האתגר שבשגיאות...

מאת: רנה הרשקוביץ, שלמה וינר
ומקסים ברוקהיימר

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

1. האתגר שבשגיאות...

הרעיון המנחה מאמר זה מבוטא היטב על ידי גינזבורג (Ginsburg, 1977): - "ילדים שוגים כיון שהם משתמשים בחוקים בלתי מתאימים... לחוקים בלתי מתאימים אלה יש סיבות הגיוניות. מקורות השגיאה אצל ילדים הם בעצם חוקים נכונים שלא יושמו נכון או חוקים שעוותו (עמ' 100)... שגיאות הן תוצאה של אסטרטגיות וחוקים בעלי ארגון". "התנהגות הילדים היא משמעותית. היא אינה קפריזית" (עמ' 129).

במאמר שהתפרסם לאחרונה הציע רדץ (Radatz 1979) מיון של שגיאות תלמידים במתמטיקה וסיבותיהן והביא דוגמאות מנושאים מתמטיים שונים.

במאמר זה נבתח תהליכי שגיאה של תלמידים שנתגלו בחיבור שברים פשוטים. מדוע חיבור שברים פשוטים מהווה בעיה שכזאת? - קרפנטר (Carpenter et al, 1976) אומר באופן כללי כי "התלמידים אינם מסתכלים על השברים אותם יש לחבר כעל מספרים המייצגים כמויות מסויימות אלא רואים אותם כארבעה מספרים שלמים שיש לצרפם בדרך מסויימת". (עמ' 138).

בעבודה זו נביא סיבות ספציפיות יותר לתופעה זו של שגיאות בחיבור שברים פשוטים, סיבות שמקורן בעקרונות כלליים של תהליכי ההכרה.

2. תאור העבודה

בתהליכי פיתוח החומר לסגירת פערים בידע בשברים פשוטים, ("חוליות שברים פשוטים"), ניתנו שני תרגילי חיבור בשברים ל 494 תלמידים טעוני טיפוח בכיתות ז', ח', ט'.

התרגילים הם: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ ו - $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$.

התרגילים נתנו כשאלות פתוחות, כלומר, כל תלמיד כתב את הפתרון שעלה בדעתו. את החיבור בשברים פשוטים למדו תלמידים אלה בכיתות ה'-ו'.

תשובות התלמידים מוינו ונותחו לפי שלושת השלבים של אלגוריתם החיבור בשברים אשר הם:

א) מצא את המכנה המשותף.

ב) הרחב את השברים (כך שיהיה להם מכנה משותף).

ג) חבר את המונים של השברים המורחבים (בעלי המכנה המשותף).

בהתאם לשלבי האלגוריתם הללו הובחנו שלוש קטגוריות של שגיאות, שחולקו כל אחת לתת קטגוריות. כל טיפוסי השגיאות שהובחנו על ידי קרפנטר נמצאו גם במדגם שלנו בנוסף לכך נמצאו טיפוסי שגיאות נוספים, (ייתכן כי קרפנטר כלל טיפוסי שגיאה אלה ב"תשובות אחרות בלתי צפויות", אותן הזכיר במאמרו).

טיפוסי השגיאות שמצאנו אינן כוללות בהכרח את כל האפשרויות לשגות. יתכן כי טפוסי השגיאות נעוצים גם במספרים השלמים המרכיבים את השברים ובעבודתנו נתחנו רק שני תרגילים.

3. קטגוריות השגיאות

קטגוריה ראשונה: השלב הפרי-אלגוריתמי; - אין כל עקבות לאלגוריתם המכנה המשותף.

א) כפל המונים זה בזה וחיבור המכנים:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

(בתרגיל $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ יתכן ו"המונה המשותף" 1 נבחר להיות מונה התוצאה).

ב) חיבור המונים וכפל המכנים זה בזה:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6}$$

ג) כפל המונים והמכנים בהתאמה:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

ד) חיבור המונים והמכנים בהתאמה:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

ה) חיבור המונים תוך התעלמות מהמכנים:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1 + 2$$

א נ ל י ז ה

מדוע ביצעו תלמידים את תרגילי החיבור בצורה זו ולא באחרת? קשה להניח כי היינו מקבלים לכך תשובה מספקת, גם אם היינו שואלים אותם שאלה זו. אנו יכולים כנראה רק להעלות השערות בדבר הסיבות לשגיאות שהבאנו לעיל. (קרפנטר כותב (עמ' 138) במאמרו: "אין שום דרך לדעת במדויק מה חושבים התלמידים ומעניין להעלות השערות על האיסטרטגיות המוטעות בהן הם משתמשים").

