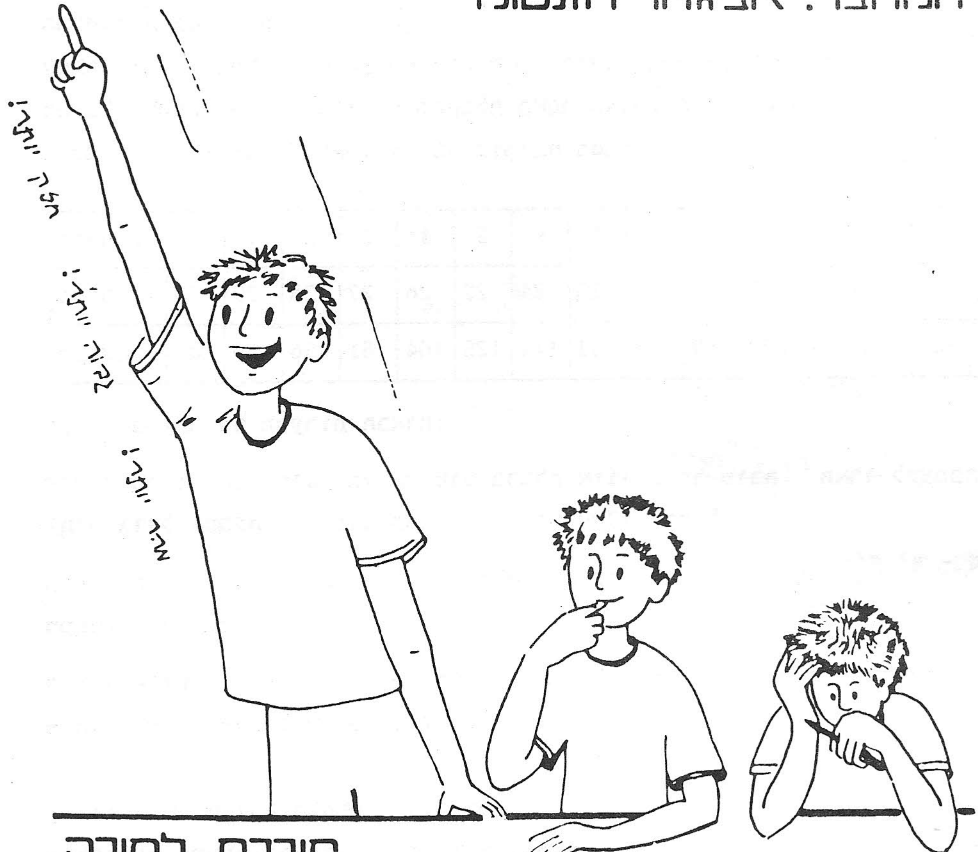
מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר. אביגדור רוזנטולר



חוברת למורה

מס' 2

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

בעיות מינימום מכסימום בעזרת נוסחאות של כפל מקוצר

בכיתה ט' רמה א' הצגתי לתלמידים כשעורי בית את הבעיה הבאה: "מבין זוגות המספרים שסכומם שווה ל 30 מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית. מהי המכפלה המכסימלית?".
למחרת הביאו התלמידים את תשובותיהם. רובם מצאו את התשובה המספרים הנכונה: המכפלה המכסימלית 225 והיא מתקבלת כאשר הגורמים שווים ל 15.
התלמידים ה"חרוצים" תארו את בדיקותיהם בטבלה:

מספר I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
מספר II	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
מכפלה	0	29	56	81	104	125	144	161	176	189	200	219	216	221	224	225

נשמעו בכיתה גם ההערות הבאות:

תלמיד אחד: אני חושב כי הרישום בטבלה איננו שיטה טובה. תארו לעצמכם מה יהיה גודל הטבלה אם סכום המספרים יהיה 1980, למשל?

תלמיד שני: בדקנו רק מספרים שלמים. אולי ניתן למצוא שני שברים אשר מכפלתם מכסימלית.

