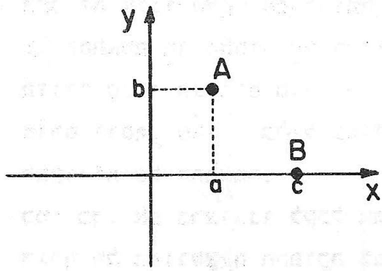
מערכת צירים מקבילים

מאת: אלכס פרידלנדר וגרשון רוזן
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

מ ב ו א

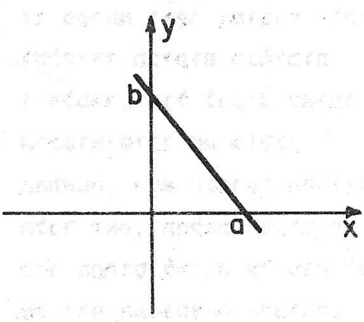
שרטוט גרפים במערכת צירים קרטזית הוא דבר נפוץ ומוכר מאוד. בכל זאת מתעוררים קשיים בקרב תלמידים הלומדים נושא זה לראשונה. יתכן ומקורם של קשיים אלה הוא בכך:



שרטוט 1

א) אחרי לימוד סימון נקודות במישור ומושג ההתאמה, אנחנו ממחישים את ההתאמה בין שני מספרים, $a \mapsto b$, בעזרת נקודה A(a,b) (ראה שרטוט 1). לתלמיד הנמצא בתחילת לימוד נושא זה, קשה לראות בנקודה אחת כממלאת תפקיד מורכב כזה.

ב) במערכת קרטזית, ציר x מייצג את תחום ההתאמה וציר y את הטווח. אך אם נקודה B(c,0) נמצאת על גרף ההתאמה, היא מקבלת משמעות אחרת: היא הנציגה של ההתאמה $c \mapsto 0$. קושי דומה מתעורר לגבי הנקודות שעל ציר y.

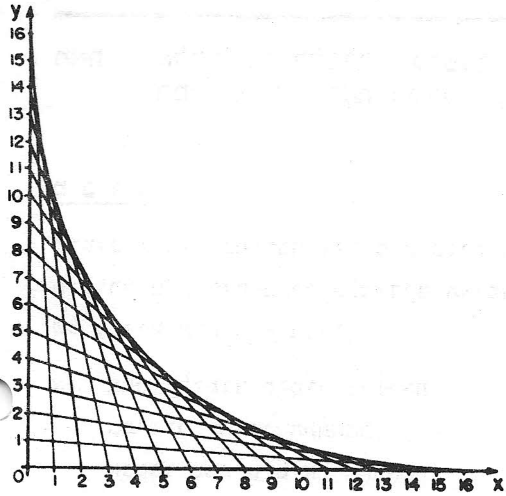


שרטוט 2

אפשר להתגבר על הקשיים האלה, אם נציג התאמה בעזרת קבוצת ישרים. במקרה זה, כל ישר מחבר איבר מן התחום (ציר x) עם תמונתו בטווח (ציר y). כך, למשל, את ההתאמה $a \mapsto b$ נציג בעזרת הישר המחבר את הנקודה (a,0) ו (0,b) (ראה שרטוט 2).

כמובן שההצגה הגרפית של התאמה לפי שיטה זו, שונה לגמרי מזו המקובלת.

הצגות גרפיות כאלה יכולות להוביל לתוצאות מעניינות (ברוקהיימר וסלומון, 1976). בשרטוט 3 מובאת, כדוגמה, פרבולה המתקבלת על ידי הצגת ההתאמה $(0 \leq x \leq 16)$ $x \longmapsto 16 - x$. אך גם בשיטה זו, כמו בשיטה המסורתית, מוצגים התחום והטווח על שני ישרים מאונכים זה לזה. מצב זה אינו משקף את היותה של ההתאמה מן התחום אל הטווח; הזוית שבין הצירים מוסיפה גורם נוסף, שאינו כלול בהגדרה המקורית של ההתאמה.



