
בעיות לא פתורות בגיאומטריה*

מאת: לין ארתור סטין

תרגום: רוחמה אבן

שרבט עקומה כלשהי על דף נייר במשיכת עפרון אחת, כך שהעקומה לא תחתוך את עצמה, והסיום יהיה בנקודת הראשית. עתה, נסה למצוא על העקומה ארבע נקודות המהוות קודקודים של ריבוע.

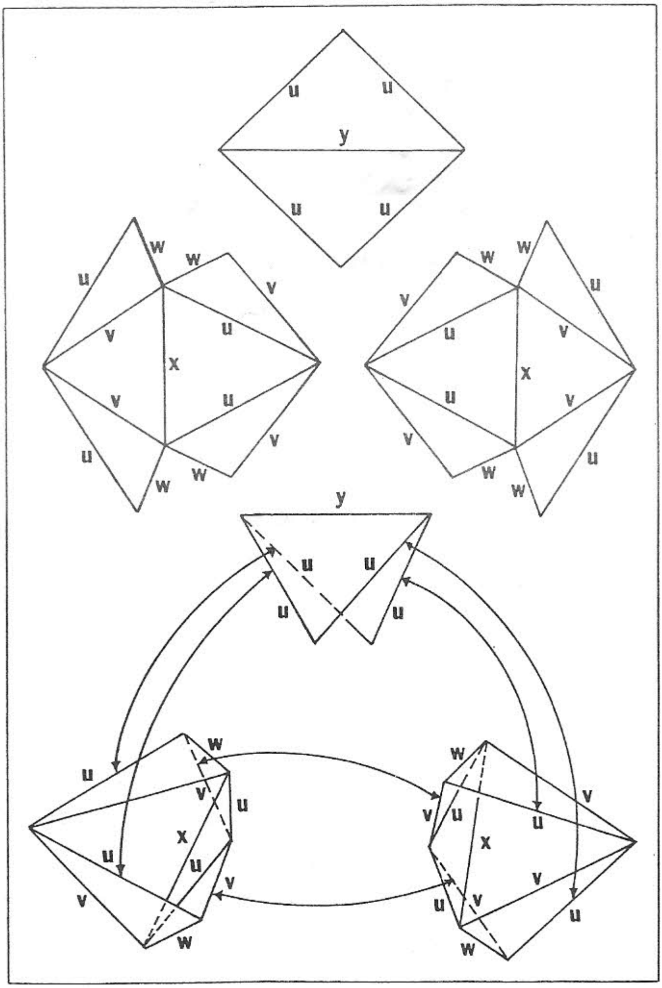


בעיה זו בהנדסת המישור נראית קצת קשה יותר, אך איננה שונה באופן מהותי מבעיות ה"בניה" הידועות שבהן עוסקים בשעורי גיאומטריה בתיכון: "נתון מעגל במישור, בנה ריבוע החסום בו".
הבעיה הנ"ל לא נפתרה: עדיין לא הצליחו להוכיח שכל עקומה סגורה מכילה את הקודקודים של ריבוע. מסתבר שגיאומטריה, למרות התדמית שלה כנושא עתיק שכבר אין מה לחדש בו, מכילה בעיות שטרם נפתרו ועדיין נחקרות גם כיום. לחלקן נמצאו פתרונות לאחרונה.
המפורסמת ביותר מבין הבעיות בגיאומטריה אשר לא נפתרו זמן רב, היא השערת ארבעת הצבעים, הטוענת שכל מפה ניתן לצבוע בלא יותר מ-4 צבעים, כך שאיזורים סמוכים צבועים בצבעים שונים. השערה זו, אשר נוסחה ב-1852, נפתרה לראשונה ב-1976 בעזרת מחשב, על-ידי קנת אפל (Kenneth Appel) וולפגנג הקן (Wolfgang Haken) מאוניברסיטת אילינוי (Science News :7/31/76, p. 71).
לאחרונה נפתרה בעיה גיאומטרית נוספת שהועלתה בראשית המאה ה-19. בעיה זו נפתרה על-ידי מתן דוגמא נגדית ולא על-ידי הוכחה.

