"עקרון הערך הקיצוני" כעקרון היוריסטי בהתרת בעיות

מאת: א. אנגל*
תרגמה: אסתר הרמתי

בתהליך הפתרון של בעיות מתמטיות משתמשים, בדרך כלל, בעקרונות היוריסטיים כלליים. הכוונה לעקרונות שהם פשוטים למדי, אינם קשורים לנושא מסויים, אך ניתנים לשימוש בכל ענפי המתמטיקה. עקרון כזה הוא, למשל, "עקרון ערך הקיצוני". עקרון זה יכול, לעיתים קרובות, להאיר את הדרך לפתרון בעיה, אשר לפני כן לא נמצאה גישה אליה.
בבואנו להוכיח טענה על קבוצת איברים, מציע "עקרון הערך הקיצוני" להתבונן באיבר "קיצוני" של הקבוצה. אם קיימים מספר איברים כאלו, ניתן, בדרך כלל, לבחור באחד מהם.

במאמר נתרגל את השימוש בעיקרון זה בדוגמאות מתחום ההנדסה, תורת הגרפים, הקומבינטוריקה ותורת המספרים.

נזכיר תחילה שלוש עובדות ידועות:

א. בכל קבוצה של מספרים ממשיים A שהיא סופית ולא ריקה, קיימים איבר קטן ביותר - $\min A$ ואיבר גדול ביותר - $\max A$.

ב. כל קבוצה, לא ריקה, של מספרים טבעיים, כוללת איבר קטן ביותר. עקרון זה, הקרוי "עקרון הקבוצות הסדורות היטב", שקול לעקרון "האינדוקציה השלמה".

ג. בכל קבוצה של מספרים ממשיים A שהיא אינסופית ובעלת חסם מלעיל, קיים חסם עליון (חסם מלעיל קטן ביותר) - $\sup A$; וכן, אם A בעלת חסם מלרע, קיים חסם תחתון (חסם מלרע קטן ביותר) - $\inf A$.
אם $\sup A \in A$ אזי $\sup A = \max A$
ואם $\inf A \in A$ אזי $\inf A = \min A$

*מאמר זה הוא תרגום מגרמנית של:

Engel A. Das Extremalprinzip als heuristisches Prinzip beim Problemlosen, Der Mathematikunterricht, Vol. 25, No. 1, 1979.

דוגמא 1

א. לכמה חלקים לכל היותר מחלקים n ישרים כלשהם את המישור?

ב. לכמה חלקים לכל היותר מחלקים n מישורים כלשהם את המרחב?

פתרון:

נסמן את המספר הדרוש ב א) ו ב) ב e_n ו r_n בהתאמה.
פותר מתחיל יבחר בדרך של מעבר מ n ל $n + 1$, ויחפש בכמה יגדל מספר החלקים כאשר מוסיפים ל n ישרים (מישורים), ישר (מישור) נוסף. הוא יגיע בקלות אל הקשרים:

$$e_{n+1} = e_n + n + 1 \quad , \quad e_1 = 2$$

$$r_{n+1} = r_n + e_n \quad , \quad r_1 = 2$$

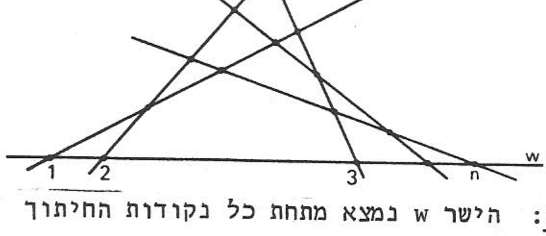
אין לשלול רעיון זה, שכן הוא בעל היקף גדול מאוד.

פותר בעיות בעל נסיון יפתור שאלות אלו בעל-פה:

א. עלינו לספור את חלקי המישור. עקרון יסוד של ספירת איברים הוא ספירה על-ידי התאמה חד-חד ערכית. לכן עלינו לשאול, האם נוכל להתאים את e_n חלקי המישור, באופן חד-חד ערכי, לאיברי קבוצה אחרת, כך שנוכל לספרם בקלות.