$(0 \leq x \leq 16)$ $x \longmapsto 16 - x$

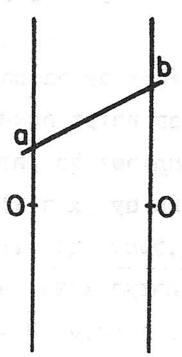
שרטוט 3

כמו כן, אם ברצוננו לקבל את הגרף של הפונקציה ההפוכה לפונקציה בעלת גרף נתון, עלינו להחליף את המקומות בין ציר התחום לציר הטווח, בעזרת סיבוב ב $90°$ סביב הראשית ושיקוף לגבי ציר x. פעולות אלה הן די קשות לביצוע ולהבנה.

סידור ציר התחום וציר הטווח במקביל זה לזה, עשוי לשקף טוב יותר את המצב ההדדי הקיים בין תחום לטווח.

בשרטוט 4 מוצגת ההתאמה $a \longmapsto b$ לפי שיטה זו.

נראה לנו, כי העבודה במערכת זו פשוטה יותר ומובנת יותר לתלמידי הכיתות הנמוכות והתלמיד יכול לרכוש באופן אינטואיטיבי את מושג ההתאמה, ללא הגדרתו המדויקת. מלבד זאת, החלפת המקומות בין התחום לטווח על מנת לקבל את גרף הפונקציה ההפוכה, דורשת רק שיקוף לגבי ישר מקביל לצירים ומרוחק מהם



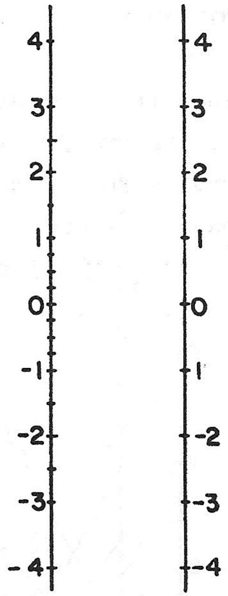
שרטוט 4

במרחקים שווים*.

בכיתות הנמוכות, העבודה במושגים מופשטים עדיין קשה לתלמיד. לפעמים, אפשר להמחיש תכונות של מספרים או של פעולות חשבון בדרך גרפית. נביא כדוגמא תרגיל, שניתן בכיתה ז', בנושא "מספרים הופכיים".

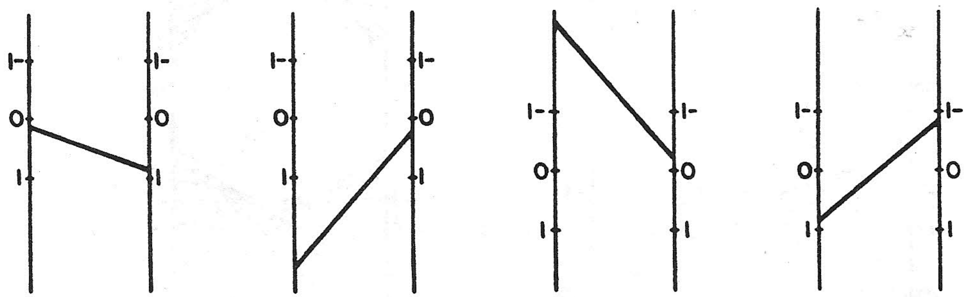
תרגיל

חבר בקו כל מספר שמקומו סומן (בשרטוט 5) על הציר השמאלי (מלבד 0) אל המספר ההפכי לו מן הציר הימני.



שרטוט 5

סמן x ליד המקרים (שרטוט 6) שאינם יכולים בשום פנים ואופן לתאר זוג מספרים הופכיים.



