עיקרון המגירות

מאת: ארתור אנגל והורסט סורין *
תרגום: חנה ליפסון

"עקרון המגירות" של דיריקלה אומר:
אם מכניסים $s + 1$ פנינים ל s מגירות
אזי לפחות אחת המגירות תכיל יותר
מפנינה אחת".

דיריקלה (Dirichlet ,1805 - 1859) היה הראשון שנסח עקרון קומבינטורי פשוט זה והשתמש בו בתורת המספרים. על אף פשטותו יש לעקרון זה מספר גדול של שימושים בלתי צפויים וניתן להוכיח בעזרתו משפטים עמוקים מאוד.
ב 1930 הכליל F.P. Ramsey באופן משמעותי את העיקרון. הבעיות הקשורות במספרים המכונים "מספרי רמסי" (Ramsey) הן בין הבעיות הקשות ביותר של הקומבינטוריקה. למרות מאמצים גדולים שהושקעו ההתקדמות בשטח זה איטית ביותר.

"עקרון המגרות" מצוי בסתר ביסודה של כל בעית קיום בקומבינטוריקה. העקרון טוען לדרישת קיום אך אינו עוזר במציאת "מגירה" בעלת התפוסה הכפולה.
מה מאפיין בעיה שלפתרונה מתאים עקרון המגירות?
כל טענת קיום ביחס לקבוצות סופיות אפשר להוכיח בדרך כלל בעזרת עקרון המגירות. הקושי העיקרי הוא בזיהוי ה"פנינים" וה"מגירות".

נפתח במספר תרגילים קלים.

1. **הוכח כי בין 13 אנשים יש תמיד לפחות שניים שנולדו באותו החודש.**

2. **ידוע כי לא קיים אדם שעל ראשו יותר מ 300 000 שערות.**
   בעיר מסוימת יש 300001 תושבים. האם אפשר לומר בבטחון כי בעיר נמצאים שני אנשים בעלי אותו מספר שערות על ראשם?

3. **כמה אנשים צריכים להיות נוכחים כדי שאפשר יהיה לטעון בבטחה כי:**
   (א) לשניים מהם, (ב) לשלושה מהם, (ג) ל q אנשים מביניהם - יש יום הולדת באותו יום בשבוע?

4. **הוכח את "עקרון המגירות".**

---

* מאמר זה הוא תרגום מגרמנית של החלק הראשון של מאמר העוסק ב"עקרון המגירות".
Arthur Engel and Horst Sewerin, Das Shubfachprinzip, Der Mathematikunterrich Vol. 25, No. 1, 1979. Used by permission.

5. הוכח: אם מכניסים לפחות $qs + 1$ פנינים לתוך s מגירות, אזי לפחות אחת המגירות תכיל יותר מ-q פנינים.

6. נתון כי ישר q נמצא במישור המשולש ABC ואינו מכיל אף אחד מקדקדי המשולש. הוכח כי הישר אינו יכול לחתוך את כל צלעות המשולש.

7. מישור נתון אינו מכיל אף אחד מקדקדיו של ארבעון. כמה מקצועות של הארבעון הוא יכול לחתוך?

8. קולעים ללוח מטרה אשר צורתו משולש שווה צלעות ואורך צלעו 2 יחידות.

א) הוכח כי כאשר קולעים 5 פעמים קיימים לפחות שני חורים שהמרחק ביניהם קטן או שווה ליחידה אחת.

ב) קולעים 17 פעמים. מה אפשר לומר על המרחק המינימלי בין שני חורים?

9. ידוע כי אם a ו b הם שני מספרים טבעיים זרים אזי אורך המחזור המופיע בהצגה העשרונית של $\frac{a}{b}$ לא יעלה על $b - 1$.

10. הראה כי, בין 11 מספרים עשרוניים אינסופיים כלשהם ניתן לבחור שני מספרים a ו b כך שהשם העשרוני של $|a - b|$ יהיה מספר עשרוני סופי או מכיל אינסוף אפסים.

11. נתונים 12 מספרים שונים בעלי שתי ספרות. הראה כי ניתן לבחור מביניהם שני מספרים כך שההבדל ביניהם הוא מספר דו ספרתי בעל שתי ספרות שוות.

