מה אפשר לשאול על הטור ההרמוני?

מאת: ש. אביטל
המחלקה להוראה, הטכניון, חיפה

הטור ההרמוני

תוכנית הלימודים ברמה של 4 או 5 נקודות כוללת, כנושא חובה, את ההתכנסות וחישוב הגבול של הטור הגיאומטרי האין-סופי במקרה של מנה $|q| < 1$.
התוכנית ברמה של 3 נקודות כוללת כיום רק את הנוסחה לסכומים החלקיים של הטור הגאומטרי. אין כל ספק שמנקודת הראות של תרבות מתימטית גם ברמה של 3 נקודות צריך המורה להקדיש זמן מה לטור האין-סופי המתכנס, ובכל הרמות רצוי להעלות את הדיון בטור ההרמוני (טור המספרים ההופכיים למספרים הטבעיים)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

המפתיע בטור זה הוא, שאם כי האיבר הכללי $\frac{1}{n}$ שואף לאפס כאשר n גדל, הטור עצמו מתבדר וערך סכומיו החלקיים גדל מעל כל מספר טבעי. עובדה זאת לא היתה ידועה למתימטיקאים רבים במאה ה-18, אך כפי הנראה היא היתה ידועה ללייבניץ, אחד היוצרים הגדולים של החשבון הדיפרנציאלי. הוכחה מלאה ניתנה על-ידי המתימטיקאי השווייצי ג'ימס ברנולי (James Bernoulli 1654-1705). ההוכחה ידועה בדרך כלל ונזכירנה רק בקיצור.

מקבצים את איברי הטור בקבוצות:

$$\frac{1}{1} + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots$$

בכל קבוצה מכפלת מספר האיברים באיבר האחרון (שהוא הקטן ביותר) שווה ל $\frac{1}{2}$, לכן הסכום של כל קבוצה הוא לפחות $\frac{1}{2}$, יש אין סוף קבוצות כאלה, לכן הסכום של כל הטור הוא ודאי גדול מכל מספר טבעי.

שאלות על טורים חלקיים

השאלות הראשונות שכדאי להעלות דנות בטורים אין סופיים, שהם חלקיים לטור ההרמוני.

★ האם הטור של ההופכיים למספרים הזוגיים, (או למספרים האי-זוגיים) מתכנס? אף אחד משני הטורים אינו מתכנס והסכום גדל מעל לכל מספר. ההוכחה פשוטה ואנו משאירים אותה לקורא.

★ טור מעניין הוא טור ההופכיים של המספרים הראשוניים:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$$

אנו יודעים אומנם שיש אין סוף מספרים ראשוניים, אבל עם זאת המספרים הראשוניים מפוזרים בצורה דלילה מאד בין המספרים הטבעיים. למרות דלילות זאת הוכיחו שהטור אינו מתכנס. ההוכחה איננה אלמנטרית (אפשר למצאה בספר של Hardy & Wright).

★ מקרה היסטורי מעניין קשור בטור ההופכיים של מספרים ראשוניים תאומים. אלה הם זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם 2, למשל 3,5 5,7 11,13 17,19 29,31 41,43 וכו'. עד היום לא ידוע האם יש מספר אין סופי, או רק מספר סופי, של מספרים ראשוניים תאומים. עם זאת הוכיחו בתחילת המאה הזאת כי טור ההופכיים של המספרים הראשוניים התאומים, כלומר הטור

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$$ **מתכנס!**

לא ידוע האם ההתכנסות נובעת מכך שיש רק מספר סופי של ראשוניים תאומים, או מכך שהם מפוזרים בצורה דלילה מאד בין המספרים הטבעיים.

★ טור אין סופי מתכנס אחר הוא למשל טור ההופכיים של המספרים המשולשים.

המספרים המשולשים הם $\frac{1\cdot 2}{2}$, $\frac{2\cdot 3}{2}$, $\frac{3\cdot 4}{2}$, ובאופן כללי $\frac{n(n+1)}{2}$

טור ההופכיים שלהם הוא $\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{2}{4\cdot 5} + \cdots$

את ההתכנסות של טור זה אפשר להוכיח גם בכיתה חלשה:

נשים לב $$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

ולפיכך אפשר להציג את האיברים של כל סכום חלקי מטור זה בצורה:

$$\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right)$$

כאשר פותחים סוגריים הסכום החלקי הוא

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}$$

כאשר n גדל סדרת הסכומים החלקיים שואפת ל-2, וזהו סכום כל הטור. מעניין שכבר במאה ה-16 שימש טור זה כשאלת אתגר שהעמיד מתימטיקאי אחד לשני בתחרות על פתרון בעיות מתימטיות.