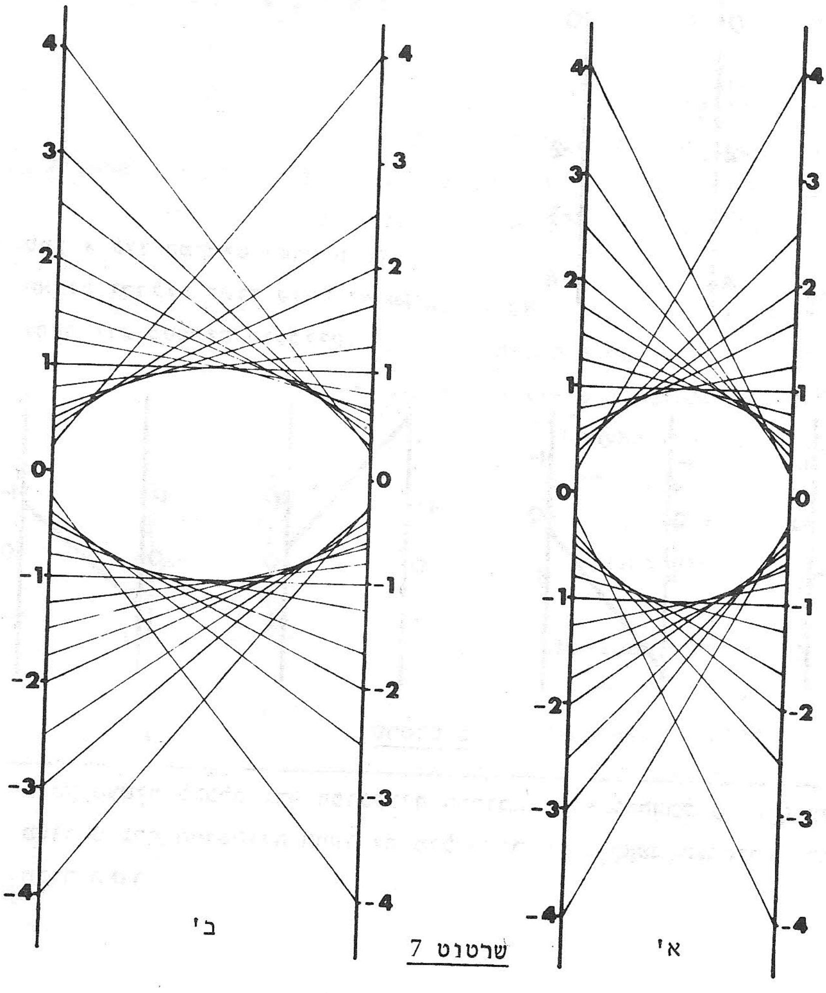
שרטוט 6

*שיטה מעשית לקבלת גרף הפונקציה ההפוכה, היא להסתכל על הדף עליו משורטט גרף הפונקציה המקורית מול מקור אור, כאשר השרטוט מופנה אל מקור האור.

השלם את המשפטים:

- אם מספר הוא גדול מ 1, המספר ההופכי לו ______________________
- אם מספר הוא בין (1-) ל 0, המספר ההופכי לו ______________________
- אם מספר הוא בין 3 ל 4, המספר ההופכי לו ______________________
- ככל שמספר חיובי הוא גדול יותר, המספר ההופכי לו ______________________
- ככל שמספר חיובי קרוב יותר ל 1, המספר ההופכי לו ______________________

התרגיל הובא כדף עבודה. תוך כדי עבודה בכיתה, הסתבר כי בסעיף הראשון ישנו שכר אסתטי בלתי צפוי: הישרים המחברים זוגות של מספרים הופכיים "יוצרים" מעגל החסום בריבוע שבין המספרים 1 ו 1- שעל שני הצירים (ראה שרטוט 7 א'). בחירת מרחק אחר בין שני הצירים, מובילה להווצרות אליפסה (ראה שרטוט 7 ב').



שרטוט 7

חקירה

חקירת הסיבה לתופעה זו היא מעבר לידיעות של תלמיד בכיתה ז', אך היא אפשרית בשלבים מתקדמים יותר (החל מכיתה ט').
נביא שתי הוכחות - הראשונה אלגברית והשניה הנדסית.

ניקח שני צירים מקבילים במרחק שתי יחידות זה מזה.
נוכיח, כי כל ישר המחבר זוג מספרים הופכיים הוא משיק למעגל שמרכזו באמצע הקטע המחבר את נקודות ה 0 של שני הצירים ורדיוסו 1.