יש $\binom{n}{2}$ נקודות חיתוך של n הישרים. כל אחת מהן היא הנקודה הנמוכה ביותר של חלק אחד ורק אחד של המישור (עקרון הערך הקיצוני!). לכן קיימים $\binom{n}{2}$ חלקי מישור בעלי נקודה נמוכה ביותר. חלקי מישור שאינם בעלי נקודה נמוכה ביותר הינם בלתי-מוגבלים כלפי מטה. הם מחלקים ישר אופקי w (ישר-עזר שמוסיפים לשם ספירה) ל $n + 1$ חלקים (ראה שרטוט 1). ניתן להתאים את חלקי המישור שאינם מוגבלים מלמטה באופן חד-חד ערכי לחלקי ישר זה.

קיימים, איפוא, $n + 1$, או $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}$ חלקים בלי נקודה נמוכה ביותר. מכאן $e_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$.



שרטוט 1: הישר w נמצא מתחת כל נקודות החיתוך

ב. במרחב, כל פינה נוצרת על-ידי 3 מישורים. קיימות, איפוא, $\binom{n}{3}$ פינות וכל אחת היא נקודה נמוכה ביותר. כל חלק מרחב שאינו בעל נקודה נמוכה ביותר, חודר דרך מישור עזר אופקי (מישור הדף) ויוצר אחד מתוך e_n חלקי המישור (שרטוט מס' 1). לכן, מספר חלקי המרחב הוא:

$$r_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

<u>דוגמא 2</u> (המשך של דוגמא (1-ב).

נתון $n \geq 5$. הראה כי בין r_n חלקי המרחב קיימות לפחות $\frac{2n - 3}{4}$ פירמידות משולשות. (Kurschak-Wettbewerb, 1973).

פתרון:

במקרה זה חשוב שהתוצאה נתונה. אחרת הבעיה היתה קשה מדי במסגרת תחרות בזמן קצוב. בעזרת התוצאה נמצא את הדרך לפתרון.

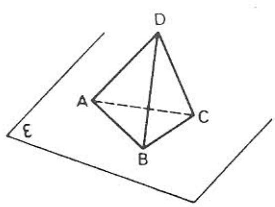
נסמן ב t_n את מספר הפירמידות המשולשות מבין r_n חלקי המרחב.

יש להראות כי: $t_n \geq \frac{2n - 3}{4}$.

המונה, $2n - 3$, מוליך להשערה כי על כל מישור עומדות לפחות שתי פירמידות משולשות. אך יתכן שעל 3 מתוך המישורים עומדת רק פירמידה משולשת אחת.

המכנה, 4, מוליך להשערה כי כל פירמידה מופיעה בספירה זו ארבע פעמים (פעם אחת לכל פאה). לכן יש לחלק ב 4 .

אחרי הבנת רמזים אלו, ההוכחה עצמה הינה בעיה טכנית בלבד. נסמן ב ε מישור כלשהו מבין n המישורים. הוא מחלק את המרחב לשני חלקים פתוחים H_1 ו H_2 . לפחות אחד משני החלקים כולל פינות. נניח כי זה H_1 .
נבחר ב H_1 פינה D הנמצאת במרחק מינימלי מ ε (עקרון הערך הקיצוני!).
הפינה D נוצרת על-ידי המישורים ε_1, ε_2, ε_3 . אזי המישורים ε_1, ε_2, ε_3, ε יוצרים פירמידה משולשת T = ABCD (שרטוט 2). אף אחד מבין שאר n-4

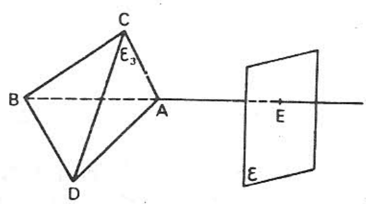


<u>שרטוט 2</u>

המישורים איננו חותך את T, מכיוון שאילו מישור 'ε היה חותך את T, הוא היה חותך לפחות אחד המקצועות הצדדיים $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ או $\overline{CD}$ בנקודה Q. מרחק Q מן המישור ε היה אז קטן ממרחק הנקודה D מ ε, דבר שסותר את בחירת D. לכן, T היא אחד מחלקי המרחב שיוצרים n המישורים.

