מספרים רציונליים בהצגתם העשרונית

מאת: רחל אורבך
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

במאמר זה נראה איך אנו יכולים לנבא את המאפיינים של ההצגה העשרונית עבור מספר רציונלי נתון: סופיות או מחזוריות אינסופית, אורך המחזור, אורך החלק הלא מחזורי.

N הוא מספר רציונלי חיובי, קטן מאחד (הכללה לכל המספרים הרציונליים הינה טריויאלית).

$$N = 0.n_1n_2n_3 \ldots = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3} + \ldots \qquad n_i \in \{0 ,1 \ldots 9\}$$

אם כל ה-n-ים הם אפס החל ממקום מסוים אזי נאמר של-N יש הצגה עשרונית סופית. כמו כן יתכנו מצבים בהם למספר רציונלי תהיה הצגה אינסופית ונראה מה אפשר לגלות על צורתה.

לדוגמא נעקוב אחר בניית ההצגה העשרונית של $\frac{1}{7}$ ע"י תהליך החילוק, תוך שימת לב מיוחדת לשאריות המתקבלות.

	השארית
0.14285714	
$1.00000000 \mid 7$	
0	
10	1
7	
30	3
28	
20	2
14	
60	6
56	
40	4
35	
50	5
49	
10	1
7	
30	3
28	
2	2
⋮	⋮

מבוסס על המאמרים הבאים:

Lichtenberg, D.R., Minicalculators and repeating decimals, The Mathematics Teacher, 71 (Sept. 1978) 524-530.

Hutchinson, Margaret R. Investing the nature of periodic decimals, The Mathematics Teacher 65 (April 1972) 325-327.

תיתכנה פה רק 6 שאריות שונות ובכל פעם שאיזו שארית תופיע בשנית, בהכרח נחזור כבר על פעולות שעשינו. באופן כללי, אם מכנהו של מספר רציונלי מצומצם הוא y, תיתכנה רק $y - 1$ שאריות שונות. אם כן נוכל לסכם שההצגה העשרונית האינסופית של מספר רציונלי $\frac{x}{y}$ (מצומצם) תהיה מחזורית עם אורך מחזור מכסימלי אפשרי: $y - 1$.

את המחזור נסמן בקו מעל הספרה או הספרות החוזרות בשבר ($\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$). המחזור לא מתחיל בהכרח מיד לאחר הנקודה העשרונית ($\frac{7}{120} = 0.058\overline{3}$).

שבר מחזורי, שמחזורו מתחיל מיד לאחר הנקודה העשרונית נקרא **שבר מחזורי טהור**. אם המחזור מתחיל כמה ספרות אחר הנקודה הוא נקרא **שבר מחזורי מושהה (מעורב)**.

נבחן עתה את שתי ההצגות האפשריות של המספר הרציונלי, ההצגה הסופית וההצגה האינסופית המחזורית. אורך החלק הלא מחזורי (כך נוכל להתייחס גם לחלק הסופי בהצגה הסופית) וכן אורך המחזור תלויים אך ורק במכנה (בהנחה שהשבר מצומצם).

ההצגה העשרונית הסופית

משפט: למספר רציונלי $\frac{x}{y}$ תהיה הצגה עשרונית סופית אם ורק אם ל y אין שום גורם חוץ מ 2 או 5.

הוכחה:

א. נניח קודם כל שיש הצגה עשרונית סופית, כלומר $\frac{x}{y} = 0.n_1n_2 \dots n_k$.
ע"י הכפלה ב 10^k נקבל $(\frac{x}{y})10^k = n_1n_2 \dots n_k$.
וזה מספר שלם, כלומר y מחלק את 10^k ואז הגורמים הראשוניים היחידים האפשריים עבור y הם 2 ו 5.

ב. נניח עתה שהגורמים הראשוניים של y הם רק 2 ו/או 5.
כלומר $y = 2^r \cdot 5^s$ (r,s מספרים שלמים לא שליליים)

נסמן ב k את הערך המכסימלי בין r ו s, כלומר $k = \max(r,s)$ אזי y יחלק את 10^k ו k יהיה השלם הקטן ביותר בעבורו זה נכון.
אזי $(\frac{x}{y})\cdot 10^k$ הוא שלם שאינו מסתיים באפס ו $\frac{x}{y} = 0.n_1n_2 \dots n_k$ שבר סופי.
מכאן גם נוכל להגיע למסקנה נוספת שאם $\frac{x}{y}$ הוא מספר רציונלי ו $y = 2^r \cdot 5^s$ אזי ל $\frac{x}{y}$ יש הצגה עשרונית סופית באורך $k = \max(r,s)$.