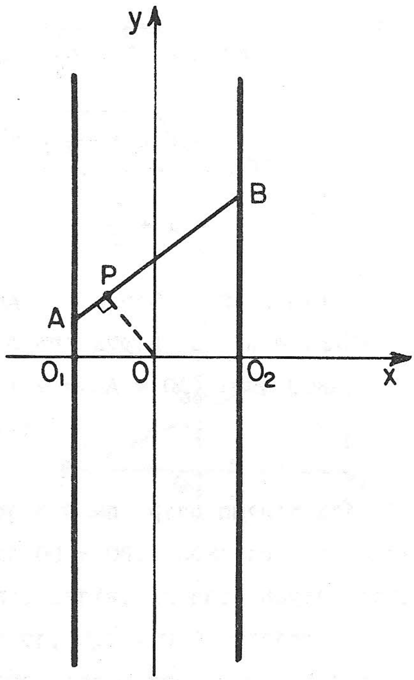
הוכחה א'

נשרטט מערכת צירים קרטזית, שראשיתה בנקודה המיועדת להיות מרכז המעגל. $0_1(-1,0)$ ו $0_2(1,0)$ הן נקודות האפס של הצירים המקוריים. (ראה שרטוט 8) נבחר נקודה כלשהי $A(-1,a)$ $(a \neq 0)$ על הציר המקורי השמאלי ו $B(1,\frac{1}{a})$ הנקודה המתאימה לה על ציר השני. משוואת הישר AB היא:

$$y = \frac{1 - a^2}{2a} x + \frac{a^2 + 1}{2a}$$

משוואת OP המאונך ל AB היא:

$$y = \frac{2a}{a^2 - 1} x$$



שרטוט 8

שעורי נקודת החיתוך של שני הישרים הם: $y = \frac{2a}{a^2 + 1}$ $\quad x = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

ונקודה זו נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = 1$.

הוכחה ב'

נבחר נקודה A כלשהי על הציר השמאלי, במרחק a מן הראשית. (ראה שרטוט 9).

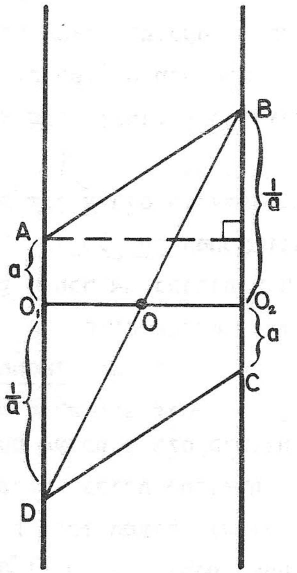
נסמן את הנקודות B, C ו D במרחקים $\frac{1}{a}$, -a ו $-\frac{1}{a}$ מנקודות האפס המתאימות.

בעזרת משפט פיתגורס נמצא

$$AB = \sqrt{2^2 + (\frac{1}{a} - a)^2}$$

$$= \sqrt{2 + \frac{1}{a^2} + a^2}$$

$$= a + \frac{1}{a}$$



שרטוט 9

ABCD היא מקבילית (AD ∥ BC) בעלת שתי צלעות סמוכות שוות ($AD = AB = a + \frac{1}{a}$), ולכן ABCD מעוין.