12. הוכח: אם אף אחד מהמספרים:

$$a, a + d, a + 2d, \ldots ,a + (n - 1)d.$$

אינו מתחלק ב n אזי d ו n אינם מספרים זרים.

13. נתונים 20 מספרים כך שכל שניים שונים זה מזה וכולם קטנים מ-70. הראה כי, בין ההפרשים של כל זוג מספרים מביניהם, מופיעים 4 הפרשים שווים.

הדוגמאות הבאות מציגות שימושים אופיניים של עקרון המגירות.

<u>דוגמא 1</u>

באולם נוכחים n אנשים. הראה כי ביניהם יש שני אנשים אשר להם אותו מספר מכרים בין הנוכחים באולם.

פתרון:

אדם (פנינה) "מוכנס" למגירה i אם יש לו i מכרים באולם.

לפנינו n אנשים ו n מגירות המסומנים במספרים מ 0 עד $n - 1$. ואולם, לא יתכן כי גם המגירה "0" וגם המגירה "$n - 1$" תהיינה שתיהן "תפוסות"! לפי עקרון המגירות קיימת לפחות מגירה אחת שיש בה יותר מפנינה אחת ופירושו שמתקיימת התוצאה המבוקשת.

14. בחדר נפגשים n אנשים. כל אחד לוחץ ידים לשלום עם כל אחד. הראה כי בכל רגע של טכס אמירת השלום יש שני אנשים שעד אותו רגע לחצו אותו מספר של ידים.

15. n שחקנים משתתפים בטורניר. כל אחד משחק בדיוק פעם אחת נגד כל אחד. הראה, כי במהלך הטורניר יש תמיד שני שחקנים שעד אותו רגע שחקו אותו מספר של שחקנים.

דוגמא 2

לרב-אמן במשחק השחמט נותרו עוד 77 יום, כדי להתכונן להתחרות. הוא רוצה לשחק לפחות משחק אחד בכל יום, אך בסה"כ לא יותר מ 132 משחקים. הראה כי קיימת סדרה של ימים עוקבים, אשר בהם הוא משחק בדיוק 21 משחקים.

פתרון:

יהא a_i מספר המשחקים שהתקיימו עד ליום ה- i (ועד בכלל); אזי קיים:

$$1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \le 132$$

נחבר 21 לכל האגפים

$$22 \le a_1 + 21 < a_2 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \le 153$$

לפיכך יש לנו 154 מספרים:

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

כולם נמצאים בין 1 ו 153, לכן לפי עקרון המגירות יש שני מספרים שווים. אם כך קיימים אינדקסים i ו j כך ש

$$a_i = a_j + 21$$

מכאן נובע שרב האמן שחק במשך הימים שמספריהם

$$j + 1, j + 2, \dots, i$$

בדיוק 21 משחקים.

דוגמא 3 (Erdös)

נתונים n מספרים שלמים (הם לא חייבים להיות שונים זה מזה), הוכח כי קיימת קבוצה חלקית של המספרים הנתונים כך שסכומם מתחלק ב-n.

הוכחה:

נתבונן ב n המספרים הבאים:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

אם אחד מהמספרים הנ"ל מתחלק ב n, המשפט מוכח. אם אף אחד מהמספרים אינו מתחלק ב n, אזי, שאריות שלהם מודולו n שונות מאפס.
מכיוון שישנן רק $n - 1$ שאריות שונות כאלה, אזי קיימים שני מספרים, למשל, s_p ו s_q בעלי אותה שארית וההפרש ביניהם מתחלק ב n.
ואם כך, עבור $p < q$ ההפרש:

$$s_q - s_p = a_{p+1} + \dots + a_q$$

מתחלק ב-n.

<u>דוגמא 4</u> (Erdös)

אם מקבוצת המספרים $\{1, 2, \dots, 2n\}$ בוחרים $n + 1$ מספרים כל שהם, אזי בין המספרים יש תמיד שניים כך שמספר אחד מתחלק בשני.

הוכחה:

נסמן את המספרים: $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$
נרשום כל אחד מהמספרים a_i בצורה $a_i = 2^k b_i$ באופן ש b_i הם מספרים איזוגיים.
$b_1, \dots, b_{n+1}$ אשר כולם נמצאים ברווח $[1, 2n - 1]$. ואולם, רווח זה מכיל רק n מספרים איזוגיים ולכן (עקרון המגירות) קיימים אינדקסים p ו q כך ש $b_q = b_p$. מכאן נובע, כי לגבי המספרים a_p ו a_q, אחד מהם מתחלק בשני.

