כמה פתרונות יש ל- $x^2+y^2=n$, בממוצע?

עיבד: מ. ברוקהיימר תרגמה: צ. מרקוביץ
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

מאמר זה מבוסס על:

Leonard, W.A. and Pagni, P.L.: A computer meets a classical problem
The Mathematics Teacher, Vol. 73, No. 3, March 1980.

קרל פרידריך גאוס (1777-1855) היה אחד מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים.

במאמר זה נגלה רק נדבך קטן מעבודתו הגדולה, שתרמה רבות להתפתחות המתמטיקה.

בהתייחס למשוואה $x^2 + y^2 = n$, כאשר n מספר טבעי, ונרצה לדעת כמה פתרונות שלמים יש למשוואה זו. או במילים אחרות: בכמה דרכים שונות ניתן להציג את n כסכום ריבועיהם של שני מספרים שלמים?

ברור, כי הדבר תלוי ב- n:

כאשר $n = 0$ מספר הפתרונות הוא 1 $(0,0)$

כאשר $n = 1$ מספר הפתרונות הוא 4 $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$

כאשר $n = 2$ מספר הפתרונות הוא 4 $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$

כאשר $n = 3$ מספר הפתרונות הוא 0

כאשר $n = 4$ מספר הפתרונות הוא 4

כאשר $n = 5$ מספר הפתרונות הוא 8

כאשר $n = 6$ מספר הפתרונות הוא 0 וכו'.

מכאן אפשר לראות, שאם קיים פתרון, המספר הכללי של הפתרונות הוא כפולה של 4 (מלבד המקרה בו $n = 0$). עוד אפשר לראות, כי ניתן לייצג את הפתרונות במערכת צירים קרטזית, ע"י נקודות המפוזרות בצורה סימטרית סביב הראשית.

אם נסמן ב $r(n)$ את מספר הפתרונות של $x^2 + y^2 = n$, הבעיה המתעוררת היא, כמובן, מהו הערך של $r(n)$?

בעיה זאת נפתרה, אך כיון שהוכחת הפתרון אינה פשוטה, נדון בה בקיצור בנספח.

שאלה אחרת, שאולי פחות אנשים ישאלו את עצמם, היא השאלה הבאה:

מהו מספר הפתרונות של $x^2 + y^2 = n$ בממוצע? נתיחס לשאלה זו, כיוון שהתשובה המתקבלת מפתיעה ודרך הפתרון מעניינת.

ראשית, נבין את השאלה. מספר הפתרונות הממוצע של 10 המשוואות הראשונות הוא:

$$\frac{r(0) + r(1) + r(2) + \ldots + r(9)}{10}$$

לא קשה לקבל שערכו של הביטוי הזה הוא 2.9 . קשה יותר לחשב את המספר הממוצע של הדרכים השונות, בהן ניתן לייצג את 1000 המספרים הראשונים, כסכום של שני ריבועים, וזאת בשל העבודה הרבה הכרוכה בכך.

מחברי המאמר המקורי הטילו משימה זו על מספר סטודנטים מבריקים, שפנו לעזרת המחשב. (הם הראו שאם התוכנית אינה יעילה, הפתרון גוזל הרבה זמן מחשב. למתענינים, במאמר המקורי ניתן למצוא ארבע דרכים שונות לשימוש במחשב לפתרון הבעיה). התוצאה שהתקבלה היתה:

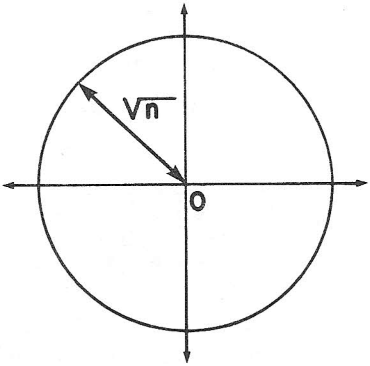
$$\frac{r(0) + \ldots + r(999)}{1000} = 3.133$$

הם פתרו אותה בעיה עבור n-ים נוספים גדולים מאוד. אך מכך, כמובן, לא נקבל תשובה לבעיה שלנו, מכיוון שאנחנו רוצים לדעת את הערך של:

$$S(n) = \frac{r(0) + \ldots + r(n - 1)}{n}$$

כאשר n שואף לאינסוף.

קיים לבעיה פתרון גיאומטרי יפה. נסתכל במעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו $\sqrt{n}$ (שרטוט 1).