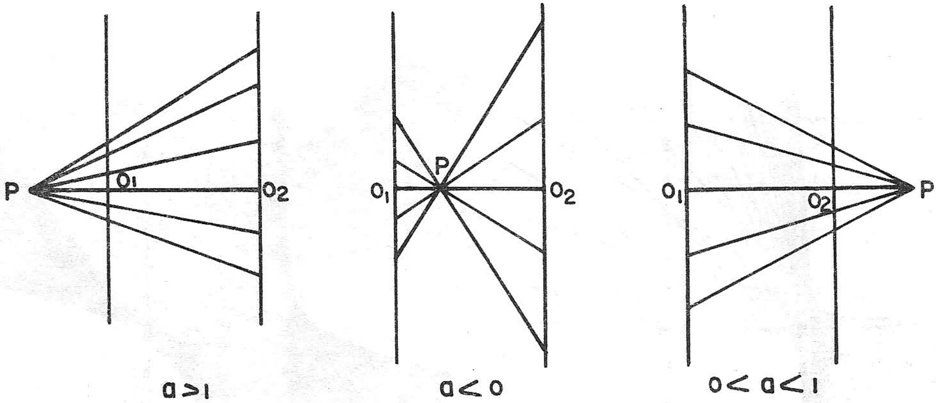
נסמן ב O את נקודת החיתוך בין BD ל O_1O_2. $\Delta BO_2O \cong \Delta DO_1O$ (ז.צ.ז.) ולכן BO = DO. מכאן נסיק כי O היא נקודת הפגישה של אלכסוני המעוין וזהו, כידוע, גם מרכז המעגל החסום.

כמו כן, $O_2O = O_1O$. כלומר, זהו מעגל היחידה.

בחירת מספר a אחר, תוביל למעוין אחר, אך לא תשנה את המרכז ואת הרדיוס של המעגל החסום בו.

גרפים נוספים

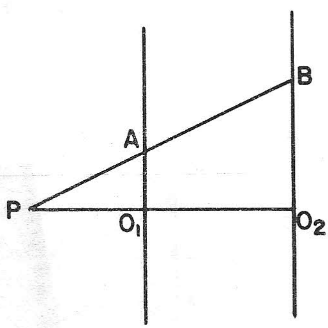
בלימוד הכפל בין מספרים מכוונים או במבוא ללימוד הפונקציה הקווית (המרכז להוראת המדעים, 1971), אפשר למצוא תאורים גרפים של התאמה $x \longmapsto ax$ (ראה שרטוט 10).



$x \longmapsto ax$

שרטוט 10

במקרה זה, אפשר להוכיח את הקיום של נקודת חיתוך משותפת לכל הקוים, בעזרת קטעים פרופורציוניים במשולשים דומים:



ציור 11

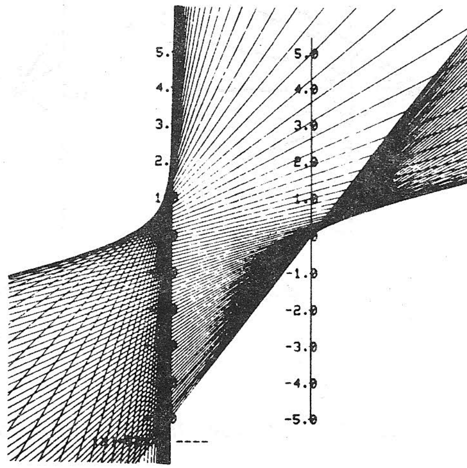
נסמן ב O_1 וב O_2 את נקודות הראשית של שני הצירים (ראה שרטוט 11).
כל ישר AB המקשר מספר x עם הכפולה שלו בקבוע a, חייב לחתוך את הישר O_1O_2 בנקודה P המקיימת $\frac{PO_2}{PO_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = a$

(כי $\Delta PAO_1 \sim \Delta PBO_2$)

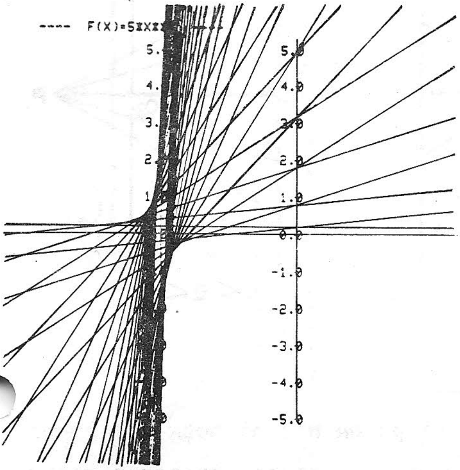
החיפושים אחרי גרפים נוספים יכולים להעשות בשתי דרכים:

א) לבקש מתלמידים לחשב ערכים שונים של פונקציה נתונה ולשרטט את הקווים המתאימים על נייר מילימטרי.
מחשב כיס יכול להועיל הרבה במקרה זה.