<u>דוגמא 5</u>

נתונים שני מספרים טבעיים זרים a ו b. הוכח כי קיימים מספרים טבעיים x, y כך שמתקיים:

$$ax - by = 1$$

הוכחה:

נסתכל בשאריות מודולו b של סדרת המספרים

$$a, 2a, \dots, (b - 1)a$$

השארית 0 אינה מופיעה ביניהם.

נראה מה קורה אם נניח כי 1 אינו מופיע בין השאריות. יש לנו סדרה של $b - 1$ שאריות שביניהן יכולות להיות רק $b - 2$ שאריות שונות, לכן (עקרון המגירות) אפשר למצוא מספרים טבעיים p ו q כך שמתקיים $0 < p < q < b$

$$pa \equiv qa \pmod b$$

או $b \mid (q-p)a$ (כלומר: b מחלק את $(q-p)a$)

אבל a ו b זרים לכן [illegible]

כאן מתקבלת סתירה שהרי $0 < q - p < b$

לכן 1 חייב להופיע בין השאריות ואם כך קיים x כך שעבורו

$$ax \equiv 1 \pmod{b}$$

כלומר $ax = 1 + by$

או $ax - by = 1$

דוגמא 6

נתונים מספרים טבעיים a, b, x_0
הראה כי בסדרה

$$x_0, x_1 = ax_0 + b, x_2 = ax_1 + b, \ldots, x_{n+1} = ax_n + b, \ldots$$

מופיעים אינסוף מספרים פריקים.

הוכחה:

נשים לב כי $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

וכן $x_i > a$, $x_i > b$ עבור $i \geq 1$

נפריד מקרים:

מקרה א : ל a ו b מחלק משותף $d > 1$

אזי $d \mid x_i$ ו $d < x_i$ עבור $i \geq 1$

על כן לא יהיה אף x_i $(i \geq 1)$ מספר ראשוני והמשפט מוכח במקרה זה.

מקרה ב : a ו b זרים.

אזי גם a ו x_k זרים $(k \geq 1)$

נבחר איבר כלשהו של הסדרה, x_k, ונסמנו $x_k = m$

נראה עתה כי בין המספרים

$$x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$$

מופיע מספר פריק.

הסדרה הנ"ל מכילה $m + 1$ מספרים, שאריות המספרים האלה מודולו m יכולות להיות:

$$0, 1, \ldots, m - 1$$

על כן - לפי "עקרון המגירות" - יש ביניהם שני מספרים x_p ו x_q , $q > p$

כך ש $x_p \equiv x_q \pmod{m}$

ולכן מתחלק ההפרש $x_q - x_p = a(x_{q-1} - x_{p-1})$ במספר m

אך a ו m זרים ולכן

$$m \mid x_{q-1} - x_{p-1}$$

באופן דומה מתקבל כי

$$m \mid x_{q-2} - x_{p-2}$$

וכך הלאה.

לבסוף יתקבל

$$m \mid x_{k+q-p} - x_k$$

מאחר ש $x_k = m$, מתקבל כי

$$m \mid x_{k+q-p}$$

פירוש הדבר x_{k+q-p} אינו מספר ראשוני.

עכשיו נוכל לחזור על התהליך כאשר נבחר באיבר x_{k+m+1} ולהראות קיום מספר פריק נוסף וכך הלאה.

דוגמא 7

במעגל חסומים מצולע משוכלל בעל n צלעות ומצולע משוכלל בעל $n + 1$ צלעות. יש להוכיח שעל המעגל אפשר לבחור תמיד קודקוד של המצולע בעל n הצלעות וקודקוד של המצולע בעל $n + 1$ הצלעות כך שהקשת הכלואה בין שתי נקודות אלו שייכות לזוית מרכזית α המקיימת:

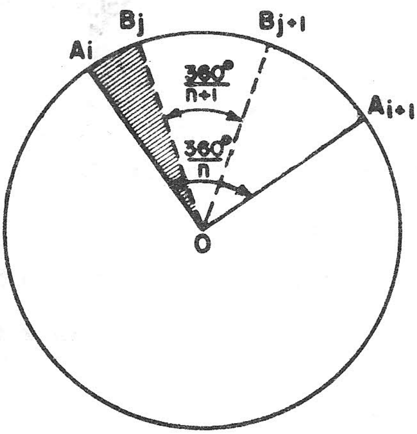
$$\alpha \leq \frac{180^\circ}{n(n+1)}$$

הוכחה:

במקרה שקודקוד אחד של המצולע בעל n הצלעות מתלכד עם קודקוד של המצולע בעל $n + 1$ הצלעות, ברור שהמשפט מוכח. על כן נניח מעתה, שאין קודקודים כאלה.