תלמיד שלישי: אחי הלומד בכיתה י"ב פתר לי את השאלה בעזרת נגזרות, אבל אנחנו לא יודעים להשתמש בנגזרות.

בסיכומה של השיחה הבטחתי לתלמידים כי נלמד לפתור בעיה זו ואחרות העוסקות במינימום ומכסימום מבלי להשתמש בנגזרות.

נעזר, לשם כך בנוסחאות לכפל מקוצר.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

בנושא זה נעסוק בחוברת זו. תחילה נביא חמישה עקרונות כלליים ולאחר מכן שתי קבוצות של בעיות. בקבוצה הראשונה ניתן להסתמך על העקרונות הכלליים ובקבוצה השניה הבעיות קשות יותר ולפתרונן דרוש פיתוח מורכב. ראוי להדגיש כי בגישה המובאת בחוברת זו, הפותר צריך להחליט בעצמו בכל מקרה אם המדובר בבעית מינימום או מכסימום.

בהצלחה!

המחבר

כסלו, תשמ"א

<u>שאלה מס' 1</u>

סכום שני מספרים שווה 1980, מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית.

נסמן את שני המספרים ב a ו b , $a + b = 1980$

נרשום זהויות:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}$$

נתון כי, $a + b = 1980$

לכן: $$ab = \frac{1980^2 - (a - b)^2}{4}$$

$(a - b)^2$ הוא מספר לא שלילי, המכפלה ab תהיה מכסימלית אם ההפרש $a - b$ יהיה אפס, כלומר עבור $a = b$.

נתון כי: $a + b = 1980$ ולכן התשובה היא: $a = b = 990$

עתה ננסח עקרון כללי:

<u>עקרון א'</u>

מכפלת שני מספרים ממשיים חיוביים, אשר סכומם קבוע היא מכסימלית, כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה: נתונים שני מספרים ממשיים חיוביים a ו b , אשר סכומם $a + b = m$.
m מספר קבוע.

יש להוכיח כי מכפלת ab היא מכסימלית, כאשר $a = b$.

נרשום זהויות:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}$$

נתון כי: $a + b = m$ ולכן,

$$ab = \frac{m^2 - (a - b)^2}{4}$$

$(a - b)^2$ הוא מספר לא שלילי, המכפלה ab תהיה מכסימלית אם ההפרש $a - b$ יהיה אפס, כלומר עבור $a = b$.

<u>שאלה מס' 2</u>

בין כל המלבנים אשר שטחם 100 סמ"ר, האם קיים מלבן אשר היקפו מינימלי או מכסימלי? מצא אותו.

נסמן את צלעות המלבן ב x ו y . השטח xy וההיקף $2(x + y)$.
המכפלה xy נתונה ועלינו לחקור את הסכום $x + y$.

נרשום זהויות:

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy$$

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

$$x + y = \sqrt{(x - y)^2 + 4xy}$$

נתון $xy = 100$ ולכן:

$$x + y = \sqrt{(x - y)^2 + 400}$$

$(x - y)^2$ הוא מספר לא שלילי, הסכום $x + y$ יהיה מינימלי אם ההפרש $x - y$ יהיה אפס, כלומר עבור $x = y$.

נתון כי $xy = 100$ ולכן התשובה היא: ריבוע אשר אורך צלעו 10 ס"מ הוא בעל ההיקף המינימלי בין המלבנים אשר שטחם 100 סמ"ר.

עקרון ב'

סכום שני מספרים ממשיים חיוביים, אשר מכפלתם קבועה, הוא מינימלי, כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים ממשיים וחיוביים a ו b אשר מכפלתם $ab = m$.

נרשום זהויות:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$a + b = \sqrt{(a - b)^2 + 4ab}$$

נתון כי: $ab = m$ ולכן:

$$a + b = \sqrt{(a - b)^2 + 4m}$$

כמו בהוכחה הקודמת הערך המינימלי יתקבל כאשר $a - b = 0$ כלומר, עבור $a = b$.