---

* This article is taken with permission from Science News, Vol. 115, No. 25, June 1979.

רוברט קונלי (Robert Konnelly) מאוניברסיטת קורנל הראה בשנה שעברה שמשהו אשר למעלה מ-150 שנה חשבו כי הוא נכון, למעשה איננו נכון: הטענה היא שכל משטח פיאוני סגור במרחב התלת-מימדי הוא קשיח. כיפה גאודזית כדורית מושלמת היא דוגמא פשוטה לסוג זה של משטח. למרות שכיפות גאודזיות כדוריות הן קשיחות (כיוון שהן קמורות), קונלי הצליח לבנות מ-18 משולשים קשיחים משטח סגור שאינו קשיח. במשך הזמן, הוכן משטח פשוט יותר (ראה השרטוט) כך שניתן לבנות בקלות מודל מתאים מקרטון.



הוראות לבנית צורה סגורה, לא קמורה, המורכבת כולה ממשולשים ואינה קשיחה:
התחל משתי צורות שטוחות דמוית פרפר, שכל אחת מהן מורכבת משמשה משולשים.
(אורך הצלעות אינו קבוע, אך נוח לבחור אורכים פרופורציונליים לאורכים
הבאים: $u = 12$, $v = 10$, $w = 5$, $x = 11$, $y = 17$).
דחוף את הדשים העליונים של הפרפר השמאלי אחורה, והדבק יחד את הצלעות
המסומנות ב-w; חזור על כך לגבי הדשים התחתונים של הפרפר הימני.
עכשיו דחוף את הדשים התחתונים של הפרפר השמאלי והדשים העליונים של הפרפר
הימני קדימה, והדבק יחד את הצלעות המתאימות המסומנות ב-w.
חבר את הצלעות העליונות המסומנות ב-v, של שני הפרפרים, זו לזו, ובאופן
דומה את התחתונות. באופן כזה נוצרה צורה מעוקמת, חסומה על ידי ארבע
צלעות מסומנות ב-u. סגור את הפתח החסום על ידי צלעות אלו בעזרת המעוין
המקופל שארבע צלעותיו מסומנות ב-u, כמתואר בשרטוט.
במשטח הסגור שהתקבל, תוכל להניע קלות את הקודקוד המשותף לשני הפרפרים -
נקודת המפגש של ארבע צלעות באורך u. (ראה הערת מערכת בסוף המאמר).

הדוגמה הנגדית של קונלי ל"השערת הקשיחות" מפתיעה באופן מיוחד, שכן היתה מאוד בלתי צפויה. במשך מאות שנים, מהנדסים האמינו שמבנים משולשיים הם קשיחים, ואף מתמטיקאי לא הכחיש זאת. עתה, כל תלמיד בית-ספר יכול לבנות משטח משולשי סגור פשוט שאינו קשיח. כמובן שדוגמאות מסוימות אלה אינן מוכיחות שכל מבנה מצולעי אינו קשיח: הנפוצים, כולל אלה שמשתמשים בהם בבנינים ובגשרים, כמובן קשיחים.

אך דוגמאות אלה של פאונים לא קשיחים מראות שהאמון שלנו בקשיחות של מבנים צריך להתבסס על קריטריונים מורכבים יותר מאשר אמונות פשוטות בעבר.

אין זה בלתי רגיל שהשכל הישר יוביל להבלים, במיוחד כשהוא נקרע בין הדרישות האסתטיות של סימטריה והדרישות השכליות של הלוגיקה. אמנם סימטריה ולוגיקה נמצאות בדרך כלל בהרמוניה, אך לעיתים קרובות הן יוצרות צלילים צורמים. אפילו המוזיקה של הכדורים מופרעת לעיתים על-ידי צלילים מוזרים.

כדי לקבל הרמוניה אידיאלית, אנו צריכים להאזין רק לנקודות שעל המעגל. כאשר הן מסודרות ברווחים שווים על ההיקף, הנקודות יוצרות קודקודים של מצולע משוכלל: המיתרים המחברים 3 נקודות שהמרחק ביניהן שווה יוצרים משולש שו"צ, 4 יוצרים ריבוע, 5 - מחומש משוכלל וכו'. נקודות בסידורים רגולרים אלה נמצאות רחוק ככל האפשר זו מזו, כאשר כל מצולע המוגדר על-ידי סידור כזה הוא בעל השטח הגדול ביותר האפשרי לכל מצולע חסום בעל אותו מספר צלעות.

