השלכת מרקטור

מאת: אלי מאור

אוניברסיטת ויסקונסין, או-קלייר

מאמר זה מוקדש לזכרו של המורה לגיאורגרפיה משה הלמן ז"ל. היה זה הוא אשר עורר בי לראשונה את העניין בצדדים המתמטיים של הגיאורגרפיה, בעת היותי תלמיד גמנסיה "שלוה" בת"א בראשית שנות ה-50.

בשיעורי הגיאוגרפיה שלנו היתה תמיד תלויה על הקיר מפת העולם הגדולה, ובה האי גרינלנד הלבן עולה בגודלו על כל אמריקה הדרומית. דורות רבים של תלמידים התחבטו על מפה זו ועל דמות העולם המעוותת שהיא מציירת. מדוע, שאלו רבים את עצמם, נבחרה דוקא מפה מוזרה זו לייצג את כדור הארץ? שאלה זו אכן איננה חדשה, והיא הטרידה תלמידים ומורים כאחד במשך מאות שנים. אפילו בספרי לימוד רבים ניתן למצוא הערות ו"הסברים" מוטעים לגבי טיבה של מפה זו והעקרונות שעליהם היא מבוססת.

כדי להבין את הרקע למפה זו, עלינו להפליג אחרונית בזמן לתחילת המאה ה-15. התקופה היתה הרת מאורעות חשובים - בשנת 1492 גילה קולומבוס את "העולם החדש", ובאותה שנה עצמה ציוותה איזבלה מלכת ספרד על גרוש יהודי ספרד. שני מאורעות אלה נתנו את הטון לתחילתה של תקופה חדשה - הרחבה עצומה של אופקיו הגיאוגרפיים והמדעיים של האדם מצד אחד, ודיכוי פוליטי ודתי אכזרי מצד שני.

על רקע מאורעות אלה, נולד בפלנדרס (כיום בלגיה) בשנת 1512, אדם אשר עתיד היה להטביע את חותמו על עולם הגיאוגרפיה והניווט למשך דורות רבים. שמו המקורי היה גרהרד קרמר (Gerhard Kremer), ועוד בהיותו צעיר גילה עניין רב בתגליות הגיאוגרפיות החדשות. בהתאם למסורת שהיתה נהוגה אז, הוא שינה את שמו לשם בעל צליל לטיני יותר: גרהרד מרקטור (Mercator). בהיותו בן למשפחה פרוטסטנטית, נרדף על-ידי הכנסיה הקתולית ששלטה באזורו ונאלץ לברוח לגרמניה. שם קישר את התעניינותו במתמטיקה ובגיאוגרפיה והפך במהרה לעושה המפות הידוע ביותר בדורו. הוא היה הראשון שחיבר יחדיו אוסף גדול של מפות לצורת ספר, והוא שטבע את השם "אטלס" לאוסף כזה - שם שנשאר עד היום.

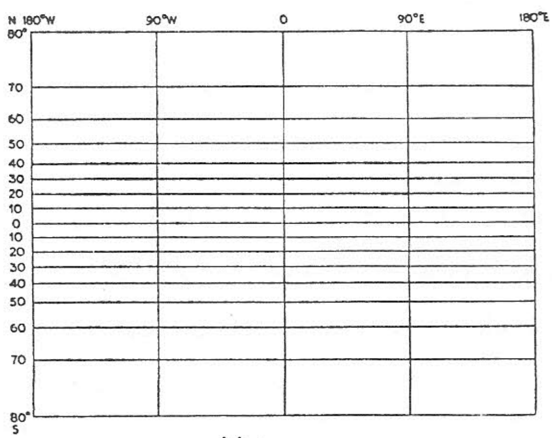
בשנת 1568 נגש מרקטור לפתור בעיה שהעסיקה את הספנים והנווטים מזה שנים רבות, ונחשבה לבעיה הגדולה ביותר בקרטוגרפיה (מדע המפות) שטרם נפתרה עד אז: כיצד לתכנן מפה שתראה עקום בעל כוון קבוע על פני כדור הארץ, כקו ישר.