★ טור מעניין אחר הוא טור המספרים ההופכיים של ריבועי המספרים הטבעיים כלומר:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$$

הטור הזה נחקר ע"י המתימטיקאי אוילר (L. Euler, 1707-1783).
בשיטות נועזות לא מקובלות, שמתימטיקאים כיום לא היו רואים אותן כנכונות, הגיע אוילר למסקנה כי הטור מתכנס לסכום סופי והוא $\frac{\pi^2}{6}$.
המסקנה של אוילר נכונה. מפתיע כיצד המספר π חודר למקומות לא צפויים במתימטיקה.

לא קשה להוכיח כי סכום ההופכיים של הריבועיים שואף לגבול: לשם כך נשתמש בטור ההופכיים של המספרים המשולשים, כאשר כל הופכי מחולק ב-2. פשוט נראה שכל איבר בטור השמאלי (פרט לאיבר הראשון) קטן מן האיבר המתאים לו בטור הימני. ואמנם -

$$1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot n}+\ldots \quad < \quad 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$

הואיל וכפי שראינו הטור מימין שואף לגבול, הטור משמאל לא כל שכן.
ההוכחה שהגבול של טור ההופכיים הריבועיים הוא $\frac{\pi^2}{6}$ היא הרבה יותר קשה ולא נביאנה כאן.

מתקבל על הדעת כי שאלה מרכזית שמניעה מתימטיקאים רבים לעסוק בטור ההרמוני היא כדלקמן:
האיבר הכללי שואף לאפס - ובכל זאת סכום האיברים גדל מעל לכל מספר. הסיבה היא שיש איברים הגורמים לכך. רצוי לכן לחקור מהן קבוצות האיברים אשר הוצאתן מהטור מביאה להתכנסותו לסכום סופי. כפי שראינו, הוצאת כל המחוברים, שהמכנה שלהם מספר פריק, איננה מביאה לכך, הטור הנותר איננו מתכנס.
הוצאת כל המספרים שהמכנים שלהם אינם ריבוע אומנם כן מביאה לכך, הטור של האיברים הנותרים מתכנס.

בהמשך החקירה הועלתה השאלה ומה אם נוציא את כל המחוברים אשר במכנה שלהם מופיעה הספרה 0 - כאשר מחוברים אלה כתובים לפי בסיס 10? שאלה זו העסיקה הרבה חוקרים.
ואומנם הוכיחו כי הטור של האיברים הנותרים מתכנס וסכומו בין 23 ו- 24.
(ראה מאמרו של Boas & Wrench).

נציין שבתחום זה של התכנסות טורים חלקיים ישנן עוד הרבה שאלות פתוחות, שטרם נפתרו עד היום. לקורא המתעניין נותר עוד הרבה מה לעשות.

שאלות אחרות על הטור ההרמוני

בעיות ההתכנסות אינן היחידות שאפשר לשאול בקשר לטור ההרמוני.

★ שאלה מעניינת היא האם יתכן כי סכום חלקי כל שהוא, המתחיל ב - $\frac{1}{1}$ **עד** למקום מסוים $\frac{1}{n}$, $n > 1$, יהיה **שוה** למספר שלם?
מתברר כי הדבר בלתי אפשרי. נוכיח זאת על ידי שנראה כי אם מחשבים סכום כזה כשבר מצומצם אחד - מקבלים שבר שמונהו מספר אי־זוגי ומכנהו מספר זוגי; וברור כי שבר כזה לא ניתן לצמצום, כך שאי-אפשר לקבל מספר שלם.

ואומנם, נניח שהסכום הוא מ- $\frac{1}{1}$ עד $\frac{1}{n}$: נתבונן בשבר $\frac{1}{2^k}$ כאשר $2^k \leq n < 2^{k+1}$, כלומר 2^k הוא החזקה הגדולה ביותר של 2, הקטנה או שווה ל n. (נשים לב: אף מכנה אחר בסכום, פרט לזה של $\frac{1}{2^k}$, אינו מכיל את 2^k כגורם).