החסכון והסימטריה של מבנה זה הם יוצאים מהכלל: שטח מכסימלי, פיזור מכסימלי, וסימטריה מכסימלית - כולם מושגים על-ידי סידור נקודות ברווחים שווים על מעגל. זוהי תזכורת אלגנטית לביטוי של עדנה סט. וינסנט מיליי (Edna St. Vincent Millay): "Euclid alone has looked on Beauty bare". בשלושה מימדים, העיגול הופך לכדור והמצולעים המשוכללים הופכים לגופים הנקראים פאונים. לפאונים המשוכללים יש הרמוניה האופינית להם, מפגש עליז של אמת ויופי המתקיים בכבוד הדדי מאז תקופת היוונים. ישנם 5 פאונים משוכללים בלבד, הנקראים גופים אפלטונים והם: הטטראדר (4 פאות משולשות), הקוביה (6 פאות ריבועיות), האוקטאדר (8 פאות משולשות), הדודקאדר (12 פאות מחומשות), והאיקוסאדר (20 פאות משולשות).

הגירסה התלת-מימדית של בעיית השטח המכסימלי היא: איך יש לסדר n נקודות על-פני כדור, כדי ליצור פאון בעל נפח מכסימלי? יש צורך בארבע נקודות לפחות כדי לקבל גוף כלשהו, ובעבור 4 נקודות הנפח המכסימלי מתקבל על-ידי הגוף האפלטוני הראשון - הטטראדר. כמו כן, אם n הוא 6 או 12, נפח מכסימלי מתקבל בגופים האפלטוניים המתאימים - האוקטאדר (6 קודקודים, 8 פאות), או האיקוסאדר (12 קודקודים, 20 פאות). אבל, בעבור n = 8, ההרמוניה האפלטונית מתנגשת עם ההרמוניה של הכדור: הקוביה, שהיא הגוף האפלטוני המשוכלל בעל 8 קודקודים, <u>איננה</u> הגוף בעל נפח מכסימלי המתקבל מ-8 נקודות על פני הכדור. התצורה האופטימלית נתגלתה ב-1963 אחרי חיפוש ממוחשב רב היקף. גוף זה רחוק מאוד מלהיות משוכלל, יש לו 3 אורכי צלעות שונים. אך נפחו גדול ב 12% מנפח קוביה החסומה באותו כדור.

עתה אין זה מפתיע לגלות שהצורות הטובות ביותר המתאימות למספרים הלא-אפלטוניים (n = 5, 7, 9 וכו') הן לגמרי לא משוכללות. מעט מאוד ידוע על פתרונות כאשר n מגיע ל-10 או יותר. בלי שניתן לסמוך על סימטריה כעל מדריך אמין, המתמטיקאי בן זמננו נתון כמעט לגמרי לרחמי הכוח האכזרי של חישובים - מכשיר לא יעיל ולא אלגנטי.

בעיית הפיזור על הכדור מביכה באותה מידה. ל-n = 4, 6 או 12, הפתרונות הם הגופים האפלטוניים; לגבי ערכים אחרים של n, הפתרונות הם אחרים, ובדרך כלל <u>אינם</u> הפתרונות המתקבלים לגבי בעיית הנפח המכסימלי. שוב, פתרונות לגבי ערכים גדולים של n אינם ידועים כלל.

בעיות לא פתורות בגיאומטריה מהוות נושא של מאמר ארוך מאת ויקטור קלי, (Victor Klee) גיאומטראי מאוניברסיטת וושינגטון, אשר הופיע בגליון מאי 1979 ב-Mathematics Magazine. קלי דיווח על מצבן של כתריסר בעיות עיקריות בגיאומטרית המישור אשר נשארו לא פתורות במשך עשרות בשנים.