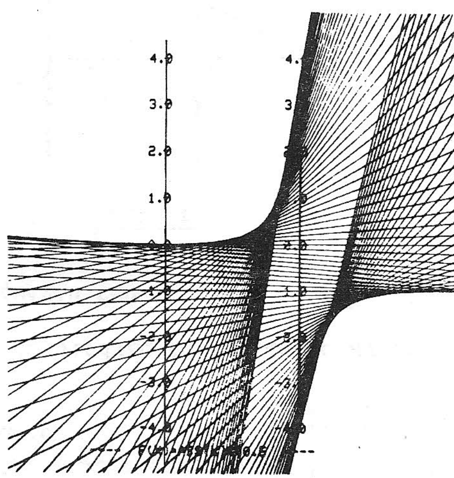
ב) להטיל את עבודת החישוב והשרטוט על המחשב, ולהפוך את המשימה לתרגיל בתכנות. במקרה שלנו, לקח על עצמו את המשימה איתי רבד, תלמיד כיתה י"ב בביה"ס המקיף "רוגוזין", קרית-גת, וביצע אותה בדרך זו.
בשרטוטים 12 ו 13 מובאות מספר דוגמאות של גרפים שהתקבלו.
לעיתים קרובות, מתקבלות עקומות מעניינות, כאשר ממשיכים את הישרים מחוץ לשטח הנמצא בין שני הצירים.



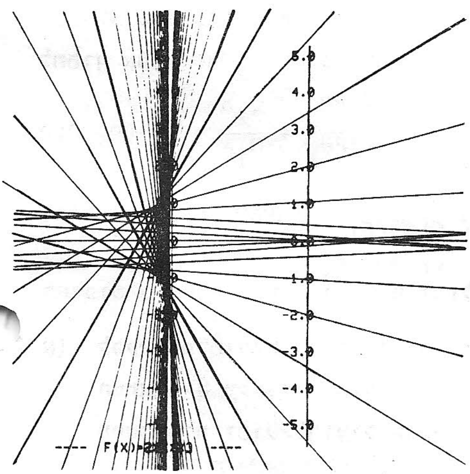
א. $x \mapsto 5^{x}$



ב. $x \mapsto 5x^{2}$



ג. $x \mapsto \pm\sqrt{|x|}$ $(x < 0)$



ד. $x \mapsto 2x^{3}$

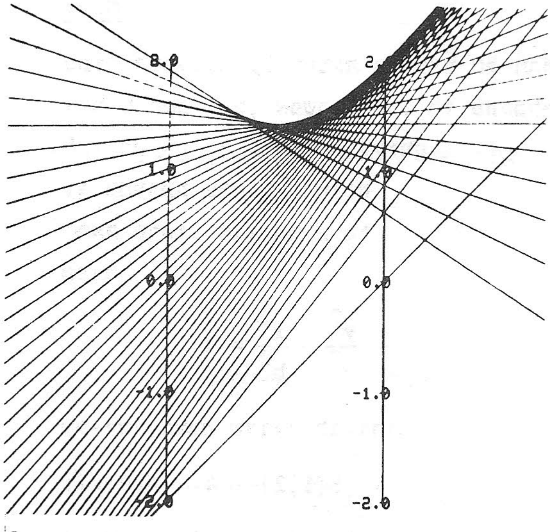
<u>שרטוט 12</u>

זיהוי העקומה הנוצרת יכול לשמש נושא לחקירות נוספות. לדוגמא, ההתאמה

$$x \longmapsto \sqrt{4 - x^2}$$

יוצרת במערכת צירים קרטזית כידוע, חצי מעגל שרדיוסו 2.