סקירה זו נכונה עבור כל אחד מ n המישורים. אם קיימות פינות משני צידי מישור, יעמדו על אותו מישור לפחות שתי פירמידות משולשות. נשאר להראות כי מבין כל המישורים, קיימים לכל היותר שלושה, כך שכל הפינות נמצאות מצד אחד של המישור. נוכיח זאת בדרך השלילה.

נניח קיימים ארבעה מישורים כאלו: ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 . הם יוצרים ביניהם פירמידה משולשת (שרטוט 3). נתון $n \geq 5$ ולכן קיים מישור נוסף ε .



<u>שרטוט 3</u>

מישור זה איננו יכול לחתוך את כל 6 המקצועות של הפירמידה. נניח הוא חותך את המשך המקצוע $\overline{AB}$ בנקודה E . אזי הנקודות B ו E תמצאנה משני צידי המישור $ACD = \varepsilon_3$, בניגוד להנחה!

<u>בעיות לקורא</u>

1. המשפט המתאים לדוגמא 2 במישור הוא הרבה יותר פשוט: חלוקת מישור על-ידי n מישורים כלשהם, כוללת לפחות $\frac{2n - 2}{3}$ משולשים. הוכח!

2. נתונים n ישרים במישור $(n \geq 3)$, כך שאין ביניהם שני ישרים מקבילים. דרך נקודת החיתוך של כל שני ישרים עובר לפחות ישר אחד נוסף. הראה שבמקרה כזה <u>כל</u> הישרים עוברים דרך נקודה אחת.

3. הבעיה הבאה הוצגה על-ידי סילבסטר (Sylvester) ב-1893, ונפתרה על-ידי ת. גלאי (Gallai) בשנת 1933:

נתונות n נקודות במישור $(n \geq 3)$. כל ישר העובר דרך שתיים מהן, עובר גם דרך נקודה שלישית. הראה שכל הנקודות נמצאות על ישר אחד.

(H.S.M. Coxeter, <u>Introduction to Geometry</u>, John Wiley & Sons, Toronto, 1969).

4. הבעיה ההפוכה לבעיית סילבסטר:

אם n נקודות במישור אינן נמצאות כולן על ישר אחד, אזי קיים ישר הכולל אך ורק שתיים מתוך n הנקודות.

<u>דוגמא 3.</u>

נתונות מספר ערימות אבנים. שני משחקים מחלקים, כל אחד בתורו, <u>כל</u> ערימה לשני חלקים. המחלק אחרון - הוא המנצח. מה צריך להיות המצב ההתחלתי כדי שהמתחיל ינצח, ואיך עליו לשחק?

פתרון:

במבט ראשון המשחק נראה מסובך וללא מוצא. אך נזכר בעקרון הערך הקיצוני! תורי לשחק. למה עלי להפנות את תשומת לבי? נראה שיש חשיבות רק לערימה הגדולה ביותר. נסמן את מספר האבנים בה ב M. ניתן לשחק כל זמן ש $M > 1$. נסיון עם מספרים קטנים מראה שעלי להגיע ל $M = 2^k - 1$, שכן ליריבי אין אפשרות אחרת אלא להגיע ל:

$$2^{k-1} - 1 < M < 2^k - 1$$

בתור הבא שלי אוכל להגיע ל:

$$M = 2^{k-1} - 1$$

אם אמשיך בדרך זו, אהיה בסוף ב- $M = 2^1 - 1 = 1$ ויריבי ינוצח שכן לא יוכל להמשיך.

<u>מסקנה:</u> המתחיל במשחק יוכל לנצח, אם הכמות ההתחלתית של הערימה הגדולה ביותר <u>שונה</u> מ: $(2^k - 1)$.

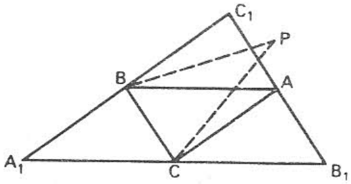
דוגמא 4:

נתונות נקודות במישור. כל שלוש מביניהן יוצרות משולש בעל שטח ≥ 1 .
הראה שכל הנקודות האלו נמצאות בתוך משולש בעל שטח ≥ 4 .