ההצגה העשרונית המחזורית (אינסופית)

נניח שיש לנו מספר רציונלי $\frac{x}{y}$ (מצומצם) עם הצגה עשרונית אינסופית

$$\frac{x}{y} = 0.n_1n_2 \dots n_k\overline{n_{k+1} \dots n_{k+t}}$$

עם חלק לא מחזורי באורך k ומחזור באורך t.

לפי המשפט הקודם ברור של- y יש גורם שונה מ 2 ומ 5.

נניח $y = 2^r\cdot5^s\cdot c$ כאשר c אינו מכיל את הגורמים 2 ו 5.

ראינו שאורך ההצגה העשרונית הסופית הוא $k = \max(r,s)$, כאשר r ו s הן החזקות המתאימות של הגורמים 2 ו 5. נראה עתה שזהו גם אורך החלק הלא מחזורי של ההצגה העשרונית המחזורית.

$$10^{k+t}(\frac{x}{y}) = n_1n_2 \dots n_kn_{k+1} \dots n_{k+t} \cdot \overline{n_{k+1} \dots n_{k+t}} \qquad (*)$$

$$10^k(\frac{x}{y}) = n_1n_2 \dots\dots\dots n_k \cdot \overline{n_{k+1} \dots n_{k+t}} \qquad (**)$$

מחיסור המשוואה השניה מהראשונה (בהנחה שפעולות אלה הן ברות ביצוע בחשבון האינסופי) נקבל:

$$10^k(10^t-1)(\frac{x}{y}) = d_1d_2 \dots\dots\dots d_{k+t} \qquad (***)$$

כאשר d_{k+t} מתקבל מחישוב $n_{k+t} - n_k$ ובאופן דומה מתקבלים כל ה d-ים.

ההפרש הוא מספר שלם ואז y חייב לחלק את $10^k(10^t-1)$. מכיוון ש $y = 2^r\cdot5^s\cdot c$ ול - c אין גורמים של 2 ו 5, אז $2^r\cdot5^s$ מחלק את 10^k, כלומר $\max(r,s) \le k$.

אילו היה $\max(r,s) < k$ בחילוק $\frac{10^k}{2^r\cdot5^s}$ היינו מקבלים איזו כפולה של 10 ואז ההפרש כולו היה כפולה של 10 ($\boxed{} \cdot 10^{k-\max(r,s)}$).

ספרת היחידות של שלם, שהוא כפולה של 10 חייבת להיות אפס, ואז בהפרש שקבלנו d_{k+t} חייב היה להיות אפס. זה יכול היה להיות רק אם $n_k = n_{k+t}$.

הגענו לסתירה שהרי אם $n_k = n_{k+t}$ אזי המחזור היה $n_k \dots n_{k+t-1}$.

לכן לא יתכן ש $\max(r,s) < k$ ונותר $\max(r,s) = k$.

נסכם את מסקנתנו במשפט הבא:

משפט: אם $\frac{x}{y}$ הוא מספר רציונלי ו $y = 2^r\cdot5^s\cdot c$ כאשר ל c אין גורמים שהם 2 או 5, ו $c \neq 1$ אזי ל $\frac{x}{y}$ יש הצגה עשרונית אינסופית מחזורית עם חלק לא מחזורי באורך $k = \max(r,s)$.

מה יקבע את אורך המחזור t?

מתוך ההפרש שמצאנו: $10^k(10^t - 1)\cdot\frac{x}{2^r\cdot 5^s\cdot c}$ (ראה (***)), שהינו מספר שלם, ברור ש c מחלק את $10^t - 1$.

נניח קיים t' קטן מ- t כך ש c מחלק את $10^{t'} - 1$. אז גם $10^k(10^{t'}-1)\cdot\frac{x}{2^r\cdot 5^s\cdot c} = 10^{k+t'}(\frac{x}{y}) - 10^k(\frac{x}{y})$ הוא מספר שלם.

