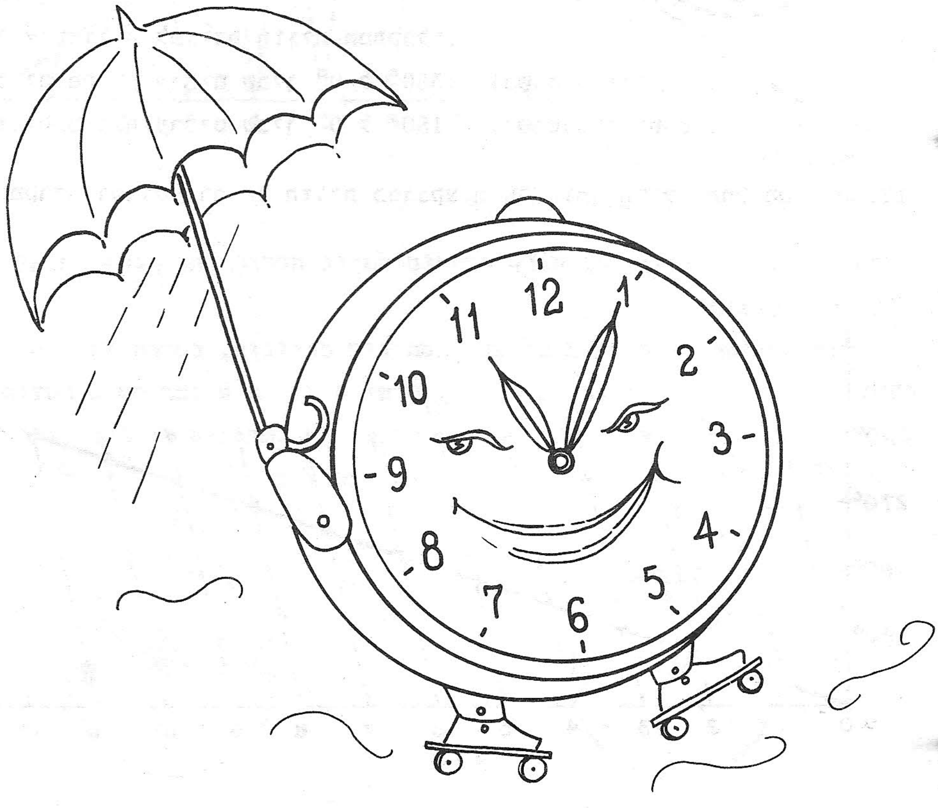
מה השעה?

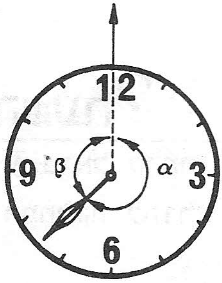
מאת: עמנואל קרמר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע



- באיזו שעה, אחרי 12:00, מתלכדים מחוגי השעון?
- באיזו שעה, אחרי 3:00 , יהיו מחוגי השעון ניצבים זה לזה?
- מהי הזוית בין מחוגי השעון בשעה 4:05?

עיסוק בשאלות כאלה מהווה דרך, לא מלאכותית, להמחשת מושגים מתמטיים ואפשר לעשותו ברמות שונות של דיון.
נדון תחילה במצב בו מתלכדים מחוגי השעון ואח"כ נעבור למקרה הכללי והוא היווצרות זוית כלשהיא α בין המחוגים.
נגביל עצמנו לטווח של 12 שעות (החל משעה 12:00) המייצג סיבוב שלם אחד של מחוג השעות בשעון.

התלכדות המחוגים



מחוגי השעון מתלכדים בשעה 12:00.
נתבונן בזוית שיוצר מחוג (כל אחד מהם) עם הקרן $\vec{O}_{12}$, שראשיתה בציר הסיבוב של המחוג (מרכז השעון) והעוברת דרך הנקודה 12 שעל לוח השעון.