פרישה של פני כדור הארץ על גבי מפה מישורית גורמת לעיוותים ולשינויים רציניים בצורת היבשות, במרחקים ובכיוונים בין נקודות שונות. אילו היתה לארץ צורת גליל, או חרוט, הבעיה לא היתה קיימת, כי את פני השטח של שני גופים אלו ניתן לפרוש על מישור ללא כל עיוותים. כמובן, הבעיה לא היתה קיימת גם אילו הארץ היתה שטוחה לגמרי, כפי שהאמינו רבים בימי קדם: במקרה כזה ההבדל היחידי בין הארץ למפה היה קנה-המידה שנבחר. ואמנם עבור הקדמונים, שכל עולמם היה מוגבל לים התיכון ולסביבתו, פני כדור הארץ לא היו שונים בהרבה ממישור שטוח, ומפה מישורית הספיקה בהחלט לצרכי הניווט המוגבלים שלהם. אבל כש"התרחבו" גבולות כדור הארץ והתגלתה צורתו האמיתית, נוצר הצורך למצוא שיטה שתמפה את הארץ על המישור תוך גרימת מינימום של עיוותים. כיום ידועות שיטות רבות של מיפוי, או "השלכות" (projections) - כל השלכה והתכונות המאפיינות אותה: יש השלכות המשמרות את השטח היחסי של ארצות (השלכות שוות-שטח), יש כאלה המשמרות את הכיוון הנכון בין שתי נקודות (השלכות קונפורמיות), וכן הלאה. אולם אף השלכה איננה יכולה לשמר את כל התכונות הללו בעת ובעונה אחת. השאלה איזו השלכה היא "הטובה ביותר", תלויה לחלוטין בתפקיד שהמפה אמורה למלא: מפה פוליטית חייבת להראות את המדינות השונות בפרופורציה נכונה לשטחן האמיתי, ולכן קרוב לודאי שתשתמש בהשלכה שוות-שטח. לעומת זאת, מפה לצרכי ניווט חייבת להראות את הכיוונים הנכונים בין נקודות שונות, ולכן חייבת להיות מפה קונפורמית. כן קיימות השלכות נוספות בהן משתמשים לצרכים מיוחדים.

הבעיה הגדולה שהעסיקה את מתכנני המפות בתחילת המאה ה-15 היתה: איזו השלכה תתאר עקום על פני כדור הארץ השומר על כיוון קבוע כלפי הצפון, כקו ישר על פני המפה? עקום כזה ידוע בשם לוקסודרומה (loxodrome); השם מורכב משתי המלים הלטיניות loxo = נטוי, ו- drome = ריצה, כלומר קו ש"רץ" בכיוון נטוי כלפי הצפון. השם הוצע ע"י הפיסיקאי ההולנדי וילברורד סנל (Willebrord Snell, 1581-1626), אשר שמו ידוע יותר מן החוק המפורסם באופטיקה. אולם טיבה האמיתי של הלוקסודרומה התגלה על ידי הפורטוגזי פדרו נונז (Pedro Nunes, 1492-1577), אשר היה הראשון שהכיר בכך שהלוקסודרומה המקשרת שתי נקודות על פני כדור הארץ איננה המרחק

הקצר ביותר ביניהן. המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות על פני כדור הארץ, נמדד לאורך המעגל הגדול המקשר בין שתי הנקודות. (מעגל גדול הוא כל מעגל על פני כדור הארץ, אשר מרכזו זהה למרכז הכדור; קו המשווה וכל קווי האורך הם מעגלים גדולים). הלוקסודרומה, לעומת זאת, היא ספירלה המקיפה את הקוטב הצפוני (או הדרומי) והולכת ומתקרבת, אך איננה מגיעה אליו אי פעם. פרוש הדבר הוא שאם ספן מנווט את ספינתו כך שהמסלול ישמור על כיוון קבוע של, נאמר, 30^{o} מזרחה מן הצפון (ולכן יחצה את כל קווי האורך בזוית זו), המסלול ילך ויתקרב אל הקוטב הצפוני ויקיף אותו אין סוף פעמים*. האם, שאלו עצמם מתכנני המפות, ניתן למצוא השלכה אשר תתאר עקום מסובך זה כקו ישר, כך שכל מה שעל הנווט יהיה לעשות הוא לחבר על-ידי קו ישר את נקודות המוצא והיעד של מסעו, למדוד את הכיוון שקו זה מתאר כלפי הצפון על המפה, ולשמור על כיוון זה בעזרת מצפן? הבעיה, אם כן, לא היתה אקדמית כלל ועיקר, אלא בעלת משמעות מעשית ביותר לעולם הספנות.