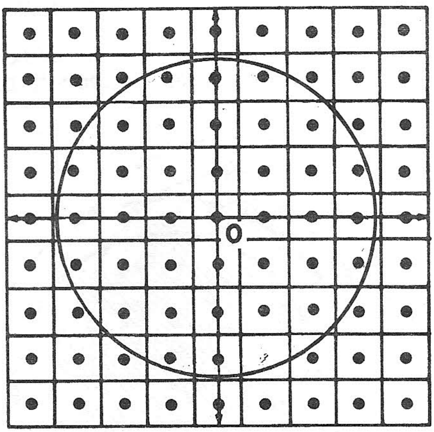


שרטוט 1

עבור כל נקודה בתוך המעגל קיים:

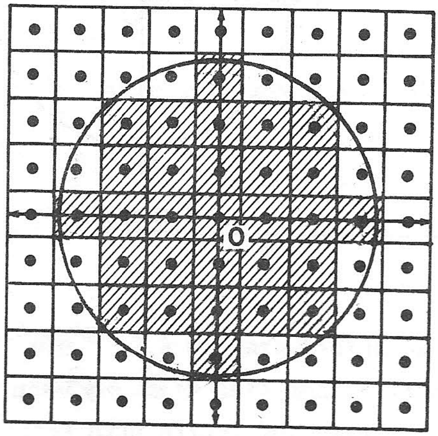
$$x^2 + y^2 < n$$

אנחנו מחפשים, איפוא, שיטה אשר בעזרתה נוכל לספור את מספר נקודות הסריג (נקודות בעלות קואורדינטות שלמות) בתוך המעגל. מספר זה יתן לנו, כמובן, את הסכום $r(0) + \dots + r(n - 1)$. לשם כך, נחלק את המישור לריבועים בגודל של 1×1 יחידות. נעשה זאת כך, שראשית הצירים תימצא בדיוק במרכזו של ריבוע, וכל נקודה בעלת קואורדינטות שלמות, תימצא במרכזו של ריבוע כזה (שרטוט 2).



שרטוט 2

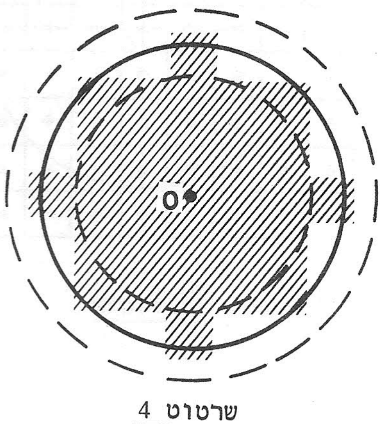
כיוון ששטח כל ריבוע הוא יחידה, במקום לספור את מספר נקודות הסריג בתוך המעגל, נוכל לחשב את סכום שטחי הריבועים שמרכזם בתוך המעגל. ריבועים אלה הם הריבועים המקווקוים בשרטוט הבא:



שרטוט 3

נעזר בשטח העיגול כדי לחשב את סכום שטחי הריבועים המקווקווים. אם נסתכל בשרטוט 3, נראה ששטח העיגול כולל חלקים משטחם של מספר ריבועים שאיננו מעונינים לספור, ולעומת זאת איננו כולל חלקים משטחי ריבועים שאנו כן מעונינים לספור. כדי להתגבר על בעיה זו, נשרטט שני מעגלים נוספים:

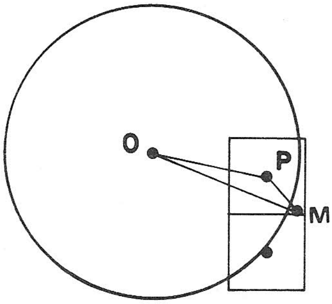
1. מעגל חיצוני (מעגל מחוץ למעגל הנתון) שמכיל את כל הריבועים המקווקוים.
2. מעגל פנימי (מעגל בתוך המעגל הנתון) שאינו מכיל אף חלק מריבוע שאינו מקווקו.



שרטוט 4

ברור שהשטח המבוקש קטן משטח העיגול החיצוני וגדול משטח העיגול הפנימי.

כדי למצוא את רדיוס המעגל החיצוני, נסתכל בשרטוט מס' 5.