פתרון:

ישנן $\binom{n}{3}$ שלישיות של נקודות. נבחר את השלישיה A, B, C כך ש S - שטח המשולש ABC, יהיה מכסימלי. לפי הנתון $S \leq 1$. אם מעבירים דרך A, B, C מקבילים לצלעות הנגדיות, נוצר משולש $A_1B_1C_1$ בעל שטח $S_1 = 4S \leq 4$.
נראה ש S_1 כולל את n הנקודות הנתונות.

נניח ישנה נקודה P מחוץ למשולש $A_1B_1C_1$ (שרטוט 4). אזי המשולש ABC והנקודה P נמצאים מצדדים שונים של לפחות אחד הישרים A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1.
נניח שהם נמצאים משני צידי B_1C_1. אזי שטח ΔBCP גדול משטח ΔABC, בניגוד להנחה שהשטח של ΔABC הוא הגדול ביותר.



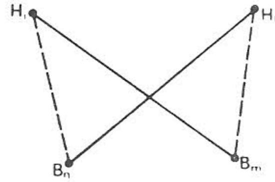
שרטוט 4

דוגמא 5:

נתונות 2n נקודות במישור, כאשר אף שלוש מהן אינן נמצאות על קו ישר אחד.
n מבין הנקודות האלו מסמנות חצרות: $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$. שאר n הנקודות מסמנות בארות: $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. רוצים לסלול שביל ישר מכל חצר לבאר אחת.
הראה שאפשר להתאים את הבארות לחצרות כך שהשבילים לא יחתכו זה את זה.

פתרון:

נבנה התאמה חד-חד ערכית כלשהי $f: H \longrightarrow B$. אם סוללים שביל מכל H_i ל-$f(H_i)$ תיווצר מערכת שבילים. מבין כל $n!$ המערכות האפשריות, נבחר אחת בעלת אורך מינימלי של כל השבילים. נראה שהמערכת הזאת הינה בעלת התכונה הדרושה. נניח ששני שבילים H_kB_n ו-H_iB_m חותכים זה את זה (שרטוט 5).



<u>שרטוט 5</u>

אם נחליף את שני השבילים ב- H_iB_n ו- H_kB_m נקבל מערכת דרכים קצרה יותר. זה סותר את צורת הבחירה של השבילים. ולכן לא קיימים שבילים נחתכים.

בעיות נוספות:

5) פתור את דוגמא 5 באמצעות אינדוקציה מתמטית.

6) האם קיימת פירמידה משולשת שבה כל מקצוע צדדי הוא שוק של זוית קהה בפאה צדדית?

7) $2n + 1$ אנשים עומדים במישור, כך שהמרחקים ביניהם שונים זה מזה. כל אחד מהם יורה בשכנו הקרוב ביותר. הראה כי:
   א. לפחות אדם אחד נשאר בחיים.
   ב. אף אחד לא נפגע ביותר מ-5 כדורים.
   ג. מסילות הכדורים אינן חותכות זו את זו.
   ד. מערכת הקטעים הנוצרת על-ידי מסילות הכדורים <u>אינה</u> כוללת מצולע.

8) (סיבוב ראשון ב-BWM 1975) הראה כי לכל פאון קמור יש לפחות שתי פאות בעלות מספר צלעות שווה.

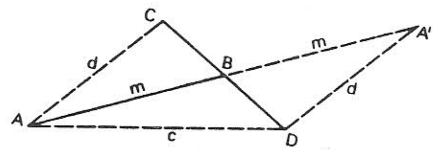
דוגמא 6:

נתונה קבוצת נקודות Ω במישור. כל נקודה נמצאת באמצע הקטע שקצותיו הם שתי נקודות השייכות לקבוצה. הראה כי הקבוצה היא אין-סופית.

פתרון: (דרך 1):

נניח שהקבוצה סופית. אזי קיימות ב Ω שתי נקודות A, B שהמרחק ביניהן מכסימלי, $m = |\overline{AB}|$. לפי הנתון, קיימות שתי נקודות $C,D \in \Omega$ כך ש B היא אמצע הקטע $\overline{CD}$.

שרטוט 6 מראה כי קיים $|\overline{AB}| > |\overline{AC}|$ או $|\overline{AB}| > |\overline{AD}|$ או שתי הטענות יחד.