עקרון ג'

סכום ריבועיהם של שני מספרים, אשר סכומם קבוע הוא מינימלי כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים a ו b, אשר סכומם $a + b = m$, m מספר קבוע.
אנחנו מתעניינים בסכום ריבועיהם $a^2 + b^2$.

נרשום זהויות:

$$a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$$

הערך המינימלי של סכום הריבועים יתקבל כאשר $a = b$.

עקרון ד'

מכפלת שני מספרים חיוביים, אשר סכום ריבועיהם קבוע, היא מכסימלית כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים a ו b , $a^2 + b^2 = m$ ו m מספר קבוע.
אנחנו מתענינים במכפלה ab .

נרשום זהויות:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$$

$$4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$a^2b^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{4}$$

$$ab = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}}{2}$$

הערך המכסימלי של המכפלה יתקבל כאשר $a = b$.

עקרון ה'

סכום ריבועיהם של שני מספרים חיוביים אשר מכפלתם קבועה, הוא מינימלי כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים a ו b , $ab = m$ ו m מספר קבוע. אנחנו מתעניינים בסכום ריבועיהם $a^2 + b^2$.

נרשום זהויות:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}$$

הערך המינימלי של סכום הריבועים יתקבל כאשר $a = b$.

להלן נביא פתרונות לבעיות שהוצגות לתלמידים. נדגיש כאן כי בגירסה המופיעה בחוברת לתלמיד, מתבקש הפותר להחליט אם המדובר בבעית מינימום או מכסימום ולהשלים את ניסוח השאלה.

קבוצה ראשונה של בעיות:

1. *סכום שני מספרים שווה ל 12345. מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית.*

בדומה או על סמך עקרון א' אפשר למצוא כי המספרים שווים זה לזה וכל אחד מהם שווה ל 6172.5.

2. *סכום שני מספרים שווה 212. מה צריכים להיות שני המספרים כך שסכום ריבועיהם הוא מינימלי?*

בדומה או על סמך עקרון ג' אפשר למצוא כי המספרים שווים זה לזה וכל אחד מהם שווה ל 106.

3. *מבין זוגות המספרים הלא שליליים שסכום ריבועיהם הוא 50, מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית.*

בדומה או על סמך עקרון ד' אפשר למצוא כי המספרים שווים זה לזה וכל אחד מהם שווה ל 5.

4. *בין כל המלבנים בעלי היקף נתון 100, איזהו בעל השטח המכסימלי? חשב את שטחו.*

נסמן את צלעות המלבן ב a ו b .

ואז $2a + 2b = 100$

או

$$a + b = 50$$

בדומה או על סמך עקרון א' אפשר להראות כי מבין כל המלבנים הריבוע שאורך צלעו 25 ס"מ הוא בעל השטח המכסימלי - 625 סמ"ר.

5. *הוכח: בין כל המלבנים ששטח כל אחד מהם S, המלבן בעל ההיקף המינימלי הוא ריבוע.*

בדומה או על סמך עקרון ב' אפשר להוכיח כי הריבוע הוא בעל ההיקף המינימלי.

6. *בין כל המלבנים בעלי היקף נתון p, איזהו בעל האלכסון הקטן ביותר? מצא את צלעותיו.*

נסמן את צלעות המלבן ב a ו b,

היקפו: $2a + 2b = p$

$$a + b = \frac{p}{2}$$

בדומה או על סמך עקרון ג' אפשר להראות כי בין כל המלבנים בעל היקף נתון p, הריבוע שאורך צלעו $\frac{p}{4}$ הוא בעל האלכסון הקטן ביותר.

7. *בין כל המלבנים ששטחם קבוע ושווה ל S, איזהו בעל האלכסון הקטן ביותר? מצא את צלעותיו.*

בדומה או על סמך עקרון ה' ניתן להראות כי הריבוע שאורך צלעו הוא $\sqrt{S}$ הוא בעל האלכסון הקטן ביותר.