בתוך "מגירות" נסתכל במקרה זה על הקשתות שבין קודקודי המצולע בעל n הצלעות.

לפי "עקרון המגירות" נמצאים באחת הקשתות האלה שני קודקודים של המצולע בעל $n + 1$ הצלעות.



אורך הקשת שבין שני הקודקודים האלה $\frac{360^\circ}{n+1}$ סכום אורכי חלקי הקשתות האחרים שבין קודקדי המצולע בעל n צלעות הוא על כן:

$$\frac{360^\circ}{n} - \frac{360^\circ}{n+1} = \frac{360^\circ}{n(n+1)}$$

ולאחת משתי הקשתות האלה שייכת זווית מרכזית שאינה עולה על $\frac{180^\circ}{n(n+1)}$.

דוגמא 8 *(XVIII IMO 1976)

נתונה מערכת של p משוואות ב $q = 2p$ נעלמים.

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = 0 \\ \\ a_{p1}x_1 + x_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

כאשר $a_{ij} \quad \{0, -1, +1\}$ $\quad i = 1, 2, \dots, p$

$j = 1, 2, \dots, q$

יש להוכיח שקיים פתרון $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ של (1) בעל התכונות הבאות:

א) כל ה x_k מספרים שלמים.

ב) לפחות אחד ה x_k שונה מאפס. $\quad (k = 1, 2, \dots, q)$

ג) $|x_k| \leq p$

הוכחה:

מי שינסה כאן להשתמש בשיטות הידועות לפתרון מערכת משוואות ליניאריות, יכשל. נעיין במשוואות ונראה כי מדובר בעצם במספר סופי של הצבות אפשריות עבור $(x_1, \dots, x_q)$ אותן אפשר להכניס ל"מגירות" שהם סדרות של p איברים המתקבלים באגפים הימניים. הכנסת שתי הצבות לאותה מגירה תוביל לפתרון.

דוגמא 9 (XVII IMO 1975)

$a_1, a_3, \dots$ היא סדרה אינסופית כלשהי של מספרים שלמים חיוביים, כך שעבור כל $k \geq 1$ נכון ש- $a_k < a_{k+1}$.

יש להראות, שמספר אינסופי של איברים a_m בסדרה נתנים להצגה בצורה

$$a_m = x \cdot a_p + y \cdot a_q$$

כאשר x, y מספרים שלמים חיוביים ו $p \neq q$.

---

*הערת המערכת: פירוש הרשום בסוגריים הוא כי השאלה ניתנה בתחרות ה-18 במספר של האולימפיאדה המתמטית הבינלאומית (International Mathematical Olympiad) שנערכה ב 1976.

הוכחה:

יש מספר סופי (a_2) של מחלקות שאריות מודולו a_2 ולכן מספר אינסופי מבין המספרים a_k שייכים לאחת ממחלקות השאריות הללו. יהי a_p $(p \neq 2)$ הקטן בין המספרים האלה. אזי נכון עבור מספר אינסופי של איברים a_m כי

$$a_m \equiv a_p \pmod{a_2}$$

כלומר

$$a_m = 1 \cdot a_p + y \cdot a_2$$

ובכן התקיימו כל התנאים.

דוגמא 10 (Erdös and Szekares)

רושמים את המספרים הטבעיים מ 1 עד 101 בסדר כלשהו. יש להראות, כי אפשר למחוק 90 מבין המספרים האלה בצורה כזאת שהמספרים הנותרים יוצרים סדרה מונוטונית עולה או יורדת. (בסדרה מונוטונית האיברים רשומים בסדר עולה או יורד).

נוכיח הכללה של הטיעון הנ"ל:

עבור $n \geq (p - 1)(q - 1) + 1$, מכיל כל סידור של n מספרים סדרה חלקית מונוטונית עולה מאורך p או סדרה חלקית מונוטונית יורדת מאורך q.