שרטוט 6

פתרון: (דרך 2):

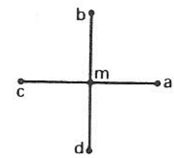
נניח שוב ש- Ω קבוצה סופית של נקודות. נסתכל בנקודות מתוך Ω הקיצוניות משמאל, וביניהן הנקודה הקיצונית למטה M. M לא יכולה להיות האמצע של זוג נקודות $\Omega \supset \{A, B\}$, כי אז נקודה אחת של $\{A, B\}$ היתה צריכה להימצא משמאל לנקודה M או על האנך דרך M, מתחת M.

דוגמא 7:

בכל נקודת סריג של מישור כתוב מספר טבעי, שהוא הממוצע החשבוני של ארבעת המספרים הרשומים בנקודות השכנות (למעלה, משמאל, למטה ומימין). הראה שכל המספרים שווים זה לזה.

פתרון:

נסתכל בנקודת הסריג המסומנת במספר הקטן ביותר - m. תהיינה שכנותיה a, b, c, d. (ראה שרטוט 7).



שרטוט 7

אזי מתקיים: $m = \frac{a + b + c + d}{4}$

או: $4m = a + b + c + d \qquad (1)$

כמו כן, $a \geq m$, $b \geq m$, $c \geq m$, $d \geq m$

אילו אחד מבין אי-השוויונים האלו היה אי-שוויון ממש, היה נובע

$$a + b + c + d > 4m$$

בסתירה ל (1). לכן: $a = b = c = d = m$.

מכאן מגיעים בקלות למסקנה <u>שכל</u> מספרי הסריג שווים זה לזה (הוכח!)

<u>דוגמא 8</u>:

הוכח כי לא קיימת רביעיה (x, y, z, u) של מספרים טבעיים המקיימים את השוויון:

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$$

פתרון:

נניח שקיימות רביעיות כאלו. נבחר אחת בה הערך של $x^2 + y^2$ הוא מינימלי. תהי (a, b, c, d) הרביעיה הנבחרת.

אזי קיים:

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$$

לכן: $3|(a^2 + b^2)$

($p|q$ פרושו: p מחלק את q או p הוא גורם של q)

מכאן: $3|a$ וגם $3|b$

כלומר, $a = 3m$, $b = 3m$, $m, n \in N$

לכן: $a^2 + b^2 = 9m^2 + 9n^2 = 3(c^2 + d^2)$

$$c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2)$$

וכך מצאנו רביעיה חדשה (c, d, m, n) עבורה $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$ בסתירה להנחה.

<u>בעיה 9</u>:

בהוכחה הקודמת השתמשנו במשפט $3|(a^2 + b^2)$ אזי $3|a$ וגם $3|b$.
הוכח אותו!

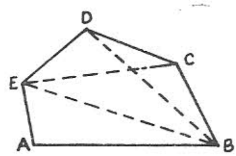
דוגמא 9:

בכל מחומש קמור ניתן לבחור 3 אלכסונים כך שאפשר לבנות מהם משולש.

פתרון:

נתבונן במחומש קמור ABCDE (שרטוט 8). יהיה $\overline{BE}$ האלכסון הארוך ביותר מבין חמשת האלכסונים. מ"אי-שוויון המשולש" נקבל:

$$|\overline{BD}| + |\overline{CE}| > |\overline{BE}| + |\overline{CD}| > |\overline{BE}|$$



שרטוט 8

כיוון ש $\overline{BE}$ הוא האלכסון הארוך ביותר, אפשר לבנות משולש בעל הצלעות $\overline{CE}$, $\overline{BD}$ ו $\overline{BE}$.

דוגמא 10:

על לוח שח-מט n×n העמידו צריחים לפי הכללים הבאים: אם המשבצת (i ,j) פנויה, אזי בשורה ה-i ובעמודה ה-j עומדים יחד לפחות n צריחים. הראה שמספר הצריחים על הלוח הוא לפחות $\frac{n^2}{2}$.

פתרון:

נבחר מבין 2n השורות והעמודות את זאת בעלת המספר הקטן ביותר של צריחים. נניח זוהי שורה, ומספר הצריחים בה הוא k .

i) $k \geq \frac{n}{2}$.