8. *הוכח כי מבין כל המלבנים בעלי אלכסון קבוע ושווה ל d, בעל השטח הגדול ביותר הוא הריבוע.*

נסמן את צלעות המלבן ב x ו y, ולפי משפט פיתגורס $x^2 + y^2 = d^2$.

שטח המלבן שווה ל xy .

בדומה או על סמך עקרון ד' אפשר להראות כי הריבוע הוא בעל השטח הגדול ביותר.

9. *הוכח, כי למשולש ישר-זווית בעל יתר קבוע, יש שטח מכסימלי כאשר ניצביו שווים.*

נסמן את ניצבי המשולש ישר הזווית ב a ו b ואת יתרו ב c.

לפי משפט פיתגורס $a^2 + b^2 = c^2$, c^2 מספר קבוע.

שטח המשולש שווה ל $\frac{ab}{2}$.

בדומה או על סמך עקרון ד' אפשר להראות כי שטח המשולש מכסימלי כאשר $a = b$.

10. *בין כל המשולשים ששטח כל אחד מהם 32 סמ"ר, איזהו המשולש שבו סכום הבסיס והגובה עליו הוא הקטן ביותר? חשב את הבסיס והגובה.*

נסמן את בסיס המשולש ב a ואת הגובה עליו ב h .

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$\frac{a \cdot h}{2} = 32$$

$$a \cdot h = 64$$

בדומה או על סמך עקרון ב' אפשר להוכיח כי הסכום המינימלי של הגובה והבסיס הוא 16 ס"מ כאשר $a = h = 8$.

11. *נתון:* x ו y *הם מספרים ממשיים וחיוביים, כאשר* $xy = 36$.
מצא את הערך המינימלי של $x + y$.

בדומה או על סמך עקרון ב' אפשר למצוא כי הסכום המינימלי הוא 12.

12. *נתון:* x ו y *הם מספרים ממשיים וחיוביים, כאשר* $x + y = 18$.
מצא את הערך המינימלי של $x^2 + y^2$.

בדומה או על סמך עקרון ג' אפשר למצוא כי הערך המינימלי של $x^2 + y^2$ הוא 162.

13. *נתון:* x ו y *הם שני מספרים ממשיים וחיוביים, כאשר* $x^2 + y^2 = 72$.
מצא את הערך המכסימלי של xy.

בדומה או על סמך עקרון ד' אפשר למצוא כי הערך המכסימלי של xy הוא 36.

14. *נתון:* $a + b = 1$. *מצא את הערך המינימלי של* $a^2 + b^2$.

בדומה או על סמך עקרון ג' אפשר למצוא כי הערך המכסימלי הוא $\frac{1}{2}$.

ניתן להגיע לתשובה גם בדרך נוספת.

נעלה את השוויון הנתון בריבוע:

ברור כי
$$\begin{cases} (a+b)^2 = 1 \\ (a-b)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 1 \\ a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \end{cases}$$

נחבר את התבניות
$$2a^2 + 2b^2 \geq 1$$

$$2(a^2 + b^2) \geq 1$$

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

מכאן רואים כי הערך המינימלי של $a^2 + b^2$ הוא $\frac{1}{2}$.

קבוצה שניה של בעיות:

15. *נתון:* $a + b = 1$. *מצא את הערך המינימלי של* $a^4 + b^4$.

נעלה את השוויון הנתון בריבוע:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1$$

ברור כי $$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

נחבר את התבניות $$2a^2 + 2b^2 \geq 1$$

מכאן נובע $$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

נעלה את (1) בריבוע $$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$$

נחבר את שני האי-שוויונות האחרונים $$2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4}$$

מכאן נובע $$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$$

מכאן, הערך המינימלי של $a^4 + b^4$ הוא $\frac{1}{8}$.

16. *נתון* $a + b = 1$. *מצא את הערך המינימלי של* $a^8 + b^8$.