הוכחה:

לכל מספר m בסדרה הנתונה נתאים את המספר L_m שהוא האורך המכסימלי של סדרה מונוטונית עולה שאיברה האחרון m. כמו כן נתאים ל m את המספר R_m, שהוא האורך המכסימלי של סדרה יורדת המתחילה ב- m.

להתאמה זו ישנה התכונה, כי עבור שני מספרים שונים m ו k מתקיים $L_m \neq L_k$ או $R_m \neq R_k$. זה נובע מהעובדה שאם $m \neq k$ אזי $m > k$ או $m < k$.

מכאן נובע שכל n הזוגות (L_m , R_m) $m = 1, 2, \ldots, n$ הם זוגות שונים. אם מניחים שלא קיימת סדרה חלקית בעלת התכונה הנדרשת, כי אז נובע ש L_m יכול לקבל רק את הערכים $1, 2, \ldots, p - 1$ ו- R_m רק את הערכים $1, 2, \ldots, q - 1$. זה היה נותן $(p - 1)(q - 1)$ מגירות שונות עבור הזוגות הללו, אבל נתון $n \geq (p - 1)(q - 1) + 1$ וכך בעזרת עקרון המגירות מגיעים לסתירה.

תרגילים:

16. יהי n מספר טבעי אשר לא מתחלק ב 2 ולא מתחלק ב 5. הראה כי ישנו מספר המתחלק ב n, אשר כל ספרותיו הן 1.

17. המספר a זר ל 10. הראה כי קיימת חזקה של a אשר n הספרות האחרונות שלה הן $.\underbrace{00\ldots01}_{n}$

18. הראה כי בין כל $n + 1$ מספרים מתוך $1, 2, \ldots, 2n$ יש שני מספרים זרים.

19. (XIV IMO 1972) מתוך עשרה מספרים שונים בני שתי ספרות אפשר לבחור תמיד שתי קבוצות חלקיות, לא ריקות וזרות זו לזו, כך שסכומי האיברים שלהן שווים.

20. מתוך $2^{n+1} - 1$ מספרים שלמים ניתן לבחור 2^n מספרים אשר סכומם מתחלק ב- 2^n.

21. (אולימפיאדה בריטית 1975) עיגול סגור בעל רדיוס 1 מכיל 7 נקודות, כך שמרחק כל שתיים מהן אינו קטן מ-1. הראה כי מרכז העיגול הוא אחת מ-7 הנקודות.

22. באולם נוכחים $n(m - 1) + 1$ אנשים. הראה כי קיימת אחת מהאפשרויות הבאות: באולם נמצאים m אנשים שכל שניים מהם אינם מכירים זה את זה, או שיש אדם אחד המכיר לפחות n מבין האנשים.
האם המשפט נשאר נכון אם אדם אחד עוזב את האולם?

23. (Erdös) נתונים k מספרים טבעיים

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$$

כאשר
$$k > \left[\frac{n + 1}{2}\right]$$

הראה שקיים לפחות זוג אחד r , i כך שמתקיים

$$a_i + a_1 = a_r$$

24. לגבי קבוצה של $ab + 1$ עכברים לבנים קיימת אחת מהאפשרויות הבאות: ישנה סדרה של $a + 1$ עכברים, כך שכל אחד צאצא של הבא אחריו; או שישנה קבוצה של $b + 1$ עכברים כך שאף אחד אינו צאצא של עכבר אחר.

25. a, b, c, d הם מספרים שלמים. יש להראות כי מכפלת ההפרשים
$$b - a,\quad c - a,\quad d - a,\quad c - b,\quad d - b,\quad d - c$$
מתחלקת ב- 12.

26. (אולימפיאדה הונגרית 1928) בקבוצת המספרים הממשיים החיוביים

$$a\ ,\ 2a\ ,\ \ldots\ ,\ (n - 1)a$$

ישנו מספר אחד הנבדל ממספר טבעי בלא יותר מ $\frac{1}{n}$.

27. בקבוצה של עשרה מספרים טבעיים עוקבים, אפשר למצוא תמיד לפחות מספר אחד ולכל היותר ארבעה כך שאינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 2, 3, 5, 7.