מרקטור הכיר בכך שאף אחת מן ההשלכות המקובלות, שכולן מבוססות על בניה גיאומטרית, לא תמלא אחרי דרישה זו. לפיכך ניגש לפתור את הבעיה בגישה שונה לחלוטין. ראשית, הוא החליט שבמפה העתידה קווי האורך יתוארו כקווים ישרים, אנכיים ומקבילים, כולם שווי-אורך ובמרחקים שווים זה מזה; קווי הרוחב יהיו קווים ישרים, אופקיים ומקבילים, בעלי אורך שווה (ציור מס' 1).



<u>ציור מס' 1</u> **

השאלה הבאה היתה, באילו מירווחים יש להעביר את קווי הרוחב. כאן נכנס התנאי המרכזי: אם המפה אמורה לשמור על הכיוון הנכון בין כל שתי נקודות

---

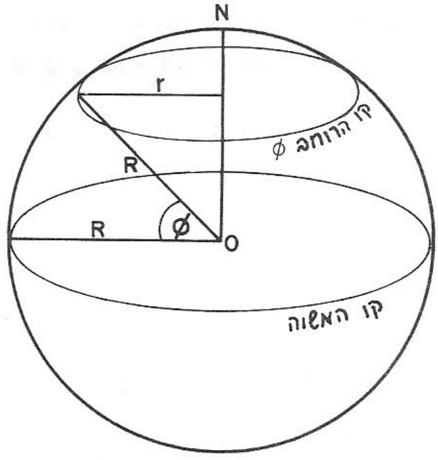
*הצייר ההולנדי אשר (M.C. Escher, 1898-1972) תאר עקום זה באחת מיצירותיו האמנותיות - Sphere Spirals, אותו ניתן למצוא ב-Collection Haags Gemeentmuseum.

**This picture is taken from <u>Map Projections</u>, by George P. Kellaway, and used by permission of the publisher Mathuen & Co., London.

על פני כדור הארץ, הרי כל "מתיחה" של המרחק בין שתי הנקודות בכיוון אופקי חייבת להיות מלווה במתיחה שווה בכיוון אנכי. מאחר וכל קווי הרוחב של המפה שווים באורכם לאורך קו המשווה, בעוד שבמציאות אורכם הולך וקטן ככל שמתקרבים לקטבים, הרי כל קו רוחב חייב להמתח בשיעור מסוים התלוי ברוחב הגיאוגרפי ϕ של קו הרוחב. היקפו של קו הרוחב הגיאוגרפי ϕ (ציור מס' 2) ניתן לחישוב באופן הבא:

$$2\pi r = 2\pi R\cdot\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = 2\pi R\cdot\cos\phi$$

R = רדיוס כדור הארץ.