נסתכל על (*) ו (**) לשם ביצוע החיסור

$$10^{k+t'}(\frac{x}{y}) = n_1n_2\cdots\overline{n_kn_{k+1}\cdots n_{k+t}\cdot n_{k+t'+1}\cdots n_{k+t}}\cdots n_{k+t'+j}$$

כאשר $(t'+j = t)$

$$10^k(\frac{x}{y}) = n_1n_2\cdots n_k\cdot\overline{n_{k+1}\cdots\cdots\cdots n_{k+t}}$$

וכדי שההפרש (שוב בהנחה שהצעדים הם ברי ביצוע בחשבון האינסופי) יהיה מספר מספר שלם חייב להתבטל בחיסור החלק שלאחר הנקודה העשרונית, כלומר $n_{k+t'+i} = n_{k+i}$ לכל i שהוא מספר טבעי. וזה שקול להגדרה שאורך המחזור הוא t'. הנחנו שאורך המחזור הוא t וקבלנו סתירה להנחתנו.

אם כך נוכל להסיק ש t הוא המספר הטבעי המינימלי כך ש c מחלק את $10^t - 1$.

כדי להעזר במשפט האחרון נבנה טבלה של הגורמים הראשוניים של $10^t - 1$.

פירוק לגורמים ראשוניים	$10^t - 1$	t
3^2	9	1
$3^2\cdot 11$	99	2
$3^3\cdot 37$	999	3
$3^2\cdot 11\cdot 101$	9,999	4
$3^2\cdot 41\cdot 271$	99,999	5
$3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$	999,999	6
$3^2\cdot 239\cdot 4649$	9,999,999	7
$3^2\cdot 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137$	99,999,999	8
$3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$	999,999,999	9
$3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$	9,999,999,999	10
⋮	⋮	⋮

דוגמא לשימוש בטבלה:

ננסה לאפיין את ההצגה העשרונית של המספר הרציונלי $\frac{1}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \frac{1}{770}$. היא תהיה מחזורית אינסופית (יש למכנה גורמים שונים מ 2 או 5).

$r = s = 1$ ולכן אורך החלק הלא מחזורי יהיה 1. למציאת אורך המחזור נסתכל על c, $c = 7\cdot 11$, מהטבלה ניתן לראות שה-t הקטן ביותר עבורו $7\cdot 11$ מחלק את $10^t - 1$ הוא $t = 6$. אם כן אורך המחזור יהיה 6.

(ביצוע החילוק יתן: $\frac{1}{770} = 0.0\overline{012987}$)

טבלה מחזורית זו פותחת פתח להרבה שאלות מעניינות.

למשל:

1. אילו הם המספרים הרציונליים בעלי מחזור בן ספרה אחת בלבד?
2. אילו הם כל השברים המצומצמים $\frac{a}{b}$ כך שהצגתם העשרונית היא עשרונית עם מחזור בן שתי ספרות?

עיון בטבלה מראה שיש מספרים ראשוניים, קטנים יחסית, 17 למשל, שאינם מופיעים בטבלה (עד $t = 10$) ומכאן שאורך המחזור המתאים גדול מ 10. אורך המחזור של 17, אם כן, יכול להיות כל מספר שלם בין 11 ל-16. נראה עתה איך נוכל להקל על מציאתו.

כדי להבין את המשפט הבא נגדיר פונקציה הנקראת פונקצית אוילר, וסימנה ϕ, $\phi(y)$ הוא מספר השלמים החיוביים הקטנים מ y, שהם זרים ל y (כלומר אין להם ול y גורמים משותפים).

לדוגמא: עבור $n = 21$, המספרים הקטנים ממנו והזרים לו הם:

1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20

ולכן: $\phi(21) = 12$.

עבור מספר ראשוני p ברור ש $\phi(p) = p - 1$.

עבור מספר לא ראשוני n, $\phi(n) < n - 1$.

משפט: אם $\frac{x}{y}$ הוא שבר מצומצם ול- y אין גורמים ראשוניים שהם 2 או 5 אזי מספר הספרות במחזור הוא גורם של $\phi(y)$. (הוכחה למשפט נמצאת בנספח)

עתה ניגש למציאת אורך המחזור עבור ההצגה העשרונית של $\frac{2}{17}$.

17 הוא ראשוני, אם כן $\phi(17) = 16$ ולכן אורך המחזור יהיה גורם של 16. מכיון שראינו כבר ש 17 איננו מופיע בטבלה החלקית שמלאנו ברור שאורך המחזור יהיה גדול מ 10.

הגורם היחיד של 16, שהוא גדול מ 10, הוא 16, וזה יהיה לכן אורך המחזור.

נראה דוגמא נוספת:

אנו רוצים למצוא את מאפייני ההצגה העשרונית של $\frac{1}{29}$.