להלן נביא לכל שגיאה הסבר משוער או הסברים הנראים לנו כהגיוניים ביותר. אנו מודעים לעובדה כי אפשר יהיה לתת גם הסברים אחרים, ואיננו פוסלים אותם. על השאלה מי מההסברים הוא הנכון אי אפשר יהיה להשיב במסגרת עבודה זו, מכל מקום אנו העדפנו הסברים אותם אפשר ליישם לתחומים מתמטיים נוספים.

בשגיאות (א) ו (ב) נראה כי התלמיד זוכר משהו מאלגוריתם החיבור. הוא זוכר כי חיבור וכפל (או אחד מהשניים), מופיעים באלגוריתם, אך מבצע אותם במקום הלא נכון. תופעה זו היא שכיחה ביותר, (שכיחה כמעט כמו תופעת השכחה), וראויה לשם מיוחד. אנו נקרא לה **שיחזור מוטעה של פרטים**. אנו רוצים להדגיש את ההבדל בין "שיחזור מוטעה" ל"שיחזור מוטעה של פרטים": - בשיחזור מוטעה של פרטים פעיל בעיקר הזכרון וזאת, בניגוד לסוגים אחרים של שיחזורים בהן תפקיד משמעותי לשיקולים לוגיים, אנלוגיות וכדומה.
כדאי לציין כי כמורים, יתכן שנעדיף שכחה מלאה על שיחזור מוטעה. אך, ללמידה חוקים שאינם תלויים בהעדפותינו: - בלמידה דווקא השכחה החלקית מתרחשת לעיתים תכופות ואז, יש מקום לתהליכי השיחזור.

סביר להניח כי בתת הקטגוריות (ג) ו (ד) באה לידי ביטוי השפעת אלגוריתם הכפל.
ב (ג) התלמיד משתמש בדיוק באלגוריתם הכפל.
אם הנחתנו זו נכונה, נוכל לראות שגיאות אלה כשגיאות שמקורן **בזהוי מוטעה**. תופעה זו נפוצה גם היא בלמידה של מתמטיקה. התלמיד מיישם אלגוריתם המתאים לסיטואציה מסויימת לסיטואציה אחרת לה הוא אינו מתאים.
נוכל לראות את השפעת הכפל בתת קטגוריה (ד), אם נייחס לתלמיד את השיקולים הבאים:
"<u>בכפל</u> שני שברים יש <u>לכפול</u> מונים ומכנים בהתאמה. לכן <u>בחיבור</u> שברים יש <u>לחבר</u> מונים ומכנים בהתאמה". לשיקולים כאלה אפשר לקרוא בשם **אנלוגיה מוטעית**.
לשגיאה בתת הקטגוריה (ד) נוכל להציע גם הסבר נוסף: התלמיד מסתכל בתרגיל ורואה את סימן החיבור ואת המספרים. הוא יודע כי סימן זה פירושו, לחבר. הוא מנסה למצוא את מה יש לחבר. טבעי להחליט כי יש לחבר מכנה למכנה ומונה למונה כיון שבהרבה מקרים אנו מחברים דברים השייכים לאותה קטגוריה. אנו מחברים תפוחים לתפוחים, כסאות לכסאות, עשרות לעשרות, ומאות למאות. לשיקולים כאלה אפשר לקרוא: **נתינת משמעות מוטעית לסמלים.**
יש לשים לב כי בסיטואציות רבות, **נתינת משמעות לסמלים והאנלוגיה** הם אמצעים הכרתיים רבי **עצמה ושימושיים ביותר.**

גם תת הקטגוריה (ה) מעניינת ביותר כיון שגם היא משקפת תופעה שכיחה הקשורה בהכרתנו. כאשר אנו מבצעים משימה קשה, אנו מתרכזים תכופות בחלק המוכר שלה. כאשר אנו גומרים חלק זה נראה לנו כאילו השלמנו את המשימה כולה, למרות שלא נגענו בחלקים האחרים שלה.