נעלה את השוויון הנתון בריבוע:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1$$

ברור כי $$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

נחבר את התבניות $$2a^2 + 2b^2 \geq 1$$

מכאן נובע $$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

נעלה את (1) בריבוע $$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}$$

ברור כי $$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$$

נחבר את שני האי-שוויונות $2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4}$

מכאן נובע $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$ (2)

נעלה את (2) בריבוע $a^8 + 2b^4b^4 + b^8 \geq \frac{1}{64}$

ברור כי $a^8 - 2a^4b^4 + b^8 \geq 0$

נחבר את שני האי-שוויונות $2a^8 + 2b^8 \geq \frac{1}{64}$

מכאן נובע $a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$

מכאן, הערך המינימלי של $a^8 + b^8$ הוא $\frac{1}{128}$.

17. *מצא את ערכה המינימלי של הפונקציה* $y = \sin^4x + \cos^4x$.

ידוע כי $\sin^2x + \cos^2x = 1$

נסמן $\sin^2x = a$; $xos^2x = b$

אם כך נתון $a + b = 1$, ויש למצוא את הערך המינימלי של $a^2 + b^2$.

זוהי בדיוק בעיה מס' 14 והערך המינימלי של הפונקציה הוא $\frac{1}{2}$.

18. *מצא את ערכה המינימלי של הפונקציה* $y = \sin^8x + \cos^8x$.

בדומה או על סמך בעיה מס' 15 אפשר למצוא כי הערך המינימלי של הפונקציה הוא $\frac{1}{8}$.

19. *מצא את ערכה המינימלי של הפונקציה* $y = \sin^{16}x + \cos^{16}x$.

בדומה או על סמך בעיה מס' 16 אפשר למצוא כי הערך המינימלי של הפונקציה הוא $\frac{1}{128}$.

20. נתון כי a ו b הם שני מספרים ממשיים חיוביים, אשר מכפלתם ab היא מספר קבוע. מצא תנאי לכך שהסכום 3a + 7b יהיה מינימלי.

נרשום זהויות:

$$9a^2 + 42ab + 49b^2 = 9a^2 - 42ab + 49b^2 + 84ab$$

$$(3a + 7b)^2 = (3a - 7b)^2 + 84ab$$

$$3a + 7b = \sqrt{(3a - 7b)^2 + 84ab}$$

הערך המינימלי יתקבל כאשר $3a + 7b = 0$ כלומר כאשר $3a = 7b$ או $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$.

21. נסח והוכח עקרון כללי על סמך בעיה מס' 20.

נתון כי a ו b הם שני מספרים ממשיים חיוביים, אשר מכפלתם ab היא מספר קבוע. הוכח כי קומבינציה לינארית שלהם ma + nb מקבלת ערך מינימלי כאשר $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$.

נרשום זהויות:

$$m^2a^2 + 2mabn + n^2b^2 = m^2a^2 - 2mabn + n^2b^2 + 4mabn$$

$$(ma + bn)^2 = (ma - bn)^2 + 4mabn$$

$$ma + bn = \sqrt{(ma - bn)^2 + 4mabn}$$

הערך המינימלי של $ma + bn$ יתקבל כאשר $ma - bn = 0$ כלומר $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$.

22. מצא את הערך המינימלי של $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, כאשר $x > 0$; $y > 0$ ו $x + y = 20$.

נפשט את הביטוי הנתון:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{20}{xy}$$

כדי למצוא את הערך המינימלי של $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, נמצא את ערכו המינימלי של הביטוי $\frac{20}{xy}$.

כדי למצוא את הערך המינימלי של $\frac{20}{xy}$, יש למצוא את הערך המכסימלי של xy, כאשר $x > 0$; $y > 0$ ו $x + y = 20$.

על סמך עקרון א', הערך המכסימלי הוא 100 (כאשר $x = y = 10$).
והערך המינימלי של $\frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ הוא 0.2.

