שמור על הסדר!

מאת: אלכס פרידלנדר

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

ראשית הדברים בחשבון......

מאמרם של G. Lappan ו M. J. Winter [1] מציג סדרת פעילויות בלימוד סדר פעולות החשבון בין מספרים. נציג סקירה קצרה של פעילויות אלה, מבלי לדון באיסטרטגיות פתרון ובמטרות המובאות במקור:

פעילות א.

פתור:

1. $6 + (7 \cdot 8) + 9 =$ ________
2. $6 + 7 \cdot 8 + 9 =$ ________
3. $(6 + 7) \cdot 8 + 9 =$ ________
4. $6 + 7 \cdot (8 + 9) =$ ________
5. $(6 + 7) \cdot (8 + 9) =$ ________

פעילות ב.

רשום סוגריים במקומות המתאימים:

1. $7 + 5 \cdot 11 + 13 = 288$
2. $7 + 5 \cdot 11 + 13 = 145$
3. $7 + 5 \cdot 11 + 13 = 75$

פעילות ג.

רשום סוגריים וגם סימני פעולות חשבון במקומות המתאימים:

1. 19 15 13 = 38
2. 19 15 13 = 3705
3. 19 15 13 = 272
4. 19 15 13 = 47
5. 19 15 13 = 298

6.* 19 15 13 = 21.92307

פעילות ד.

I רשום סימני פעולות חשבון וגם סוגריים במידת הצורך:

1. 4.7 5.1 9.4 = 33.37

2. 4.7 5.1 9.4 = 2.55

3. 4.7 5.1 9.4 = 0.4

II השלם:

1. $5.14 \cdot \_\_\_\_\_ = 37.1622$

2. $\_\_\_\_\_ : 39.8 = 5.1$

3. $3.1 \cdot \_\_\_\_\_ + 4.2 = 28.07$

4. $3.1 \cdot (\_\_\_\_\_ + 4.2) = 36.89$

פעילות ה' היא שעשועון לעבודה בעזרת מחשב כיס, ומסתמכת על הפעילויות הקודמות.

...והמשך באלגברה!

הצעות לפעילויות דומות הובאו ברשימה "פישוט תבניות פשוטות" [2], אך כאן היה הנושא קשור לאלגברה לכיתות ז'-ח'.

סדר פעולות בפישוט תבניות מספר הווה מאז ומתמיד קושי, אף כי להלכה, נושא הסדר אמור להיות מוכר מלימוד החשבון.

בדרך כלל, מושקע מאמץ רב בגיוון ובאירגון התירגול בלימוד החשבון, אך נוטים למעט בכך בלימוד האלגברה, אולי מתוך הנחה, כי תלמידים "מבוגרים יותר" אינם זקוקים ל"תעלולים" מיוחדים. כדי לשמור על "האיזון" בין החשבון לאלגברה מבחינה זו, נביא הצעה להמשך הפעילויות החשבוניות שנסקרו, תוך הבלטת הדמיון בין שני התחומים. בד זו, נדגיש, כי אפשר להחיל את רוב הפעילויות הנהוגות בחשבון גם על לימוד המיומנויות האלגבריות.

פעילות א.

I *פשט:*

1. $x + x \cdot x - x =$

2. $(x+x) \cdot x - x =$

3. $x + x \cdot (x-x) =$

4. $(x+x) \cdot (x-x) =$

5. $x + x \cdot x(-x) =$

על-ידי הצגת תרגילים "כמעט" זהים מנסה פעילות זו למקד את תשומת הלב לסדר פעולות החשבון בלבד. כאן משוחרר התלמיד אפילו מן הדאגה של טעות בחישובים.

פישוט ביטויים אלגבריים, הכנסת סוגריים יכולה לשנות את סוג הפעולה (ראה את x - בתרגיל 5). יתכן ובשלבים הראשוניים של לימוד הנושא צריך להמנע מכך.
ככל שהתלמידים מתקדמים יותר, התרגילים נעשים מורכבים יותר ואפשרויות הגיוון גדולות בהתאם.

למשל: II *פשט:*

1. $3 + 2c \cdot 10 - 4c =$

2. $3 + (2c \cdot 10) - 4c =$

3. $(3+2)c \cdot 10 - 4c =$

4. $3 + 2(c \cdot 10 - 4c) =$

5. $3 + 2c \cdot (10-4c) =$

6. $(3+2c) \cdot 10 - 4c =$

7. $(3+2c) \cdot (10-4c) =$

וכן הלאה.