אם נרשום את כל השברים עד $\frac{1}{n}$ עם מכנה משותף קטן ביותר, ברור שמכנה זה מוכרח להתחלק ב- 2^k, ולכן, הוא ודאי יהיה מספר זוגי המכיל את 2^k כגורם.
מאידך, עלינו להגדיל את כל המונים באופן מתאים ומכאן שהמונה של השבר $\frac{1}{2^k}$ יהיה עתה מספר אי-זוגי, אבל המונים של כל השברים האחרים יהיו זוגיים. סכום מספרים שרק אחד מהם אי-זוגי והשאר זוגיים מוכרח להיות אי-זוגי, וכפי שאמרנו שבר שמונהו אי-זוגי ומכנהו זוגי אינו יכול להיות מספר שלם.

★ אחת התוצאות המעניינות ביותר הקשורות בטור ההרמוני גילה המתמטיקאי היהודי קנדי ליאו מוזר (Leo Moser) (1).
כפי שראינו, אוילר הוכיח כי הטור $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ מתכנס וסכומו $\frac{\pi^2}{6}$
נתאר לעצמנו כי מספרים אלה מייצגים שטחי ריבועים שמידות צלעותיהם $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ וכו'.
באם נוריד את הריבוע הראשון, ששטחו 1, נקבל כי סכום שאר השטחים יהיה $(\frac{\pi^2}{6}) - 1$, כלומר $\frac{\pi^2 - 6}{6}$. מספר זה קטן כמובן מ 1. והנה מוזר, מצא דרך לפיה אפשר ממש לשכן את כל הריבועים, בתוך הריבוע שמידותיו 1×1 מבלי שאחד יפגע בשני. ברור מאליו כי ישארו שטחים שאינם מכוסים. השיטה היא לסדר את הריבועים בקבוצות, לפי מידות האורך של צלעותיהם:

---

(1) בעיה זו הופיעה באחד העתונים בארה"ב והועתקה בספר Mathematical Morsels ע"י ר. הונסברגר.

בקבוצה ראשונה $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$

בקבוצה שניה $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$

בקבוצה שלישית $\frac{1}{15}$,...., $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$

בקבוצה n $\frac{1}{2^{n+1}-1}$, $\frac{1}{2^n+2}$, $\frac{1}{2^n+1}$, $\frac{1}{2^n}$

אם במקום כל שבר, בקבוצה כלשהי, נשים את השבר הראשון ברור שנגדיל את סכום האיברים. סכום כל האיברים בכל קבוצה יהיה אז 1.

מכאן שאיברי הקבוצה הראשונה ניתנים לשיכון במלבן שגבהו $\frac{1}{2}$ ואורכו קטן מ 1.

איברי הקבוצה השניה במלבן שגובהו $\frac{1}{4}$ ואורכו קטן מ 1.

האיברים בקבוצה השלישית ניתנים לשיכון במלבן שגובהו $\frac{1}{8}$ ואורכו קטן מ 1.

וכן הלאה, ובאופן כללי האיברים בקבוצה ה-n-ית ניתנים לשיכון במלבן שגובהו $\frac{1}{2^n}$ ואורכו קטן מ 1.

הואיל והסכום $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ שואף ל-1 (טור גיאמטרי) הראינו כי אפשר לשכן את כל הריבועים בריבוע הראשון.

מה עוד אפשר לשאול?

האקלים הלימודי של כל כיתה בא לידי ביטוי במידה רבה בסוגי השאלות הנשאלות על ידי התלמידים. במידה ששאלות אלה אינן דווקא מן הסוג "המורה, כיצד פותרים זאת", או "המורה, מה הפירוש", אלא גם למשל "מה יהיה אם ....", או "האם אפשר לראות זאת גם בדרך אחרת..." וכדומה, נוכל להרגיש כי האקלים של כיתה זאת הוא של חיפוש דרך, של גישה חקירתית, של נסיון להרחיב, של פתיחות לבעיות וכדומה. אקלים כזה אינו נוצר ביום אחד. לשם כך נחוצה גישה עקבית של המורה ונסיון מתמיד מצדו להעלות את ההתנסות החיבוכית לרמה גבוהה יותר. אחד האמצעים המובילים ליצירת אקלים חקירתי כזה נמצא בידי המורה. כאשר מסיימים דיון כלשהו במושג חדש, או בבעיה חדשה, יכול המורה להעלות את השאלה:

מ ה ע ו ד א פ ש ר ל ש א ו ל? כלומר, המורה מעודד את התלמידים להעלות שאלות משלהם בנושא הנידון, שאלות מן הסוג שמנינו לעיל.