רק לעיתים רחוקות בודקים התלמידים את התשובות שנתקבלו בתהליכים דוגמת אלה שתארנו לעיל. התלמיד אינו מודע לעובדה שהשתמש בחוק שאינו מתאים והוא בטוח כי הוא זוכר נכונה את האלגוריתם. מכאן שאינו מוצא כל טעם בבדיקת תשובותיו. יותר מכך, אפילו אם יש לתלמיד ספקות לגבי נכונות תשובותיו והוא רוצה לבדקן, אין לו לעתים תכופות האמצעים לעשות זאת: - כאשר הנו יודע כי

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \quad \text{וכי} \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{3}$$

וכן מכיר את משמעות פעולת החיבור, קל לו להבחין כי שגה כאשר קיבל:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

במקרה זה "ראית השברים כמייצגים של כמויות" (כדברי קרפנטר), יכולה לעזור. הדבר קשה יותר כאשר טעה וקיבל:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

כיון שקשה יותר לראות כי $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

גם אם יש לתלמיד הידיעות הדרושות לבדיקת תשובותיו, קורה לעתים תכופות כי אין הוא משתמש בהן או אינו רואה את הרלוונטיות שלהן לתוכן בו הוא עוסק. לתופעה זו אפשר לקרוא מידור (compartmentation). נתיחס אליה יותר מאוחר במאמר זה.

קטגוריה שניה: נראה כי התלמיד מושפע בדרך מסויימת מסכמת המכנה המשותף, אבל חסר הרעיון של הרחבת השבר.

א) אותן שגיאות כמו בתת-הקטגוריות א)-ד) בקטגוריה ראשונה, עם שלב אחד נוסף - קו השבר משותף.

לדוגמא:

במקום לכתוב: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

התלמיד כותב: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5}$

ב) המכנה המשותף מתקבל על-ידי חיבור כל המכנים והמונים. את המונים מחברים אחד לשני כמות שהם:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 + 2}{8} \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 1}{8}$$

אנליזה

קו השבר המשותף בתת קטגוריה א' מרמז על קיומה של סכמת המכנה המשותף אצל התלמיד: לעתים תכופות כתיבת קו שבר משותף היא שלב במציאת המכנה המשותף. ייתכן וגם אצל תלמיד ששגה לפי אחת מתת הקטגוריות (א) - (ד) בקטגוריה הראשונה, קיימת סכמה כלשהי של מכנה משותף אך איננו יכולים לגלותה. כיוון שאיננו מעונינים באפיון התגובות של תלמיד בודד מסוים, אלא בקיומן של קטגוריות התגובה השונות, אין הסיווג המדויק של תגובת התלמיד הבודד חשובה כל כך.

חשוב לזכור כי אותה שגיאה יכולה להגרם על ידי תהליכים קוגניטיביים שונים, עובדה שהוזכרה גם על ידי רדץ (1979, עמ' 171).

נראה כי בקטגוריה זו גם תת קטגוריה א) וגם ב) הן יותר מכל דבר אחר ביטוי לשיחזור מוטעה של פרטים.

קטגוריה שלישית: יש השפעות הן לסכמת המכנה המשותף והן להרחבת השברים.

א) **המכנה המשותף** מתקבל על ידי חיבור המכנים, המונה החדש של כל שבר מושג על ידי חיבור המונה האורגינלי למכנה השבר השני. במלים אחרות "הרחבת השבר" נעשית על-ידי **חיבור** אותו מספר למונה למכנה של השבר:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{4 + 4}{5}$$

ב) **המכנה המשותף** מתקבל על ידי כפל המכנים. המונה החדש של כל שבר מתקבל כמו ב א):

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{4 + 4}{6} \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5 + 3}{8}$$

ג) **המכנה המשותף** המתקבל הוא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר (המכנה המשותף הנכון!). **המונה החדש של** כל שבר מתקבל על ידי כפל המונה והמכנה של אותו שבר:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2 + 6}{6} \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2 + 4}{4}$$

ד) **המכנה המשותף** המתקבל הוא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר. המונה החדש של כל שבר מתקבל על ידי חיבור המונה והמכנה של אותו שבר:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3 + 5}{4}$$

ה) **המכנה המשותף** של $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ נבחר כ 4. המונה החדש של כל שבר מושג על ידי כפל המונה במכנה השבר השני, כמו במקרה של מכנה משותף למכנים שהם מספרים זרים:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4 + 2}{4}$$

ו) **המכנה המשותף** ב $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ נבחר להיות 3 (המספר הגדול יותר), המונה החדש מושג על ידי **חיבור** המונה למכנה השבר השני:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{4 + 4}{3}$$

אנליזה

מן הראוי להזכיר כי התלמיד אינו נוקט בהכרח באיסטרטגיה אחת ויחידה (נכונה או לא נכונה). מצאנו תלמידים רבים אשר שתי תשובותיהם משתייכות כל אחת לקטגוריה שונה. זה מקרה אחר של תופעת **המידור**, אותה תארנו לעיל, התלמיד אינו מרגיש בניגוד שבין שתי תשובותיו.