בשרטוט 13, אפשר לראות, כי במערכת צירים מקבילים, בה המרחק בין הצירים הוא 2, ההצגה הגרפית של התאמה זו יוצרת היפרבולה (ראה נספח).



$$x \longmapsto \sqrt{4 - x^2}$$

שרטוט 13

סיכום

הגרפים במערכת צירים מקבילים אינם תחליף לאלה שבמערכת הקרטזית, אך הם יכולים לשמש כאמצעי המחשה טוב למושג ההתאמה ולגילוי תכונות של מספרים ושל פעולות חשבון.

שיטה זו להצגה גרפית של התאמה הינה קלה להבנה בכיתות הנמוכות, ואפשר להעזר בה גם ביצירת תרגילי חקירה לתלמידים מתקדמים בכיתות גבוהות יותר.

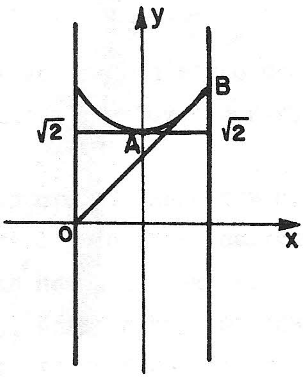
מסקנה חשובה שתלמיד יכול להסיק מטיפול בגרפים מסוג זה היא שגרף אינו תלוי בכלל ההתאמה בלבד, אלא גם במערכת הצירים בה עובדים.

עבודה במערכת צירים מקבילים דורשת כלים מתמטיים פשוטים, ועשויה לגרום הנאה והרחבת אופקים.

נספח

מתוך הסתכלות על ההצגה הגרפית של ההתאמה $x \longmapsto \sqrt{4 - x^2}$ במערכת צירים מקבילים, אפשר לשער, כי מתקבלת היפרבולה.

לפי השערה זו, משוואת עקומה זו במערכת צירים קרטזית (ראה שרטוט 14) תהיה מן הצורה



שרטוט 14

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

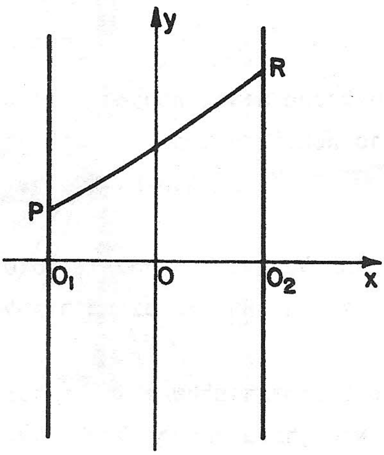
על-ידי הצבת שעורי הנקודות

$A(0,\sqrt{2})$ ו $B(1,2)$

הנמצאות על העקומה, אפשר לקבוע כי מדובר בהיפרבולה

$$\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$$

עתה, נותר לוודא, כי השערה זו אמנם נכונה.



שרטוט 15

הוכחה:

נשרטט מערכת צירים קרטזית, שראשיתה באמצע הקטע O_1O_2.

$O_1(-1,0)$ ו $O_2(1,0)$

הן נקודות האפס של הצירים המקבילים המקוריים (ראה שרטוט 15).

תהי $P(-1,k)$ $-2 \leq k \leq 2$ נקודה כלשהי על הציר השמאלי.

$R(1\ ,\ \sqrt{4 - k^2})$ תהיה הנקודה המתאימה ל P על הציר הימני.

עלינו להראות, כי הישר PR משיק להיפרבולה $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$.

משוואת PR היא $y = \frac{\sqrt{4 - k^2} - k}{2}x + \frac{k + \sqrt{4 - k^2}}{2}$.

אם נסמן בקצרה את משוואת PR $y = mx + n$, תנאי להשקת PR להיפרבולה $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ הוא $n^2 = a^2 - b^2m^2$.

אפשר לבדוק בקלות, כי הקשר הזה אמנם מתקיים עבור הפרמטרים שלנו.

ביבליוגרפיה

1. מ. ברוקהיימר, י. סלומון, "מספר הערות אודות הפרבולה", שבבים, מס' 4, 1976.

2. המרכז הישראלי להוראת המדעים, אלגברה חלק ב', ירושלים, 1971.