23. *נתון $a + 2b = 1$, כאשר a ו b הם מספרים חיוביים. מצא את הערך המכסימלי של ab.*

קל להראות כי:

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = a^2 - 4ab + 4b^2 + 8ab$$

$$(a + 2b)^2 = (a - 2b)^2 + 8ab$$

$$8ab = (a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$$

$$ab = \frac{(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2}{8}$$

$$ab = \frac{1^2 - (a - 2b)^2}{8}$$

הערך של ab הוא מכסימלי כאשר $a - 2b = 0$ ושווה ל $\frac{1}{8}$.

24. חשב את *הערך המינימלי של הפרנקציה* $y = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

נפשט את הביטוי הנתון:

$$y = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$= x(x + 3)(x + 1)(x + 2)$$

$$= (x^2 + 3x)[(x^2 + 3x) + 2]$$

$$= (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x)$$

לביטוי שקבלנו נוסיף ונחסר 1

$$y = (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 - 1$$

$$= (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$$

ערך מינימלי של y יתקבל כאשר $(x^2 + 3x + 1)^2 = 0$.

הערך המינימלי של y הוא -1.

25. *מצא את הערך המינימלי של הביטוי* $a^2 + ab + b^2$, כאשר $a + b = 10$; $a > 0$; $b > 0$.

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ab$$

$$= (a + b)^2 - ab$$

$$= 100 - ab$$

כדי לקבל את הערך המינימלי של הביטוי הנתון, אנו צריכים לחסר מ 100 את הערך המכסימלי של ab, כאשר $a + b = 10$.

על סמך עקרון א' הערך המכסימלי של ab הוא 25 (כאשר $a = b = 5$)
ולפיכך הערך המינימלי של הביטוי הנתון הוא:

$$a^2 + ab + b^2 = 100 - 25 = 75$$

26. *במעגל בעל רדיוס R יש לחסום מלבן.*

הוכח: בין כל המלבנים שאפשר לחסום במעגל זה, הגדול בשטחו הוא ריבוע. חשב את שטחו.

נסמן ב R את רדיוס המעגל.

נסמן את צלעות המלבן ב x ו y .

שטח המלבן הוא $S = xy$

לפי משפט פיתגורס

$$x^2 + y^2 = 2R^2 \quad (R \text{ מספר קבוע})$$

על סמך עקרון ד', הערך הגדול ביותר עבור S יתקבל עבור ריבוע שבו $x = y$.

מכאן, $x^2 + x^2 = 4R^2$

ולכן שטח הריבוע הוא $x^2 = 2R^2$.

27. *איזהו המספר החיובי, שהסכום שלו ושל ההופכי לו קטן ביותר?*

קל לראות כי אם נסמן את המספר החיובי ב x ואת ההופכי ב $\frac{1}{x}$, אז:

$$(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - x^2 + 2x\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

כלומר $(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2 = 4$

מכאן מקבלים $(x + \frac{1}{x})^2 = (x - \frac{1}{x})^2 + 4$

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{(x - \frac{1}{x})^2 + 4}$$

אם אנו רוצים לקבל ערך מינימלי ל $x + \frac{1}{x}$, אנו צריכים להוסיף למספר הקבוע 4 את הערך המינימלי של $(x - \frac{1}{x})^2$.

$$(x - \frac{1}{x})^2 = 0$$

$$x - \frac{1}{x} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

תשובה: המספר החיובי שווה ל 1.

הבעיה הבאה הוצעה על ידי תלמידים בחוג למתמטיקה בנתניה.

28. *מצא את ערכי x ו y כאשר ערך הביטוי*
$x^3 + y^3 + xy$ הוא הקטן ביותר ו $x + y = 1$.

הערה: בחוברת לתלמיד נפלה טעות בהדפסת השאלה.

נפרק לגורמים את $x^3 + y^3$ ונקבל:

$$x^3 + y^3 + xy = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$$

לפי עקרון ג' סכום הריבועים הוא מינימלי כאשר $x = y = \frac{1}{2}$.