תת-הקטגוריות א) - ד) הינן תוצאה של **שיחזור מוטעה של פרטים.** ב א) לשיחזור בסיס הגיוני יותר מאשר באחרות. ההבדל היחיד בין א) והתשובה הנכונה הוא בכך שב א) השבר "הורחב" על ידי חיבור אותו מספר למונה ולמכנה (במקום כפל). מכאן, אף כי שגיאה זו נראית פשוט כתוצאה של זכרון לא נכון, יתכן ויש לה בסיס הגיוני שיסודו **באנלוגיה מוטעה** או **בהכללה מוטעה** (שהן קרובות ביותר אחת לשניה).
מותר **לכפול** את המכנה והמונה באותו מספר (שונה מאפס). התלמיד יכול להגיע למסקנה כי מותר גם **לחבר** אותו מספר למונה ולמכנה.

תת-הקטגוריה ה) יכולה להחשב כתוצאה של שניים: **שיחזור מוטעה של פרטים וזיהוי מוטעה.** נראה כי העקרון המנחה כאן הוא תוצאה של שני מרכיבים:

1. אם מכנה אחד מחלק את השני, אז המכנה המשותף הוא המכנה הגדול בין השניים.
2. המונה החדש מתקבל על ידי כפל המונה במכנה השבר השני.

כל אחד מהמרכיבים נכון לגבי חלק מהמקרים של חיבור שברים, אבל על ידי צרוף שניהם מקבל התלמיד **שיחזור מוטעה של פרטים.** לגבי המרכיב השני יש כאן גם **זהוי מוטעה** של הסיטואציה בה נכון להשתמש בו.

בתת הקטגוריה ו) באה כנראה לידי ביטוי **אנלוגיה מוטעה.** הבחירה של 3, המספר הגדול יותר, כמכנה משותף של 2 ו 3, אנלוגית לבחירת 4 (שוב המספר הגדול ביותר), כמכנה משותף של 2 ו 4 .

4. נתונים סטטיסטיים

מעניין להשוות את התפלגות התשובות במדגם שלנו להתפלגותן במדגם של קרפנטר. הטבלה הבאה נותנת את האחוזים של התשובות הנכונות, השגיאה הנפוצה ביותר (שהיא גם השגיאה הנפוצה ביותר במדגם של קרפנטר), וכל יתר השגיאות.

התפלגות התשובות בחיבור שברים

	ענו נכון	חיברו מונים ומכנים (קטגוריה I ד')	כל השגיאות האחרות	לא ענו
$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	58.3%	18.8%	16.4%	6.5%
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$	45.7%	24.3%	22.3%	7.7%

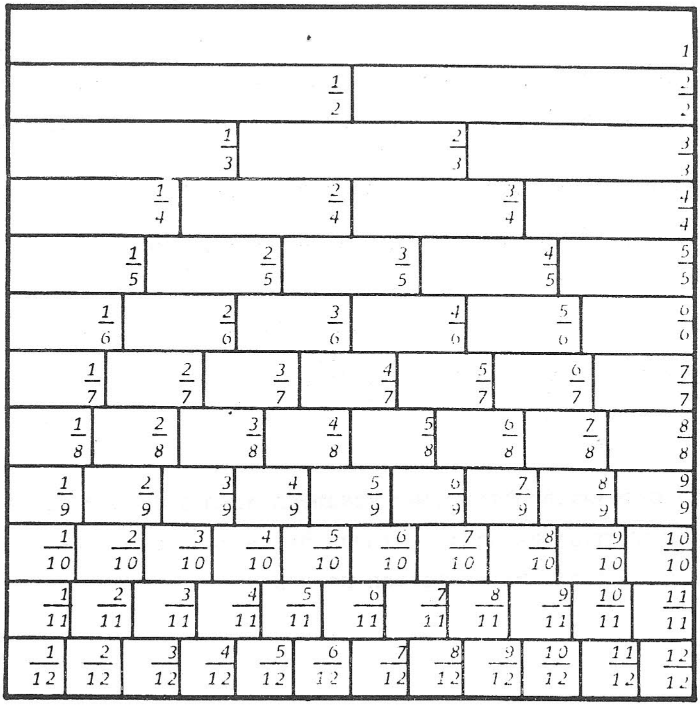
5. סיכום

בין העקרונות לפיהם פועלת ההכרה נמצא את **השכחה**, **השכחה החלקית**, **הזיהוי המוטעה**, **שיחזור של פרטים**, **אנלוגיה ונתינת משמעות לסמלים.**
לשלושת האחרונים תפקיד חיובי בלמידה ויש לעודדם בדרך כלל. אך, כפי שראינו הם יכולים לגרום גם לשגיאות רציניות. הבעיה היא איפוא כיצד ליישם עקרונות אלה לעידוד הלמידה מבלי שיגרמו לשגיאות מהטיפוסים שתארנו לעיל. למשל, ראינו כי שגיאה פופולרית היא:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