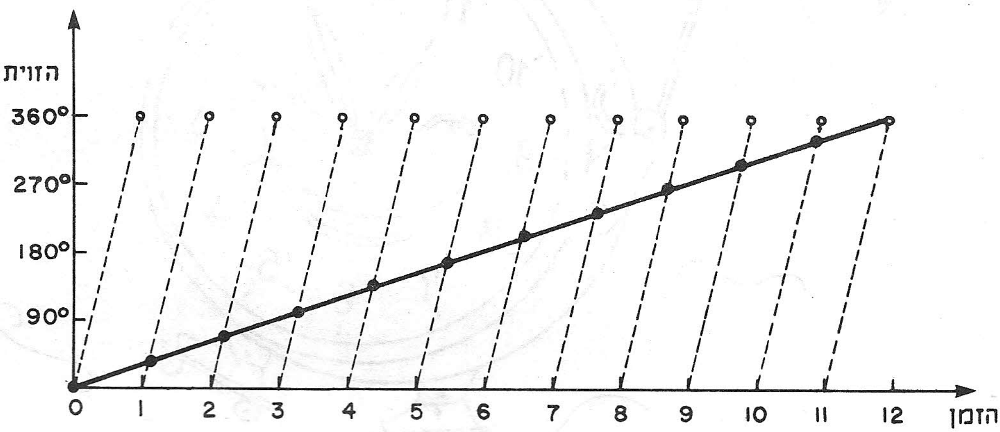
יש שתי אפשרויות למדידת הזוית המתקבלת:

i) הזוית מקבלת ערכים שבין $0°$ ל $360°$. (בשרטוט זוית α).

ii) הזוית מקבלת ערכים שבין $0°$ ל $180°$. (בשרטוט זוית β).

בשני המקרים נשרטט גרף של הזוית כפונקציה של הזמן החולף החל משעה 12:00.

במקרה (i):

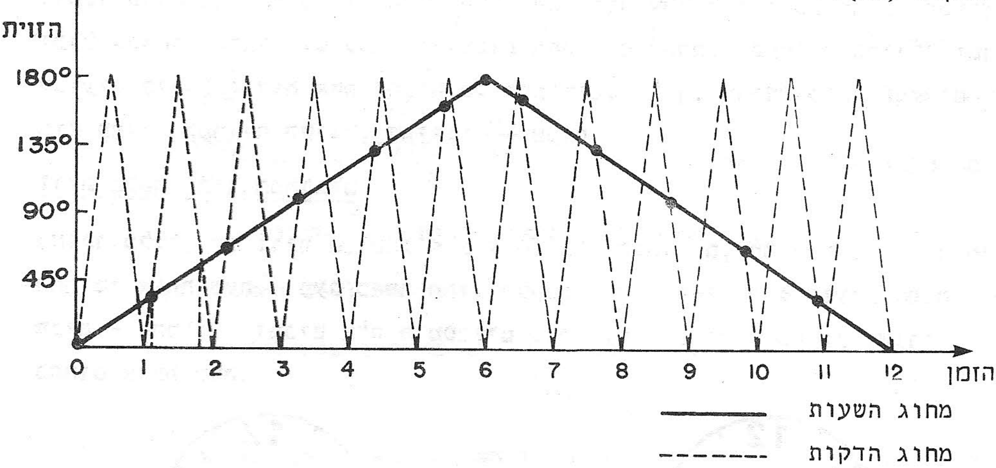


מחוג השעות ———

מחוג הדקות -------

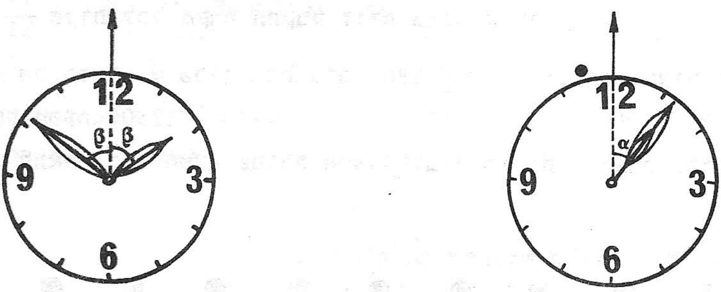
בתחום השעות המצוין, הגרף המתאים למחוג הדקות אינו רציף.
נקודות הפגישה של הגרפים של שני המחוגים הן הנקודות המציינות התלכדות שני המחוגים.

במקרה (ii).



בתחום השעות המצוין, הן הגרף המתאים למחוג הדקות והן הגרף המתאים למחוג השעות, רציפים.