<u>ציור מס' 2</u>

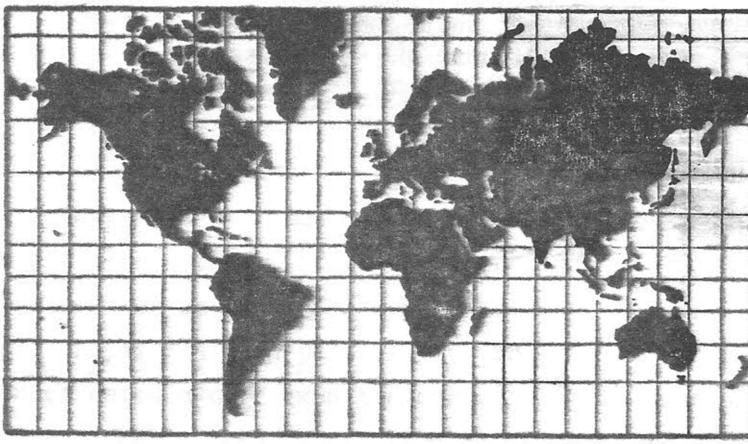
מאחר והיקפו של קו המשווה הוא $2\pi R$, כל קו רוחב על המפה נמתח ביחס של $\frac{2\pi R}{2\pi R\cos\phi}$ או $\frac{1}{\cos\phi}$ ביחס לאורכו המקורי. לפיכך, גם כל קו אורך חייב להמתח באותו שיעור. המרחק האמיתי (אורך הקשת) על פני כדור הארץ בין שני קווי הרוחב, ϕ ו-$(\phi + \Delta\phi)$, שווה ל-$R\cdot\Delta\phi$, כאשר הזוית מבוטאת ברדיאנים. לכן המרחק האנכי במפה Δy בין שני קווי רוחב אלה הוא:

$$\Delta y = \frac{R\Delta\phi}{\cos\phi} \qquad (1)$$

בימינו משוואה כזו נקראת "משוואה דיפרנציאלית", וניתן לפתור אותה בקלות יחסית בעזרת שיטות מהחשבון האינטגרלי (ראה נספח א'). אולם מרקטור לא יכול היה להשתמש בשיטות אלו, שכן הוא חי כמאה שנים לפני פיתוחו של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי על-ידי ניוטון ולייבניץ בשנות ה-60 של המאה ה-17. למרות זאת הצליח מרקטור "לפתור" את המשוואה באופן נומרי,

על-ידי חישוב הדרגתי של הקואורדינטה y של כל קו רוחב בעזרת הקואורדינטה y של קו הרוחב הקודם, החל בקו המשווה ($\phi = 0$). תהליך זה ידוע בשם "אינטגרציה נומרית" והוא מבוצע כיום בנקל ובמהירות על ידי מחשב, או

אפילו מחשבון. אבל גם אמצעי זה לא עמד לרשות מרקטור, ותהליך החישוב של הקואורדינטות y היה עבודה משימה ארוכה ומיגעת. (ראה נספח ב'). התוצאה היתה רשת הקואורדינטות המפורסמת המהווה את התשתית של מפת מרקטור (ציור מס' 3).



ציור מס' 3: השלכת מרקטור מקו רוחב $60°$ דרום, עד $78°$ צפון*

הדבר הבולט ביותר במפת מרקטור, והוא הנותן לה את המראה האופייני שלה, הוא העיוות ההולך וגדל של המרחקים בכיוונים צפון-דרום, כשמתקרבים אל הקטבים. דבר זה ניתן לראות כבר ממשוואה (1), שכן כאשר $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\cos\phi \rightarrow 0$ ולכן אגף ימין של המשוואה שואף לאינסוף, מה שמראה שהמירווחים Δy בין קווי הרוחב הולכים וגדלים מעבר לכל שיעור. מסיבה זו אין באפשרותה של מפת מרקטור להראות את אזורי הקטבים, ורוב המפות הקיימות מגיעות לרוחב של $70°$ צפונה ואף פחות מכך דרומה (כי חצי הכדור הדרומי מיושב פחות מן הצפוני).

הופעתה של מפת מרקטור בשנת 1569 התקבלה בהתלהבות מיידית על-ידי הנווטים ויורדי הים, שכן היא הקלה בשיעור עצום את תהליך הניווט בלב ים. זאת למרות שההסבר התיאורטי של המפה והעקרונות עליהם היא מבוססת, היו למעלה מהבנתם של אנשים רבים, ובתוכם אף מלומדים שלא שלטו בשפת המתמטיקה. יתירה מזאת, המפה זכתה לבקורת קטלנית דוקא מצד גיאוגרפים רבים אשר שללו אותה בשל הצורה המעוותת של כדור הארץ שהיא מציירת. כמובן שבקורת זאת היתה חסרת כל יסוד, שכן מרקטור מעולם לא התכוון ליצג את היבשות והארצות