אזי בכל שורה נמצאים לפחות $\frac{n}{2}$ צריחים, ועל כל הלוח לפחות $\frac{n^2}{2}$ צריחים.

ii) $k < \frac{n}{2}$.

בשורה שנבחרה ישנן $(n - k)$ משבצות פנויות. דרך כל משבצת פנויה עוברת עמודה שבה לפחות $(n - k)$ צריחים. כל העמודות האלו יחד כוללות לפחות $(n - k)^2$ צריחים. שאר k העמודות כוללות, כל אחת, לפחות k צריחים. לכן נמצאים על הלוח לפחות $(n - k)^2 + k^2$ צריחים.

נראה שביטוי זה גדול או שווה ל- $\frac{n^2}{2}$.

$$(n-k)^2 + k^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{(n-2k)^2}{2} \begin{cases} \geq \frac{n^2}{2} & \text{עבור } n \text{ זוגי} \\ \geq \frac{n^2+1}{2} & \text{עבור } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

קיום הפתרון:

סידור אפשרי של צריחים על הלוח הוא כדלקמן:

כאשר n זוגי, מעמידים את הצריחים על $\frac{n^2}{2}$ המשבצות השחורות.

כאשר n אי-זוגי, ישנן $\frac{n^2+1}{2}$ משבצות בצבע של ארבע המשבצות הפינתיות. את הצריחים מעמידים על משבצות אלו.

<u>דוגמא 11</u>:

על "לוח" שח-מט במימדים n×n×n מוצבים צריחים. ברור כי n הוא המספר הקטן ביותר של צריחים שיכולים לשלוט על לוח משחק בגודל n×n .
שאלה קשה יותר היא מהו המספר הקטן ביותר T_n של צריחים שיכולים לשלוט על "לוח" שח-מט n×n×n (אולימפיאדה SU 1971).

אומדנים:

א. כל צריח שולט על (3n - 2) "משבצות". לכן:

$$T_n \geq \frac{n^3}{(3n-2)} \qquad (1)$$

כלומר, $T_2 \geq 2$, $T_3 \geq 4$, $T_4 \geq 7$, $T_5 \geq 10$

ב. שכבה של "משבצות" שולטת על המשחק. לכן:

$$T_n \leq n^2 \qquad (2)$$

<u>בעיה 10</u>:

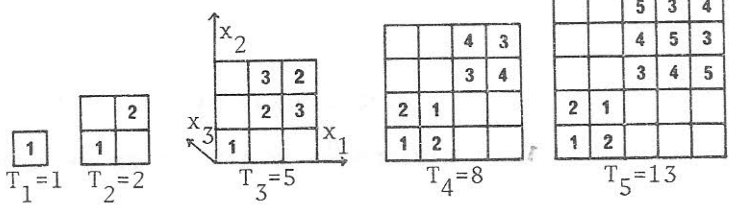
אומדן *(2)* הינו גס מאוד. ניתן לעדן אותו באופן הבא:
מקצוע צדדי של n_1 צריחים של "לוח" $n_1 \times n_2 \times n_3$ שולט על שתי שכבות. לכן נשאר "לוח" במימדים $n_1 \times (n_2 - 1) \times (n_3 - 1)$.
הראה שמכאן נובע:

$$T_n \leq \frac{3}{4}n^2 \qquad (3)$$

כלומר: $T_2 \leq 3$, $T_3 \leq 7$, $T_4 \leq 12$, $T_5 \leq 19$

תרשים של מיקום הצריחים על ה"לוח":

נסמן את השכבות (החל מן הקדמית) $1, 2, \ldots, n$. שרטוט 9 נותן את המבט הקדמי של המשחק, כאשר המספרים מסמנים את מספר השכבה שבה עומד צריח.