שרטוט 5

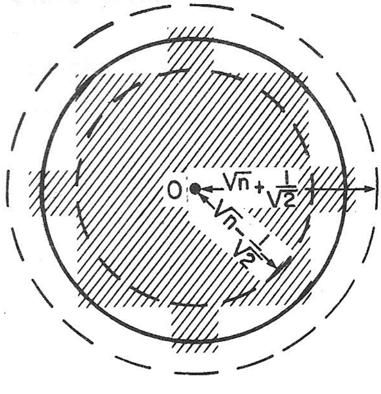
תהי M נקודה כלשהי בתוך ריבוע מקווקו, ותהי P מרכז הריבוע הזה. מכיוון שאורך האלכסון בריבוע של 1×1 הוא $\sqrt{2}$, נקבל:

$$PM \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

כמו כן: $$OP + PM \geq OM$$

ולכן: $$OM \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

מכאן, אם ניקח את רדיוס המעגל החיצוני כ- $\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, נוכל להבטיח שכל הריבועים המקווקוים ימצאו בתוך מעגל זה. באופן דומה, אם רדיוס המעגל הפנימי יהיה $\sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$, הוא לא יכיל אף נקודה הנמצאת בתוך ריבוע לא מקווקו (שרטוט 6).



שרטוט 6

השטח המקווקו כולו, שהוא:

$$\sum_{i=0}^{n-1} r(i) = r(0) + \ldots + r(n-1)$$

מקיים:

$$\pi\left(\sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 < \sum_{i=0}^{n-1} r(i) < \pi\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

אחרי פתיחת סוגריים וחלוקה ב-n נקבל:

$$\pi - \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2n} < S(n) < \pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2n}$$

ברור, שככל ש n גדל, הביטויים המכילים n ו $\sqrt{n}$ במכנה קטנים, ואז $S(n)$ הופך להיות "סנדויץ'" בין π פלוס גודל קטן מאוד, לבין π מינוס גודל קטן מאוד. לכן, כאשר n שואף לאינסוף, נקבל כי $S(n)$ שואף ל π .

וזאת התוצאה המפתיעה (שלפי טענת מחברי המאמר המקורי, גאוס הוא שהגיע אליה ראשון):

המספר הממוצע של הדרכים השונות, בהן ניתן להציג מספר טבעי כסכום שני ריבועים, הוא π.

או:

המספר הממוצע של פתרונות שלמים למשוואה $n = x^2 + y^2$, כאשר n מספר טבעי הוא π .

הטבלה הבאה, שנלקחה מהמאמר המקורי, מציגה תוצאות שהתקבלו מהמחשב, תוצאות המראות את התכנסות מספר הפתרונות הממוצע ל π .

טבלה

n	המספר הממוצע של הדרכים השונות בהן ניתן להציג מספר בין 0 ל-n כסכום שני ריבועים
999	3.133
9 999	3.1398
99 999	3.14173
999 999	3.141521
9 999 999	3.1415993
99 999 999	3.14159017
999 999 999	3.141592369
9 999 999 999	3.1415925413
99 999 999 999	3.14159263935
999 999 999 999	3.141592649573
9 999 999 999 999	3.1415926531964

פתרון לבעיה זו, וכן חומר נוסף אודות נקודות במערכת קרטזית, ניתן למצוא במאמר:של:

Avital S., Lattices in the Secondary School, <u>Mathematics Teaching</u>, No. 55, 1971.

נ_ס_פ_ח

מאת: מ. ברוקהיימר. תורגם ע"י צ. מרקוביץ.

כפי שהוזכר במאמר, נפתרה גם הבעיה של מציאת מספר הפתרונות השלמים השונים - $r(n)$, של $x^2 + y^2 = n$, כאשר n מספר טבעי. הפתרון אינו פשוט וניתן למצוא אותו ב:

Hardy, G.H., and Wright, E.M.: An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford, 1945 (Theorem 278, p. 241).

בנספח זה נתייחס תחילה למספר מקרים פרטיים, אשר הוכחתם אינה מסובכת מדי, לאחר מכן, נביא את התוצאה הכללית, מבלי להכנס להוכחתה.

ראשית, נשים לב שכל מספר שלם ניתן לכתיבה באחת מהצורות הבאות:

$$4k \ , \ 4k+1 \ , \ 4k+2 \ , \ 4k+3$$

כמו כן, נשים לב לכך ש: $(4k+1)^2$ ו- $(4k+3)^2$, שניהם מהצורה $4k+1$.

כעת אנו יכולים להוכיח:

<u>משפט 1</u>: כל מספר מהצורה $4m+3$, אינו ניתן להצגה כסכום ריבועיהם של שני מספרים שלמים. כלומר, $r(4m+3) = 0$.

<u>הוכחה</u>:

נניח כי: $4m + 3 = a^2 + b^2$. אזי, אחד משני המספרים: a ו b , חייב להיות אי-זוגי והשני זוגי.
נניח a אי-זוגי, ו b זוגי. אזי, a^2 הוא מהצורה $4k+1$, b^2 הוא מהצורה $4k$, וסכומם אינו מהצורה $4k+3$.