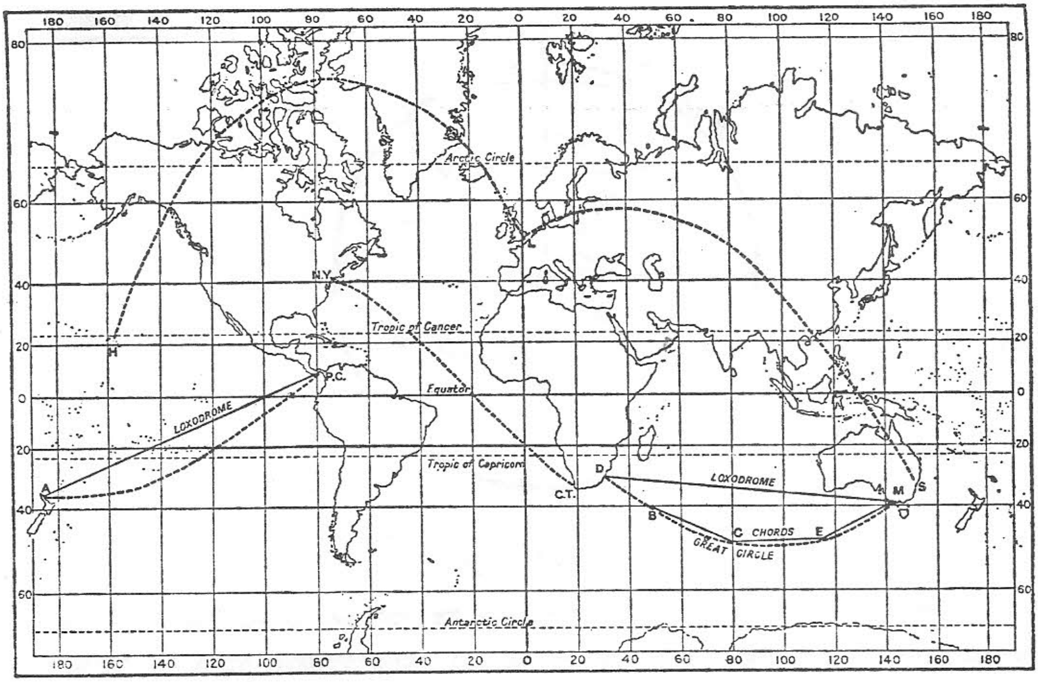
*This picture is taken from Elements of Map Projection by Charles H. Deetz and Oscar S. Adams, and used with the agreement of the reprint publisher, Greenwood Press, Inc.

בהתאם לצורתן האמיתית; מטרתו האחת והיחידה, כפי שראינו, היתה לתכנן מפה אשר תראה נכונה את הכיוונים בין הנקודות השונות על פני כדור הארץ. נקודה זאת גרמה לאי הבנות רבות בזמנו של מרקטור ואף שנים רבות לאחר מכן. אחד מבני דורו של מרקטור, אשר חרד לשמה הטוב של המפה ושל ממציאה, חיבר פזמון קטן על נושא זה:

Let none dare to attribute the shame
Of misuse of projections to Mercator's name;
But smother quite, and let infamy light
Upon those who do misuse,
Publish or recite.

הצורך לבאר את המפה לציבור הרחב, הביא לנסיונות שונים "להסבירה" בצורה אשר תובן גם על ידי אנשים חסרי השכלה מתמטית. נסיונות אלה הולידו את הרעיון - המוטעה - לתאר את המפה כהשלכה של פני כדור הארץ על גליל נייר העוטף אותו סביב קו המשווה: כל נקודה על פני הכדור "מושלכת" אל פני הנייר על ידי קו ישר ממרכז הכדור. נכון אומנם שבנייה כזאת מסבירה באופן איכותי את העיוותים ההולכים וגדלים כאשר מתקרבים אל הקטבים, אבל דבר אין לה עם השלכת מרקטור עצמה (מרקטור עצמו מעולם לא השתמש במושג הגליל העוטף). למרבה הצער, רעיון הגליל כה השתרש במוחם של הגיאוגרפים, עד כי אפילו כיום ניתן למצוא בספרי לימוד רבים את הקביעה, כי השלכת מרקטור היא "השלכה גלילית". האמת היא שהשלכת מרקטור איננה השלכה כלל (במובן הגיאומטרי של המלה). אי אפשר לקבל אותה בעזרת שום בנייה הנדסית, אלא אך ורק על ידי אנליזה מתמטית, כפי שראינו לעיל.