שרטוט 9

שרטוט 9 מוביל אל ההנחה:

$$T_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2} & \text{(עבור } n \text{ זוגי)} \\ \dfrac{n^2+1}{2} & \text{(עבור } n \text{ אי-זוגי)} \end{cases}$$

הוכחה: נניח סידרנו T צריחים כך שהם שולטים על n^3 ה"משבצות". נבחר שכבה S הכוללת מינימום של צריחים. נניח S מקבילה למישור x_1x_2.
נסמן את מספר הצריחים אשר ב S ב t. יהיה t_1 מספר הצריחים ש t הצריחים מכים בכיוון x_1, ו t_2 מספר הצריחים ש t הצריחים מכים בכיוון x_2. בלי הגבלת הכלליות נניח $t_1 \geq t_2$. ברור שקיים $t \geq t_1$, $t \geq t_2$.
בשכבה S הצריחים האלו אינם שולטים על $(n - t_1)(n - t_2)$ "משבצות". את אלו יש להכות בכיוון x_3. נתבונן בכל n השכבות המקבילות למישור x_1x_3.
ב- $(n - t_1)$ מתוכן, שאינן כוללות צריח מתוך S, חייבים לעמוד לפחות $(n - t_1)(n - t_2)$ צריחים. בכל אחת משאר t_1 השכבות נמצאים לפחות t צריחים (בהתאמה לבחירה של t). לכן קיים:

$$T \geq (n - t_1)(n - t_2) + tt_1 \geq (n - t_1)^2 + t_1^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{(2t_1 - n)^2}{2}$$

הערך המינימלי של הביטוי האחרון (בצד ימין של אי-השוויון) הוא $\frac{n^2}{2}$ עבור n זוגי, ו- $\frac{n^2+1}{2}$ עבור n אי-זוגי.

בשרטוט 10 מומחשת העובדה שתנאי הכרחי זה הוא גם מספיק.

				8	5	6	7
				7	8	5	6
				6	7	8	5
				5	6	7	8
4	1	2	3				
3	4	1	2				
2	3	4	1				
1	2	3	4				

$\frac{n}{2}$

$\frac{n}{2}$

			7	4	5	6
			6	7	4	5
			5	6	7	4
			4	5	6	7
3	1	2				
2	3	1				
1	2	3				

$\frac{n+1}{2}$

$\frac{n-1}{2}$

שרטוט 10

דוגמא 12:

נתונות n נקודות במישור, כך שאף שלוש מתוכן אינן נמצאות על קו ישר. הראה שקיימות שלוש נקודות כך שהמעגל דרכן אינו מכיל נקודות נוספות מבין n הנקודות.

פתרון:

נעביר מעגל דרך כל שלוש מתוך n הנקודות. נקבל קבוצה של $\binom{n}{3}$ מעגלים, לכל היותר. יש להראות שלפחות באחד המעגלים האלו לא נמצאות נקודות נוספות.

נסיון ראשון: נתבונן במעגל בעל רדיוס מינימלי. זה לא מוביל לפתרון!

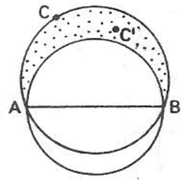
בעיה 11:

בנה דוגמא נגדית כדי להראות שמעגל בעל רדיוס מינימלי יכול לכלול נקודות נוספות.

נסיון שני לפתרון: נבחר בשתי נקודות A, B שהמרחק ביניהן מינימלי. שאר n - 2 הנקודות נמצאות מחוץ למעגל הבנוי על $\overline{AB}$ כקוטר. נתבונן ב- n - 2 המעגלים העוברים דרך A, B ואחת מבין שאר הנקודות. בין n - 2 המעגלים האלו קיים אחד בעל שטח קטן ביותר. הוא יעבור דרך A, B ו C . מעגל זה ממלא את תנאי הבעיה.

בעיה 12:

הראה שאם C' הינה נקודה בתוך המעגל דרך A, B ו C (בתוך הסהר המושחר) אזי רדיוס המעגל דרך A, B ו C' קטן מרדיוס המעגל דרך A, B ו C .
(שרטוט 11).



שרטוט 11

בעיות לקורא:

13. במדינת הסיקים ישנם רק רחובות חד-סיטריים. כל שתי ערים מחוברות על-ידי כביש אחד ורק אחד. הראה שישנה עיר אחת שאפשר להגיע אליה ישירות מכל עיר אחרת, או דרך לכל היותר עיר אחרת אחת.

14. לשבעה תלמידים יחד, ישנן 100 מטבעות. אין שני תלמידים שמספר המטבעות שלהם זהה. הראה שישנם שלושה תלמידים אשר להם יחד לפחות 50 מטבעות.