נקודות הפגישה של הגרפים של שני המחוגים מציינות, במקרה זה, זמנים בהם הזוית שיוצר מחוג הדקות עם הקרן $\vec{O}_{12}$ שווה לזוית שיוצר מחוג השעות עם הקרן הזו. בכל שעה יש שני זמנים, שבהם שני המחוגים יוצרים זוית שווה עם $\vec{O}_{12}$, אבל רק אחד מהם הוא בהתלכדות המחוגים.



לדוגמא, במקרה (ii), המחוגים יוצרים זוית שווה עם $\vec{O}_{12}$ פעמיים: קצת אחרי 1:05 וקצת לפני 1:55, אך הם מתלכדים רק בפעם הראשונה.

את בעית התלכדות המחוגים ניתן לפתור גם בדרך אריתמטית פשוטה: במחזור שלם (12 שעות) מתרחשת התלכדות המחוגים 11 פעמים. לוח השעות סימטרי ומהירות הסיבוב של המחוגים קבועה. לכן, מירווח הזמן בין התלכדות אחת לשניה, הוא $\frac{12}{11}$ שעות.

לדוגמא, המחוגים מתלכדים בשעה 12:00. הם יתלכדו שנית $5\frac{5}{11}$ דקות אחרי שעה 1:00:

$$1 \text{ שעה} + 5\frac{5}{11} \text{ דקות} = 1 \text{ שעה} + \frac{60}{11} \text{ דקות} = \frac{12}{11} \text{ שעות}$$

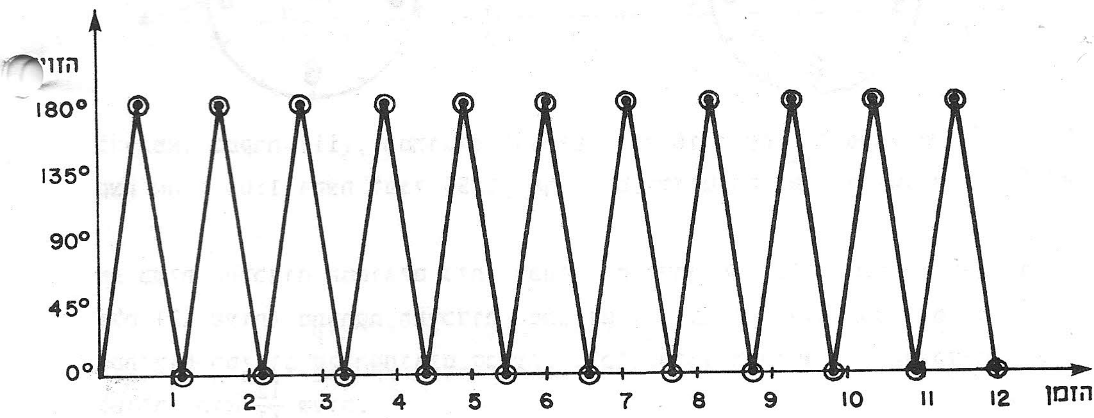
במקרה הפרטי של היווצרות זוית ישרה בין שני מחוגי השעון, השיקול שהנחה אותנו קודם במציאת מרווח הזמן שבין התלכדות אחת לשניה של מחוגי השעון יכול להנחות אותנו גם עתה. ניצבות המחוגים מתרחשת פעמיים ברווחי זמן קבועים בין התלכדות אחת לשניה של המחוגים. לכן, מרווח הזמן המתאים הוא מחצית המרווח הקודם, דהיינו $\frac{6}{11}$ שעות.

זוית כלשהי בין המחוגים

באופן כללי, כל זוית α $(0 < \alpha < 180)$ בין המחוגים, מתרחשת בדיוק פעמיים בתחומי אותה שעה. פעם כאשר מחוג הדקות נמצא לפני מחוג השעות ופעם שניה - אחריו. זמנים אלה סימטריים לגבי זמן התלכדות מחוגי השעון בתחום אותה שעה.

לדוגמא, בשרטוט שלפנינו, מחוגי השעון מתלכדים $\frac{1}{11}$ דקות אחרי שעה 3:16.
t דקות לפני כן ו t דקות אחרי כן יש בין המחוגים אותה זוית (לכל t).
אם נוסיף $\frac{12}{11}$ שעות לכל מקרה תתקבל זוית בעלת אותו גודל.