בקשר לכך כדאי להזכיר נקודה נוספת: המסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות על פני כדור הארץ איננו לאורך הלוקסודרומה המקשרת ביניהן, אלא לאורך קשת המעגל הגדול העובר דרכן. לכן עומדת בפני הנווט בעיה: האם לעקוב במסעו אחר קשת המעגל הגדול המחברת את נקודת מוצאו עם היעד - דבר אשר יקצר את זמן הנסיעה למינימום, אבל יחייב שינוי מתמיד בכיוון הנסיעה - או לעקוב אחר הלוקסודרומה ביניהן - דבר אשר יקל על הנווט, אבל יאריך את המסע. במציאות הפתרון הוא פשרה בין שתי אפשרויות אלו: קשת המעגל הגדול מחולקת למספר קטעים "ישרים" אשר כל אחד מהם הוא לוקסודרומה. דבר זה מחייב שינוי כיוון המסע מדי פעם (דבר שממילא מתחייב מן הצורה של היבשות והימים), כאשר המסלול הבסיסי הוא לאורך המעגל הגדול.
ציור מס' 4 מראה מספר נקודות על פני כדור הארץ במפת מרקטור: ההבדל בין קשתות המעגלים הגדולים המחברות זוגות של נקודות לבין הלוקסודרומות המתאימות, בולט ביותר.



ציור מס' 4: השלכת מרקטור; מעגלים גדולים; לוקסדרומות*

לסיום, מפת מרקטור, עם כל חסרונותיה (האמיתיים והמדומים), השפיעה השפעה עצומה על התפתחות הגיאוגרפיה והניווט, ולדעת חוקרים רבים היא מהווה את התרומה הבודדת הגדולה ביותר למדע הקרטוגרפיה מאז ומתמיד.

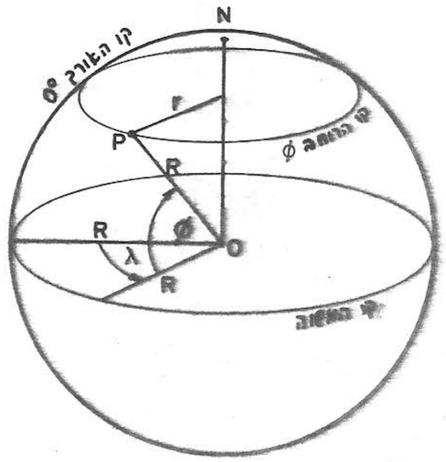
מקורות

1. Deetz, C. and Adams, O. *Elements of Map Projections,* Greenwood Press, New York, 1969.

2. Gardner, M. *On Map Projections (with Special Reference to some Inspired ones),* Scientific American, 283 (November 1975), pp.120-125.

* This picture is taken from An Introduction to the Study of Map Projections by J.A. Steers, and used by permission of the publisher, Hodder & Stoughton, formerly the University of London Press.

נספח א



<u>ציור מס' 5</u>

על מנת לקבל באופן אנליטי את הקואורדינטות (x, y) על המפה, של נקודה P (ציור 5) בעלת קואורדינטות (λ, ϕ) על פני כדור הארץ (ϕ - הרוחב הגיאוגרפי, λ - האורך הגיאוגרפי), בכתב את משוואה (1) כמשוואה דיפרנציאלית:

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{R}{\cos\phi} \qquad (2)$$

לכן:

$$y = R\int\frac{d\phi}{\cos\phi} \qquad (3)$$

אינטגרל זה ניתן לפתור על-ידי ההצבה $t = tg\,\frac{\phi}{2}$:

$$dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\phi}{2}}\,d\phi = \frac{1}{2}(1 + t^2)d\phi$$

מכאן:

$$d\phi = \frac{2dt}{1 + t^2}\ .$$

עתה:

$$\cos\phi = \cos^2\frac{\phi}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

אם כך:

$$y = R\int\frac{2dt}{1 - t^2} = R\,\ell n\,\frac{1 + t}{1 - t} + C$$

כלומר:

$$y = R\,\ell n\,tg\,(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}) + C \qquad (4)$$

(ℓn - הלוגריתם הטבעי ו-C הוא קבוע האינטגרציה).