להלן חלק מהן:

- האם ניתן לחלק עיגול למספר סופי של חלקים (כמו בחידת הרכבה - פזל) ולהרכיבם מחדש כך שייצרו ריבוע?
- האם ניתן להגיע לכל נקודה על שולחן ביליארד מצולעי, מכל נקודה אחרת, על-ידי חבטה מתאימה (גם אם אולי ארוכה), כך שהכדור יפגע לפני כן לפחות פעם אחת בדופן השולחן?
- מהו המספר המינימלי של צבעים, שבעזרתם ניתן לצבוע את כל המישור האוקלידי, כך שלא תהיינה שתי נקודות הצבועות באותו צבע שהמרחק ביניהן הוא יחידה אחת?

יתכן שבעיות אלו, כמו השערת ארבעת הצבעים, ייפתרו רק על-ידי הוכחות מסובכות מאוד, או שהן ייכנעו למתקפה פשוטה מאוד. קלי דיווח על בעיה אחת שנשארה לא פתורה במשך כמעט 50 שנה, ועתה ידוע פתרון שלה ברמה של גיאומטריה לבי"ס תיכון:

<u>בעיה קשה</u>...

נניח כי S היא קבוצה סופית של נקודות במישור, לא כולן על קו ישר אחד. האם חייב להיות ישר שיכיל בדיוק שתי נקודות של S?

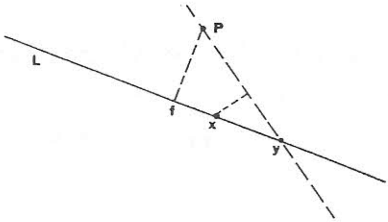
...<u>עם פתרון פשוט</u>

בעיה זו הוצגה קרוב לסוף המאה ה-19 על-ידי המתמטיקאי הבריטי סילבסטר (Joseph Sylvester) ונשארה לא פתורה למעלה מ-40 שנה: אחרי כמחצית המאה היא נראתה מסובכת בדיוק כמו בזמן שהיא הוצגה לראשונה. אבל אז למישהו היה רעיון חכם:

בחר נקודה מ-S, ושרטט ישר דרך שתי נקודות אחרות של S כך שהוא לא יעבור דרך הנקודה שנבחרה; מדוד את המרחק בין הנקודה שבחרת לישר ששרטטת. כיוון שיש מספר סופי של נקודות ב-S, יכול להיות רק מספר סופי של ישרים דרך שתי נקודות כלשהן של S.

חפש בין כל הנקודות והישרים האלה, את הזוג L, p אשר יוצר את המרחק הקטן ביותר בין הנקודה p והישר L. ישר זה, כפי שנראה, יכיל רק שתי נקודות של S.

נניח כי הישר L מכיל שלוש או יותר נקודות של S, אז שתיים מהן נמצאות מאותו הצד ביחס להיטל f של p על L.



אם x ו y הן שתי נקודות כאלה, ו x קרובה יותר ל f, אזי המרחק בין x והישר העובר דרך p ו y, יהיה קטן יותר מהמרחק בין p ו L.

אבל זה לא יתכן, שכֵּן המרחק בין p ו L הוא המינימלי מבין כל המרחקים בין נקודות וישרים ב S. לכן הישר L לא יכול להכיל שלוש או יותר נקודות של S: הוא יכיל, בהכרח, בדיוק שתי נקודות של S.

המטען העשיר של בעיות לא פתורות בגיאומטריה נובע מההיסטוריה הארוכה של נושא זה. היחס בין בעיות לא פתורות לפתורות במתמטיקה, לפי קלי, גדל ללא גבול: כל התקדמות יוצרת יותר בעיות מאשר היא פותרת, ולכן מבטיחה גידול כמעט אכספוננציאלי בבעיות לא פתורות, אפילו באלו הלקוחות מגיאומטריה אלמנטרית "קלסית".

הערכת המערכת

לפניכם צילום מודל מקרטון של הגוף שההוראות לבניתו ניתנו בעמ' 3. הקודקוד למעלה, המשותף לשני הפרפרים, יכול לנוע קלות ימינה ושמאלה כלפי הקודקודים הנוספים של הפרפרים.