28. כאשר מחלקים משולש שווה שוקיים שאורך צלעו 1 לשלוש קבוצות חלקיות, אזי לפחות אחת הקבוצות החלקיות האלה היא בעלת "קוטר" $d \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

("קוטר" - מרחק מכסימלי בין שתי נקודות של הצורה").

29. בעיגול בעל רדיוס 9.5, אי אפשר להכניס 400 נקודות כך שהמרחק בין כל שתיים מהן גדול מ- 1.

30. נגדיר סדרה a_n

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \pmod{10} \qquad n \geq 1 \text{ עבור}$$

זוהי סדרת פיבונצ'י מודולו 10.
הראה כי סדרה זו היא מחזורית והמחזור מתחיל מן האיבר הראשון.
תן חסם עליון לאורך המחזור.
חזור על התרגיל למודולו כל שהוא.

31. (משפט שארית סיני) יהיו m ו n מספרים טבעיים זרים. הראה שעבור מספרים שלמים נתונים a ו b אפשר תמיד למצוא מספר שלם x כך שמתקיים.

$$x \equiv a \pmod m \qquad , \qquad x \equiv b \pmod n$$

רמז: הסתכל במספרים $a\ ,\ a + m,\ \dots,\ a + (n - 1)m$ מודולו n.

32. צובעים את נקודות המישור

א) עם שני צבעים.

ב) עם שלושה צבעים.

הראה כי קיימות תמיד שתי נקודות במרחק יחידה אחת בעלות אותו צבע.

ג) צבע את נקודות המישור ב-7 צבעים כך שאין זוג נקודות שמרחקן זו מזו יחידה אחת והן בעלות אותו צבע.

(עבור 4, 5, 6 צבעים לא מצאו עדיין פתרון לבעיה המתאימה).

33. (Erdös) $a_1, \dots, a_n$ הם מספרים טבעיים שעבורם

$$a_1 < \dots < a_n \leq 2n$$

אם הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של כל שניים מבין מספרים אלה גדולה מ 2n אזי $a_1 > \frac{2n}{3}$.

34. בכתה n תלמידים. בחופשה כתב כל אחד מהתלמידים האלה גלויה ל k מחבריו בכיתה. מהו ה- k הקטן ביותר כך שאפשר לטעון כי יש בכיתה לפחות זוג תלמידים שקבלו גלויה זה מזה.

35. א) נתונים 51 מספרים בני שתי ספרות. הראה, כי אפשר לבחור ביניהם לכל היותר 6 מספרים כך שאין שניים מבין המספרים שנבחרו אשר יש להם אותה ספרת יחידות, או אותה ספרת עשרות.

ב) נתונים המספרים הטבעיים k ו n , $1 < k < n$.

מהו ה- m הקטן ביותר שעבורו נכון הטיעון הבא: בכל חלוקה של m צריחים על לוח שחמט n×n ניתן לבחור k צריחים כך שאינם "מכים" זה את זה.

36. מבין 52 מספרים טבעיים ניתן לבחור שני מספרים כך שסכומם והפרשם מתחלק ב 100
האם טיעון זה נכון גם עבור 51 מספרים?

37. נתונים עשרה קטעים כך שאורך כל אחד גדול מ 1 ס"מ אך קצר מ 55 ס"מ. הראה כי
בין הקטעים האלה יש שלושה שאפשר לבנות מהם משולש.

38. צבעו את קודקודיו של משובע (בעל שבע צלעות) משוכלל בצבעים שחור או לבן. הראה,
כי ישנם שלשה קודקודים שווי צבע המהווים משולש שווה שוקיים. האם טענה זו נכונה
גם למתומן (בעל שמונה צלעות) משוכלל? עבור אילו מצולעים משוכללים נכונה הטענה
ועבור אילו - אינה נכונה.

39. נתונים 9 ישרים; כל אחד מהם מחלק ריבוע לשני מרובעים ששטחיהם מתייחסים זה לזה
כמו 2:3. הראה, כי לפחות 3 מבין 9 הישרים הנ"ל, עוברים דרך נקודה אחת.

שבבים - עלון למורי המתמטיקה - תיק מס' 16

הערת המערכת: באחד התיקים הבאים של "שבבים" נביא רמזים לזיהוי ה"פנינים"
וה"מגירות" בעזרתן ניתן לפתור את התרגילים.