אפשר להסבירה על ידי **אנלוגיה מוטעה**, או על ידי **נתינת משמעות מוטעית לסמלים.**
יש לחקור היטב ולפתח שיטות לפיהן נמנע מטיפוסים אלה של שגיאות. שתי הצעות הנראות באופן אינטואיטיבי כמביאות תועלת הן:

א) "מלבני שברים" (ראה שרטוט).



רעיון זה מצאנו בספרים של Midlands Mahtematical Experiment (1976).
אנו השתמשנו ברעיון זה ב"חוליות-שברים פשוטים", (החומר לסגירת פערים בידע בשברים פשוטים).

ברעיון זה אפשר להשתמש כאשר התלמיד לומד (או לומד שוב) את הטכניקה של "הרחבת השברים" וכן "חיבור וחיסור שברים". אפשר להעזר ברעיון זה כדי לפתח את מושג השבר כמייצג כמות. בהרחבת שברים יראה כי אותה כמות (אורך מלבן) אפשר לייצג בעזרת "שמות" שונים המבטאים כולם את אותו המספר. בחיבור שברים יוכל לבדוק את נכונות תשובותיו, על ידי חיבור הכמויות המתאימות והשוואתן (אורכי המלבנים).

ב) רעיון נוסף העשוי להיות שימושי קשור בקו השבר המשותף. נראה לנו כי קו השבר המשותף תופס במידת מה את מקומה של הרחבת השבר. זהו מקרה פרטי של תופעה שכיחה בלמידת מתמטיקה: - כאשר מושג מתמטי אינו קיים והתלמיד מכיר רק את ייצוגו הפורמלי, הוא ישגה בקלות יתרה כאשר יעסוק במושג זה. אנו ממליצים, איפוא, להמנע משימוש בקו שבר משותף כאשר מחברים שברים, לדוגמא:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

באופן זה לא יהיה לתלמיד העוסק בחישובים סמל פורמלי. יתכן ועל ידי כך יהיה נאלץ לחשוב על המושגים היסודיים שהם יסוד חישוביו.

העבודה שתוארה במאמר זה מעלה שאלות נוספות, אשר חקירה נוספת שלהן עשויה לשפוך אור נוסף על העקרונות הפסיכולוגיים הנוטלים חלק בביצוע החיבור בשברים פשוטים:

1. האם בחירה שונה של המספרים בחיבור שברים תשפיע על טיפוסי השגיאות שיופיעו?
2. האם אפשר לאפיין תלמידים אשר הם "סיסטמטיים" באופן שגיאתם לעומת תלמידים אשר אצלם מופיעים בשני התרגילים שני סוגי שגיאה שונים?
(אנו משתמשים כאן במונח "סיסטמטי" כפי שהוגדר על ידי Cox (1975)).
3. האם ידיעת אלגוריתם הכפל בשברים מעכב את השליטה באלגוריתם החיבור, (ראה קטגוריה ראשונה ג) ו ד)) ?

אנו מקווים כי עבודות מסוג העבודה שהבאנו כאן, תעזורנה לעוסקים בהוראת מתמטיקה, להבין את תהליכי חשיבתו של התלמיד, תגביר את המודעות של מורים לשגיאות תלמידיהם וסיבותיהן, ובכך תעזור ביצירת תהליכי הוראה טובים יותר.

References

Avital, S.M. and Shettleworth, S.J., Objectives for Mathematics Learning, Ontario Institute for Studies in Education, *Bull. No. 3,* Toronto, 1968.

Carpenter, T.D., Coburn, T.G., Reys, R.E., Wilson, J.W., Notes from National Assessment: addition and multiplication with fractions, *The Arithmetic Teacher,* February, 1976, 23, 137-141.

Cox, L.S., Systematic Errors in the Four Vertical Algorithms in Normal and Handicapped Population, *Journal for Research in Mathematics Education,* November 1975, 6, 202-220.

Ginsburg, H., *Children's Arithmetic: the learning process,* Van Nostrand Company, 1977.

Midlands Mathematical Experiment, George G. Harrap Co. Ltd., London, Vol. 1, part A, p. 109. Second edition, 1973.

Radatz, H. Error Analysis in Mathematics Education, *Journal for Research in Mathematics Education,* May 1979, 10, 163-171.