נשרטט גרף של הזוית α שבין המחוגים $(0 \leq \alpha \leq 180)$, כפונקציה של הזמן החולף (החל משעה 12:00).
הגרף נותן התאמה בין השעה שמורה השעון לבין הזוית הנוצרת בין המחוגים.



שרטוט הגרף מתבסס על 11 מרווחי זמן שווים (בתחום 12 השעות) בהם המחוגים מתלכדים (הזוית ביניהם אפס), ועל קצב אחיד של שינוי הזוית (הגרף בנוי מקטעים ישרים).

כדי לפתור את הבעיה באופן אלגברי נזדקק למושגים נוספים:

נעסוק בזוית שיוצר כל מחוג עם הקרן $\vec{O}_{12}$.

מהירותו הזויתית של מחוג השעות היא $30 \frac{\text{מעלות}}{\text{שעה}}$ או $\frac{1}{2} \frac{\text{מעלה}}{\text{דקה}}$.

מהירותו הזויתית של מחוג הדקות היא $360 \frac{\text{מעלות}}{\text{שעה}}$ או $6 \frac{\text{מעלות}}{\text{דקה}}$.

t דקות אחרי 12:00 ישרטט מחוג השעות זוית של $\frac{t}{2}$ **מעלות.**

t דקות אחרי 12:00 ישרטט מחוג הדקות זוית של $6t(\bmod 360)$ **מעלות.**

נזכיר כי הגבלנו את הדיון לטווח של 12 שעות ולכן $t < 720$.

למצב בו מקדים מחוג הדקות את מחוג השעות תתאים המשוואה:

$$\alpha = 6t(\bmod 360) - \frac{t}{2} \qquad 0 \le \alpha \le 360$$

ולמצב בו מחוג הדקות מפגר אחר מחוג השעות תתאים המשוואה:

$$\alpha = \frac{t}{2} - 6t(\bmod 360) \qquad 0 \le \alpha \le 360$$

והמשוואה הכללית:

$$\alpha = \left|6t(\bmod 360) - \frac{t}{2}\right|$$

נוכל לפשט את התהליך אם נמדוד את הזמן בשעות שלמות (בין 0 ל 12) ובדקות (כמקובל). כלומר x:y יציין x שעות + y דקות אחרי 12:00.

בשעה x:y תהיה הזוית שישרטט מחוג הדקות: $6y$

הזוית שישרטט מחוג השעות תהיה:

$$30x + \frac{y}{2}$$

והמשוואה הכללית:

$$\alpha = \left|30x + \frac{y}{2} - 6y\right|$$

או:

$$\alpha = \left|30x - \frac{11y}{2}\right|$$

דוגמא: בשעה 4:05 הזוית בין המחוגים תהיה:

$$\alpha = \left|30\cdot 4 - \frac{11\cdot 5}{2}\right| = \left|120 - 27.5\right| = 92.5^\circ$$

דוגמא נוספת: באיזו שעה תהיה הזוית בין המחוגים 45° ?

המשוואה המתאימה: $45 = \left|30x - \frac{11y}{2}\right|$

עבור, למשל, $x = 1$ האפשרויות הן:

א) $30 - \frac{11y}{2} = 45$ $\qquad y = \frac{-30}{11}$

כ-3 דקות לפני שעה 1:00

ב) $30 - \frac{11y}{2} = -45$ $\qquad y = \frac{150}{11}$

כ-14 דקות אחרי שעה 1:00 .

נוכל כך להמחיש ולעסוק במושגים מתימטיים אלה, כל עוד נותרו על ידי התלמידים שעונים לא דיגיטליים.

<u>לקריאה נוספת</u>

1) ליפסון חנה, הבעיה של היפוך מחוגי השעון,
<u>שבבים - עלון מורי מתמטיקה</u>, תיק מס' 7,
מכון ויצמן למדע, רחובות.

2) Badoian, M.J., Mathematics for Clock Watchers,
<u>The Mathematics Teacher</u>, 72, 5, 1979, p. 355-6.

3) Wagner, N.R., The Faceless Clock,
<u>The Mathematics Teacher</u>, 70, 9, 1977, p.765.