הרחבה של פעילות זו אפשרית, אם נותנים תרגיל דומה לתרגיל 1, ומבקשים מן התלמיד לרשום ולפשט תרגילים רבים ככל האפשר ע"י שימוש בסוגריים.

פעילות ב.

רשום סוגריים במקומות המתאימים:

1. $7 + 5\cdot x - x = 11x$

2. $7 + 5\cdot x - x = 7$

3. $7 + 5\cdot x - x = 0$

4. $7 + 5\cdot x - x = 7 + 4x$

כאן לא ניתן להשתמש בשיקולים של "תוצאה גדולה או תוצאה קטנה" כמו תרגילים דומים בחשבון, אך קיימים שיקולים אחרים:

- בתוצאה נקבל ביטוי ללא x, רק אם נשתמש בביטויים המייצגים מספרים נגדיים (לכן בתרגילים 2 ו 3 $x - x$ חייב להיות בסוגריים).
- בתוצאה נקבל מספרים שאינם קשורים למשתנה, רק אם המספר אינו משתתף במכפלה עם ביטוי אחר המכיל את המשתנה (ראה את המספר 7 בתרגילים 2 ו 4).

מלבד זאת, השיטה של ניסוי וטעיה או רישום שיטתי של כל האפשרויות יכולים להוביל לפתרון הנכון ללא שיקולים נוספים.

בתרגילים מסוג זה, כדאי להמנע משימוש בסוגריים לשינוי סוג הפעולה, אך אפשר לשאול תלמידים מוכשרים גם שאלות מן הסוג

5. $7 + 5\cdot x - x = 7 - 5x^2$

6. $7 + 5\cdot x - x = -7x - 5x^2$

7. $7 + 5\cdot x - x = 34x$

[הפתרונות:
5. $7 + 5\cdot x(-x)$
6. $(7+5\cdot x)(-x)$
7. $7(+5)\cdot x - x$]

השיקולים הדרושים למציאת הפתרונות לתרגילים 5-7 דומים לאלה שיוצגו בפעילות הבאה.

<u>פעילות ג.</u>

רשום את סימני פעולות החשבון החסרים:

1. $6a \quad 7 \quad 2a = 8a + 7$

2. $6a \quad 7 \quad 2a = 40a$

3. $6a \quad 7 \quad 2a = 20a$

4. $6a \quad 7 \quad 2a = 84a^2$

5. $6a \quad 7 \quad 2a = 21$

הפעילות הזו היא די קשה. אפשר להוריד את דרגת הקושי שלה ע"י מתן תרגילים, בהן הפעולות החסרות הן חיבור וחיסור בלבד.

בנוסף לשיקולים שהוזכרו בפעילות הקודמת, אפשר להשתמש כאן בשיקולים נוספים:

- a^2 יכול להתקבל רק ע"י כפל בין שני הביטויים המכילים את a (ראה תרגיל 4).
- ביטוי המכיל את המשתנה יכול להתקבל רק ע"י חיבור או חיסור בין שני הביטויים המכילים את a (ראה תרגילים 1-3).
- מכיוון שהביטויים המופיעים אינם נגדיים, יכולה להתקבל תוצאה ללא משתנה במקרה של חילוק בין הביטויים המכילים את a (ראה תרגיל 5).

בעזרת שיקולים אלה ובעזרת מספר ניסיונות אפשר לקבל את הפתרונות:

$$6a + 7 + 2a = 8a + 7$$

$$6a \cdot 7 - 2a = 40a$$

$$6a + 7 \cdot 2a = 20a$$

$$6a \cdot 7 \cdot 2a = 84a^2$$

$$6a \cdot 7 : 2a = 21$$

<u>פעילות ד.</u>

רשום סוגריים <u>וגם</u> סימני פעולות חשבון במקומות המתאימים:

1. $10 \quad 5y \quad y = 10$
2. $10 \quad 5y \quad y = 14y$
3. $10 \quad 5y \quad y = 0$
4. $10 \quad 5y \quad y = 5$
5. $10 \quad 5y \quad y = 15y^2$

זוהי פעילות המתאימה לתלמידים מוכשרים בלבד ודורשת שימוש בכל השיקולים שהוזכרו לעיל.
כדי לקבל את התחושה הנכונה של דרישות הפעילות הזו, אשאיר לקורא להשתעשע במציאת הפתרונות (שים לב: הפעולה בין 5 ל y נתונה מראש, למרות שהיא אינה מצויינת בפרוש).