29 אינו מופיע בטבלה שרשמנו (עד $t = 10$) ולכן אורך המחזור של $\frac{1}{29}$ יהיה גדול מ 10. $28 = \phi(29)$ ולכן אורך המחזור יהיה גורם של 28. הגורמים היחידים של 28 שהם גדולים מ 10 הם 14 ו 28, ולכן אורך המחזור יהיה או 14 או 28.

נותר לנו לקבוע איזו מבין האפשרויות היא אכן אורך המחזור. ניתן לעשות זאת ע"י בנית המשך הטבלה עד שנוכל להסיק ממנה מהו אורך המחזור. ברור שזו עלולה להיות עבודה מיגעת מאוד. דרך אחרת למציאת אורך המחזור היא ע"י ניצול מחשב הכיס לחישוב איטרטיבי של המחזור.

נדגים את החישוב עבור $\frac{1}{29}$.

אנו משתמשים (בדוגמא) במחשב בעל תצוגה של 8 ספרות. מכיון שישנם מחשבי כיס בהם הספרה האחרונה בתצוגה היא ספרה המתקבלת מעיגול, נתייחס תמיד רק לספרות שלפניה. (להתאמה החישוב למחשבי כיס ללא זכרון נשתמש תמיד בחלק התוצאה שאינו עולה על מספר הספרות בתצוגה. למשל התוצאה 6.554×10^{-6} תהיה לגבינו 0.0000065).

<u>שלבי החישוב:</u>	<u>השבר המחזורי החלקי בשלב המתאים</u>
א. ביצוע החילוק 1:29 במחשב הכיס יתן: 0.0344827 (בלוח התצוגה התקבל 3.448275×10^{-2})	0.0344827
ב. השארית להמשך החלוקה תהיה: $1 - 0.0344827\times29 = 0.0000017$	
ג. מכיון שאנו מעוניינים בספרות, שהרי הגודל שלהן נקבע לפי מיקומן בשבר, נוכל להכפיל את השארית להמשך החלוקה ב 10^7. מביצוע 17:29 במחשב הכיס נקבל: 0.586206 (מהספרה האחרונה, שעלולה להיות פרי עיגול התעלמנו).	0.0344827586206
ד. השארית להמשך החלוקה: $17 - 0.586206\times29 = 0.000026$	

ה. מביצוע 26:29 במחשב הכיס נקבל:

0.896551

בשלב זה כבר ברור לנו שהמחזור אינו בן 14 ספרות, שהרי הספרה ה-15 אינה זהה לראשונה.

עתה נוכל לומר בודאות שהמחזור של $\frac{1}{29}$ הוא בן 28 ספרות.

נמשיך את החישוב למציאת שאר הספרות:

$$0.\underbrace{03448275862068}_{\text{14 ספרות}}96551$$

ו. $26 - 0.896551\times29 = 0.000021$

ז. $0.724137 \longleftarrow 21:29$

0.03448275862068
96551724137

ח. $21 - 0.72413\times29 = 0.000027$

ט. $0.931034 \longleftarrow 27:29$

בשלב זה רואים שאכן החל מהספרה ה-29 המחזור מתחיל לחזור על עצמו.

0.03448275862068
96551724137931

המשפטים שראינו נותנים בידינו כלים לניבוי צורתה של ההצגה העשרונית (אורך החלק הסופי, אורך החלק המחזורי). גם לגבי ההצגה עצמה, ספרות המחזור למשל, ניתן לגלות הרבה דברים מעניינים, שאולי יוכלו לעזור לנו לניבוי המחזור עצמו, או חלק ממנו.

לדוגמא, אם נרשום את כל השברים $\frac{x}{y}$ (כאשר $\frac{x}{y}$ מצומצם וקטן מ 1) עבור y=7

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

$$\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

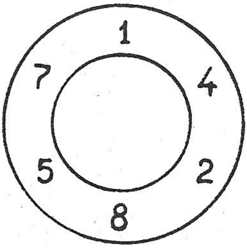
$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$$

$$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$$

$$\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

נראה שהמחזור בכולם בעצם זהה אך נקודה ההתחלה שונה. יש הזזה מעגלית במעבר משבר אחד לאחר.

אם נרשום את ספרות המחזור במעגל נראה שסכום הספרות הנגדיות במעגל הוא תמיד 9.



מעגל עם אותה תכונה נקבל עבור y = 23 ומספרים ראשוניים נוספים.

ישנם דברים מעניינים רבים מסוג זה, חלק מהדברים הוכחו, חלק עדיין נחקרים וכמו שקורה לעתים בתורת המספרים מספר השאלות המועלות בחקירה גדול ממספר אלו הזוכות לפתרון.