מתוך התנאי $y = 0$ כאשר $\phi = 0$ (קו המשווה), מקבלים $C = 0$, לכן

$$y = R \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \qquad (5)$$

מאחר וקווי האורך הם במרווחים שווים זה מזה (קו האורך $\lambda = 0$ הוא קו האורך דרך גריניץ'), הרי הנוסחה לקואורדינטה x היא פשוט:

$$x = R\lambda \qquad (6)$$

אלו הן הקואורדינטות המבוקשות; כמובן שעדיין יש להכפילן בקנה המידה הדרוש. מ-*(5)* רואים כי כאשר $\phi \longrightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ (הקוטב הצפוני או הדרומי), הרי $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$ שואף ל- ∞ במקרה הראשון $\left(\phi \longrightarrow \frac{\pi}{2}\right)$, ול-0 במקרה השני $\left(\phi \longrightarrow -\frac{\pi}{2}\right)$; בשני המקרים הלוגריתם של ביטוי זה ישאף לאינסוף, מה שמסביר את העיוותים ההולכים וגדלים בכיוון האנכי כאשר מתקרבים לקטבים.

נספח ב'

כדי לפתור את משוואה *(1)* באופן נומרי, נחליט על הפרש קבוע $\Delta\phi$ בין כל שני קווי רוחב סמוכים. אם $y_1, y_2, \ldots$ מציינים את הקואורדינטות y של קווי רוחב אלה על המפה, אז ממשוואה *(1)* נקבל:

$$y_1 = y_o + \frac{R\Delta\phi}{\cos\phi_o}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{R\Delta\phi}{\cos\phi_1}$$

....

$$y_i = y_{i-1} + \frac{R\Delta\phi}{\cos\phi_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (7)$$

באופן כזה נוכל לחשב כל קואורדינטה y_i בעזרת הקואורדינטה y_{i-1} של קו הרוחב הקודם; y_o נקבע באופן שרירותי, ואנו נחליט $y_o = 0$. כמובן, ככל שההפרש $\Delta\phi$ קטן יותר, כן יהיה הדיוק בחישוב הקואורדינטות גדול יותר, אולם במחיר מספר רב יותר של חישובים.

טבלה מס' 1 מראה את הקואורדינטות y_i עבור הפרשים של 5^o (כלומר $\Delta\phi = 5^o = 5 \cdot \frac{2\pi}{360^o}$ radians) כפי שהן מחושבות ממשוואה *(7)**, וכן אותן

---

*החישובים בוצעו בעזרת מחשבון בר-תכנות.

הקואורדינטות כשהן מחושבות מנוסחה *(5)*. (לשם נוחיות בחרנו R = 100).
אנו רואים שעבור קווי-רוחב הקרובים לקו המשווה, החישוב המקורב זהה לחישוב המדוייק. אולם ככל שמתקרבים לקטבים, ההפרש בין שני החישובים הולך וגדל.

טבלה מס' 1

y_i ממשואה *(5)*	y_i ממשואה *(7)*	ϕ_i*
0	0	0^o
9	9	5^o
18	17	10^o
26	26	15^o
36	35	20^o
45	45	25^o
55	54	30^o
65	64	35^o
76	75	40^o
88	86	45^o
101	99	50^o
115	112	55^o
132	128	60^o
151	145	65^o
174	166	70^o
203	191	75^o
244	225	80^o
313	275	85^o
∞	375	90^o

---

* במשוואה *(7)* החישובים נעשים ברדיאנים.