מובן מאליו שגם תגובת רוב התלמידים לשאלה של המורה "מה עוד אפשר לשאול"? דורשת הדרכה מצד המורה. מדי פעם חייב המורה להבליט על ידי שאלות שהוא בעצמו מציג את העושר המתימטי הרב הטמון, כמעט בכל נושא. להדגיש את הקשריות הרבה הקיימת בין נושאים, שהם לכאורה שונים מאד, ואת הפוטנציאל העצום שיש בגישות מתימטיות מסויימות אשר בעזרתן אפשר להתקיף בעיות שלכאורה נראה לנו שאין כל **דמיון ביניהן**. ברור לכן שאוצר הידע וההתמצאות של המורה צריך להקיף את הנושאים שהוא דן בהם בכיתה ברוחב ועומק גדול מזה הדרוש להוראה הישירה של נושאים אלה.

מובן מאליו שמורה המעוניין ליצור אקלים לימודי כזה בכיתתו צריך להיות מוכן שמדי פעם יישאל על ידי תלמידיו שאלה שאיננו יודע את התשובה עליה. אין כל בושה להודות "איננני יודע את התשובה לשאלה זאת, עלי לחשוב עליה"; או אפילו, "חשבתי על השאלה של.... ועדיין איננני יודע את התשובה".
הדימוי של המורה "היודע את הכל" אין לו מקום בבית הספר. גם תלמידים יודעים שלא לדעת זה אנושי, ומחקרים הוכיחו כי כלפי אדם אשר מעריכים, עולה ההערכה דווקא, כאשר מתגלה שהוא ככל האנשים, וגם הוא עשוי לא לדעת.
במיוחד חשוב להעלות מדי פעם שאלות שאין עליהן עדיין תשובה. דבר זה מצביע לתלמידים על החיוניות הגדולה של המתימטיקה ומפזר את הטעות הנפוצה בין תלמידים, ואף בין מבוגרים, כי מתימטיקה היא מקצוע סגור, שבו ידועות כל התשובות.

במאמר זה העלינו וענינו על מספר שאלות מעניינות ביחס לטור ההרמוני. שאלות אלה אינן ממצות, כמובן, את כל שאפשר לשאול בתחום זה. נציע כאן מספר שאלות אשר הקורא יוכל להתמודד עמהן בעצמו.

★ ראינו כי אף אם הטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ איננו מתכנס,

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ מתכנס.

טבעי לשאול את השאלה מה נוכל לומר על הטור $\cdots + \frac{1}{1} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$

עבור $a > 1$?
במקרה הפרטי, כאשר $a = 2$, דנו לעיל, טור זה אמנם מתכנס, לכל $1 < a$.
הרמז הבא יעזור לקורא להתמודד עם שאלה זאת:
בדומה לשיקולים אשר פגשנו לעיל ניצור הפעם את הקבוצות בצורה:

$$1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}\right) + \cdots$$

ונגדיל את הסכומים בקבוצות, ע"י כך שנשווה את כל האיברים, בכל קבוצה, לאיבר הראש משמאל.

★ ראינו גם שלא ייתכן סכום חלקי, גדול מ-1, של הטור ההרמוני, אשר ישווה למספר שלם.
נוכל לשאול:
האם יתכן סכום חלקי גדול מ- $\frac{3}{2}$, אשר ישווה למספר שלם של חצאים? במלים אחרות האם קיים $n > 2$ כיון ש- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{s}{2}$ כאשר s מספר טבעי?

★ הזכרנו את העובדה שטור ההופכיים של המספרים הטבעיים הזוגיים, כלומר הטור

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ אינו מתכנס. מה נוכל לומר על טור ההופכיים של המספרים הטבעיים המתחלקים

ב n טבעי כלשהו?

★ נדון בטור החלקי של ההופכיים של המספרים האי זוגיים.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k - 1)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

כפי שהזכרנו במאמר טור זה אינו מתכנס. האם קיים בטור זה סכום חלקי, גדול מ 1, השווה למספר שלם? במלים אחרות האם ייתכן מספר אי זוגי $2n - 1$, $n > 1$, כזה שסכום $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{(2n - 1)}$ יהיה מספר שלם?

Hardy, G. & Wright, E. Introduction to the Theory of Numbers, Oxford: Clarendon, 1960.

Boas, R.P. & Wrench, J.W. Partial Sums of the Harmonic Series, Amer. Math. Monthly, 78 (1971) p. 864.