15. (XIII IMO 1971 - האולימפיאדה הבין-לאומית למתמטיקה)

$$A = (a_{ij}) \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

היא מטריצה שאיבריה הם מספרים שלמים, לא שליליים.
למטריצה התכונה הבאה: אם איבר a_{ij} שווה ל 0, אזי מתקיים עבור אותם i ו j :

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \ldots a_{nj} \geq n$$

הוכח שסכום כל האיברים של המטריצה אינו קטן מ $\frac{n^2}{2}$.

דוגמא 13:

נתון גוף שכל החתכים המישוריים שלו הם עיגולים. הראה שהגוף הוא כדור.
(תחרות קירשק Kurschak , 1954).

פתרון:

יהיה $\overline{AB}$ מיתר מכסימלי של הגוף. כל חתך על-ידי מישור העובר דרך AB הוא מעגל בעל קוטר $\overline{AB}$, כי אחרת היה קיים בחתך המעגלי (ולכן גם בגוף) מיתר ארוך מ- $\overline{AB}$. לכן הגוף הוא כדור בעל קוטר $\overline{AB}$.

הוכחה זו אינה שלמה, שכן לא הוכחנו קיומו של מיתר מכסימלי. לא ניתן להוכיח זאת, כי נוסח הבעיה אינו שלם. נוסח מדוייק יותר הוא: לקבוצת נקודות לא ריקה K במרחב ישנה התכונה הבאה: אם E מסמן מישור כלשהו, אזי $E \cap K$ היא קבוצה ריקה או "עיגול סגור". הראה כי K הוא "כדור סגור".

<u>הערה:</u> לעיגול כולל היקפו קוראים "עיגול סגור", ולכדור כולל פניו - "כדור סגור".

באמצעות מתמטיקה גבוהה, אפשר להראות שבקבוצה סגורה וחסומה קיימים מיתרים מכסימליים.

<u>בעיות לקורא:</u>

16. פתור את הבעיה המוצגת בדוגמא 13 באמצעות הנדסה אלמנטרית, כלומר בלי להשתמש בקיומו של מיתר מכסימלי.

17. נתונה צורה סגורה וחסומה במישור ϕ בעלת התכונה הבאה: אפשר לקשר כל שתי נקודות של ϕ על ידי חצי מעגל שנמצא כולו בתוך ϕ. זהה מהי הצורה הנ"ל. (הצעת גרמניה לאולימפיאדת המתמטיקה הבין-לאומית ה-XIX).

18. נתונות n נקודות במרחב, כאשר אין ארבע ביניהן הנמצאות באותו מישור. קשרו כמה מבין הנקודות על-ידי קטעים. לגרף המתקבל G יש k מקצועות. הוכח:

א) (סיבוב שני BWM 1971/82) אם G אינו כולל משולש, אזי מתקיים

$$k \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

ב) אם G אינו כולל טטראדר, אזי מתקיים: $k \leq \left[\frac{n^2}{3}\right]$.

$[x]$ מסמן את החלק השלם של x; כלומר, את המספר השלם הקרוב ביותר ל-x ואינו גדול ממנו.

19. על כוכב לכת קיימות 20 מדינות. לפחות לשתיים מבין כל שלוש מהן אין קשרים דיפלומטיים. הראה שעל הכוכב הזה קיימות לכל היותר 200 שגרירויות.

20. בתחרות מסויימת, כל משתתף משחק פעם אחת נגד כל משתתף אחר. אין משחק הנגמר בתיקו. אחרי המשחק כל משתתף רושם את שמות היריבים.

א) שהוא ניצח אותם.

ב) שהובסו על-ידי אלו שהוא ניצח אותם.

הראה שיש משתתף אחד שרשימתו כוללת את שמות כל המשתתפים האחרים.

21. לקבוצת נקודות M במישור ישנן התכונות הבאות:

א) המרחק בין כל שתי נקודות של M הוא לפחות d , $d > 0$.

ב) אם A, B ו C הן נקודות מתוך M אזי גם הפינה D של המקבילית ABCD נמצאת ב- M . חקור את הקבוצה M .