נספח:

משפט: אם $\frac{x}{y}$ הוא שבר מצומצם ול- y אין גורמים שהם 2 או 5 אזי מספר הספרות במחזור יהיה גורם של $\phi(y)$.

($\phi(y)$ הוא מספר כל השלמים החיוביים הקטנים מ y שהם זרים ל y, כלומר להם ול y אין כל גורם משותף).

במילים אחרות, אנחנו צריכים להוכיח ש $\phi(y) = K \cdot t$ כאשר t = אורך המחזור ו K היא מספר טבעי.

הוכחה:

בחישוב $\frac{x}{y}$ מספר שיש לו גורם משותף עם y אינו יכול להופיע כשארית. כי אז בשלב החילוק המתאים כשנקבל $x = 0.n_1n_2 \ldots n_i \cdot y + R_i$, אם ל y ול R_i יש גורם משותף הרי שזה יהיה גם גורם משותף של x ו y, דבר שהוא בסתירה להנחתנו ש $\frac{x}{y}$ הוא שבר מצומצם. אם כן רק המספרים הקובעים את $\phi(y)$ יכולים להופיע כשאריות בחישוב $\frac{x}{y}$ ואז $t \leq \phi(y) \leq y - 1$.

יש 2 אפשרויות $t = \phi(y)$ או $t < \phi(y)$.

עבור $t = \phi(y)$ מתקיים $\phi(y) = 1 \cdot t$, 1 הוא מספר טבעי והטענה מוכחת.

עבור $t < \phi(y)$:

בחישוב החילוק של $\frac{1}{y}$ יופיעו רק t שאריות.

ניצור את הטבלה הבאה:

טבלה A: ···

שארית	1			
מנה				

המסכמת את תהליך החילוק של $\frac{1}{y}$

ברור שלא כל $\phi(y)$ השאריות האפשריות יופיעו בטבלה, (הנחנו $t < \phi(y)$). נבחר שארית r שהיא זרה ל y ולא מופיעה בטבלה A, ונבצע את החילוק למציאת ההצגה העשרונית של $\frac{r}{y}$. אורך המחזור (= מס' השאריות) יהיה גם כן t. (מצאנו שאורך המחזור תלוי במכנה בלבד) ונקבל טבלה חדשה:

דוגמא: $y = 39$

$\phi(39) = 24$

שארית	1	10	22	25	16	4	①
מנה	1	0	2	5	6	4	1

סמנו בעיגול את השלב בו שארית חוזרת בשנית. מכאן ברור שאורך המחזור של $\frac{x}{39}$ (מצומצם) קטן מ $\phi(39)$, קבלנו $t = 6$.

טבלה B: ···

			r	שארית
				מנה

וכל השאריות בטבלה זו יהיו שונות מאלה שב A. מכיון שאם היתה שארית אחת זהה הרי שכל הטבלה A היתה מוכלת ב B, אבל A r וגודל הטבלאות זהה ולכן זה לא יתכן.

בשלב זה או $2t = \phi(y)$ והטענה מוכחת או ש $2t = \phi(y)$ ואז ישנה שארית s שהיא ראשונית ביחס ל y ואינה מופיעה בטבלאות B, A.
נחשב את $\frac{s}{y}$ ושוב נקבל t שאריות חדשות, טבלה C.

סה"כ יש לנו עתה $3t$ שאריות זרות ל y. אם $3t = \phi(y)$ הרי הטענה מוכחת ואם $3t < \phi(y)$ נמשיך באותו אופן.

②	8	32	11	5	20	2	שארית
2	8	2	1	5	0	0	מנה

בשלב זה $2t < \phi(y)$
ונבחר $s = 7$ לקבלת טבלה C.

⑦	28	34	19	37	31	7	שארית
7	8	4	9	7	1	0	מנה

סך השאריות השונות הזרות ל 39 שמצאנו הוא $3t = 18$ ועדיין $3t < \phi(39)$. נבנה את טבלה D עבור השארית 14 שעדיין לא הופיעה. ביצוע החילוק $\frac{14}{39}$ יתן

⑭	17	29	38	35	23	14	שארית
4	7	9	8	5	3	0	מנה

לא נותרו שאריות אפשריות שאינן מופיעות בטבלאות אלו. קבלנו עבור $K = 4$ את השוויון המבוקש, $\phi(y) = K \cdot t$.

מקור: Radmacher, Hans and Otto Toeplitz, The enjoyment of Mathematics
Princeton: Princeton University Press, 1957, pp. 153-155.