<u>פעילות ה.</u>

השלם:

1. $2b \cdot \_\_\_\_\_ = 6b^2$
2. $3z \cdot \_\_\_\_\_ - 6z = 6z$
3. $8y^2 : \_\_\_\_\_ + y = 9y$

התלמידים מסוגלים להתמודד עם שאלות מסוג זה, ע"י ביצוע הפעולות ההפוכות על הביטוי מימין. אם מדובר במספר פעולות, סדר הפעולות חייב להיות הפוך לזה המופיע משמאל.

(למשל: $6b^2 : 2b$ בתרגיל 1

$(6z+6z) : 3z$ בתרגיל 2)

כדי להמחיש את הטענה, כי כמעט כל פעילות בחשבון ניתנת להעברה גם לנושא של פישוט ביטויים אלגבריים, נביא לדוגמא שתי פעילויות נוספות.

פעילות ו.

פשט, ורשום את התשובות בתשבץ:

(3	(2	(1
(6	(5	(4
(9	(8	(7

1. $6 + 2(x+x)$
2. $x + x \cdot 8 + 1$
3. $(x+3x):2 + 8$
4. $-x + 7 + 2 \cdot 2x$
5. $x \cdot 7 + 5 - 2 \cdot x$
6. $3 - (x-8x)$
7. $2\,(2 \cdot x + x \cdot 2) + 2$
8. $-(x-2x) + 9$
9. $2 \cdot (x + 2x) + 4$

בדיקה: אם פתרת נכון, תקבל ריבוע קסם (סכום הביטויים בכל שורה, טור ואלכסון הוא אותו הביטוי).

פעילות ז.

שרטט מסלול יציאה מן המבוך. *(מותר לעבור רק דרך משבצות המכילות פישוטים נכונים).*

כניסה	$a - a \cdot a = 0$	$b + b \cdot b = 2b$	$x \cdot 7 - 5 = 2x$
$a - a \cdot a = a - a^2$	$b + b \cdot b = b + b^2$	$a - a \cdot a = -a$	$3 + 5 \cdot e = 8e$
$b + b \cdot b = 2b^2$	$c + c \cdot 3 = 4c$	$d - d \cdot 2 = -d$	$3 + 5 \cdot e = 5e + 3$
$c + c \cdot 3 = 6c$	$d - d \cdot 2 = 0$	$3y \cdot (-y) = 0$	$x \cdot 7 - 5 = 7x - 5$
$2n - n \cdot 3 = 0$	$2 \cdot m - m = m$	$-4 \cdot p + p = -3p$	$3y(-y) = -3y^2$
$2 \cdot m - m = 0$	$2n - n \cdot 3 = -n$	$3y \cdot (-y) = -3y$	$-4 \cdot p + p = -8p$

ה_ע_ר_ה: בתחילת לימוד נושא הפישוט, מומלץ לבדוק את הפתרון על-ידי הצבת מספר כלשהו במקום המשתנה. במקרה שלנו, הצבת מספרים בפעילויות האלגברית תוביל ישירות לפעילות החשבונית המקבילה.

למשל:

פעילות ב' בחשבון (בדיקה)		פתרון פעילות ב' באלגברה
$(7+5)\cdot 10 - 10 = 110$	הצבה $x = 10$	$(7+5)\cdot x - x = 11x$
$7 + 5\cdot(10-10) = 7$	⟵	$7 + 5\cdot(x-x) = 7$
$(7+5)\cdot(10-10) = 0$		$(7+5)\cdot(x-x) = 0$
$7 + 5\cdot 10 - 10 = 7+4\cdot 10$		$7 + 5\cdot x - x = 7 + 4x$

זאת הזדמנות נוספת להחזיר את התלמיד לתחום החשבון המוכר לו זה מכבר ולהדגיש את הקשר בין שני התחומים האלה: אם הבדיקה המספרית אינה עולה יפה, אפשר להסיק כי יש טעות (בחישוב או בפישוט). אך אם הבדיקה המספרית נותנת שויון אגפים, עדיין תתכן טעות, והיא עשויה להתגלות בהצבות נוספות.

ביבליוגרפיה

1. Lappan, G. & Winter, M.J. "It's What You Do First That Counts...", School Science and Mathematics, 1979, 79,409-414.

2. "פישוט תבניות פשוטות", הערות והארות, 13, 5-7.