<u>משפט 2</u>: $r(2^m) = 4$

<u>הוכחה</u>:

א) <u>אם m זוגי</u>, אפשר לכתוב את 2^m כ:

$$2^m = (\pm 2^{m/2})^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 2^{m/2})^2$$

לכן: $r(2^m) \geq 4$

נניח שישנן הצגות נוספות ל 2^m, כלומר:

$$a\ ,\ b \neq 0 \quad ו \quad 2^m = a^2 + b^2$$

נוציא מ a את כל הגורמים של 2, עד שישאר לנו מספר אי-זוגי - a_1 .
נוכל לרשום $a = 2^{\alpha}\cdot a_1$. באופן דומה נקבל $b = 2^{\beta}\cdot b_1$, כאשר b_1
אי-זוגי. נוכל אז לרשום את 2^m כ:

$$2^m = 2^{2\alpha}a_1^2 + 2^{2\beta}b_1^2 \qquad (*)$$

אם $\alpha < \beta$, ע"י חלוקה ב- $2^{2\alpha}$ נקבל:

$$2^{m-2\alpha} = a_1^2 + 2^{2\beta-2\alpha}\, b_1^2$$

אבל a_1^2 אי-זוגי, ולכן החלק הימני של המשוואה האחרונה אי-זוגי.
זוהי סתירה מכיוון ש: $2^{m-2\alpha}$ זוגי. לכן $\alpha \nless \beta$.

באופן דומה ניתן להראות כי $\beta \nless \alpha$. ומכאן, $\alpha = \beta$.

לכן: $$2^m = 2^{2\alpha}\ (a_1^2 + b_1^2)$$

אבל a_1^2 ו b_1^2 שניהם מהצורה $4k + 1$. לכן, $a_1^2 + b_1^2$ יהיה מהצורה:

$$4k + 2 = 2(2k + 1)$$

ונקבל:

$$2^m = 2^{2\alpha + 1}(2k + 1)$$

זה בלתי אפשרי, כיוון ש: $2\alpha + 1$ אי-זוגי ו m זוגי.

לכן, עבור m זוגי, $r(2^m) = 4$.

<u>אם m אי-זוגי</u>, שלוש השורות הראשונות של המקרה הזוגי אינן תופסות.
אך בהמשך, אותם נימוקים שהיו נכונים במקרה הזוגי, נכונים גם כאן
עד לשורה $2^m = 2^{2\alpha+1}(2k + 1)$.
כעת, אין סתירה בין m לבין $2\alpha + 1$, כי שניהם אי-זוגיים; אבל
אפשר להסיק כי $k = 0$. זה גורר $a_1^2 = b_1^2 = 1$. לכן, מ (*) נובע
שהביטוי היחיד עבור 2^m בו m אי זוגי הוא:

$$2^m = \left(\pm 2^{\frac{m-1}{2}}\right)^2 + \left(\pm 2^{\frac{m-1}{2}}\right)^2$$

ונקבל שוב כי $r(2^m) = 4$.

עבור מספר מהצורה $4k + 1$, הבעיה אינה כה פשוטה. לדוגמא, $r(5) = 8$
אבל $r(21) = 0$. להלן משפט מ- Hardy ו Wright .

<u>משפט 3</u>: אם $4k + 1$ ראשוני, אזי $r(4k + 1) = 8$.

כל אלו הן רק תוצאות חלקיות וניתן למצוא תוצאות נוספות.

למשל, אם: $$n_1 = x_1^2 + y_1^2$$

ו- $$n_2 = x_2^2 + y_2^2$$

אזי: $$n_1n_2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

ואפשר להסיק כי:

$$r(n_1) > 0 \quad , r(n_2) > 0 \Longrightarrow r(n_1n_2) > 0$$

האפשרות להרחיב יותר, נתונה בידי הקורא.

גם את התוצאה האחרונה נביא בלי הוכחה, כיוון שעד כמה שידוע לנו, ההוכחה אינה קלה.

<u>משפט</u>: $$r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$$

כאשר $d_1(n)$ הוא מספר המחלקים של n מהצורה $4k + 1$, ו $d_3(n)$ - מספר המחלקים של n מהצורה $4k + 3$.
עם מעט מחשבה, ניתן לראות כי משפט זה קונסיסטנטי (איננו מביא לסתירה) עם המשפטים שהוכחו קודם.