מבט צבעוני על חידת המטבע המזוייפת

מאת: אורי לירון
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

1. הקדמה

חידות מתמטיות הן מכשיר מצויין שבאמצעותו ניתן להביא בפני תלמידים מכל הגילים מקצת מההנאה הכרוכה ב"עשיית" מתמטיקה. מובן שהשתתפותם הפעילה של התלמידים בגילוי הפתרון הכרחית כדי להפיק הנאה זו. לרוע המזל, רבות מהחידות היפות והמעניינות ביותר מבחינה מתמטית, הן קשות מדי מכדי שנוכל להשתמש בהן ביעילות בכיתה רגילה. הבה נבחן איפוא את הבעיה הבאה, שנקרא לה לשם קיצור "בעיית המורה": נתונה חידה יפה, מעניינת וקשה; מצא דרך יעילה להדריך את הכתה להגיע לפתרונה.

במאמר זה אציג חידה חדשה, אשר לה קשר מפתיע לחידת 12 המטבעות הקלאסית. החידה החדשה מאפשרת להציע פתרון לבעיית המורה הכרוכה בחידת 12 המטבעות. תיאור השיעור המוצע יובא בסעיף 3: באמצעות סדרה של חידות מודרגות, אך בעלות עניין עצמאי, אנו מאפשרים לתלמידים לפתור בכוחות עצמם את חידת 12 המטבעות הקשה. שיעור זה מהווה, איפוא, דוגמא לא-טריביאלית לפתרון בעיות בשיטת "הגילוי המונחה". בסעיף 4 נדון בהכללות של חידות אלו. הכְללות אלו מדגימות כמה מהתהליכים הבסיסיים של המתמטיקה בת זמננו, ואף על פי כן אין הן דורשות מכשירים מתמטיים מעבר לאלו הנלמדים בביה"ס התיכון (ועל פי רב - אף פחות מכך). במיוחד ראויים לתשומת לב תהליך ההפשטה והוכחת הקיום המופיעים בפתרון החידה B_n. האפשרות להשיג "עומק" מתימטי ולהכיר מבנים מתימטיים ותהליכי פתרון בעיות יסודיים, מבלי להזדקק לידיעות מוקדמות וחישובים רבים, הוא אחד המאפיינים העיקריים של חידה טובה. ואחרון-אחרון חביב: עיון בדרכי החשיבה של התלמידים ושלנו עצמנו בעת פתרון החידות, מאיר מספר נושאים בחינוך המתמטי. נושאים אלו יידונו במקומות המתאימים תוך כדי פיתוח הנושא.

2. חידת המטבע המזוייפת

חידת 12 המטבעות הופיעה לראשונה בשנות הארבעים, ושלהבה מייד את דמיונם של מתמטיקאים וחובבי חידות בכלל. אחד המחברים, אשר חיבתו לחידה אינה נופלת כנראה מזו של כותב מאמר זה, הוא Court*. הקורא המעוניין יוכל למצוא בספר זה תיאור מעניין של תולדות החידה ופתרונותיה.

---

* N. A Court: Mathematics in Fun and in Earnst, Signet Science Library, New York 1961, P. 205

בחידה טיפוסית של שקילת מטבעות, נתונות מספר מטבעות כולן שוות משקל פרט לאחת - "המטבע המזוייפת" - שהיא קלה במקצת או כבדה במקצת מן השאר. לרשות הפותר עומדים מאזניים ללא משקלות המשמשים להשוואה בלבד. תפקידו הוא לגלות את המטבע המזוייפת במספר נתון, מוגבל, של שקילות על המאזניים. ביתר פירוט, נתבונן בשלוש החידות דלהלן:

(א) נתונות 9 מטבעות, מצא את המטבע המזוייפת ב-2 שקילות אם ידוע כי היא קלה מהשאר.

(ב) נתונות 9 מטבעות צבועות באדום וצהוב (כל מטבע צבע אחד בלבד), וידוע כי צבעה של המטבע המזוייפת חייב להיות צהוב אם היא קלה יותר ואדום אם היא כבדה יותר. כמקודם, מצא ב-2 שקילות את המטבע המזוייפת מבין 9 המטבעות הצבועות.

(ג) נתונות 12 מטבעות. מצא את המטבע המזוייפת ב-3 שקילות וקבע אם היא קלה יותר או כבדה יותר מהשאר.

החידה (ג) היא חידת 12 המטבעות הקלאסית, והיא קשה למדי. החידה (א) היא חידת ילדים ידועה והיא קלה למדי. על פי נסיוני, תלמידים פותרים בקלות יחסית את (א), אך מעטים (כולל מבוגרים) מצליחים לפתור את (ג). מאמצי לגשר על הפער בין שתי החידות הידועות, הם שהביאוני לגילוי החידה החדשה (ב). כפי שהתברר, רבים מהפותרים שהתקשו קודם לכן לטפס מ (א) ל (ג), הצליחו עתה לעשות זאת בעזרת מדרגת הביניים, אשר החידה (ב) הציבה להם באמצע הדרך; הפתרון של (ג) נעשה פשוט-יחסית באמצעות רדוקציה ל (ב). יתר על כן, החידה (ב) מבהירה את <u>מבנה</u> הפתרון ל (ג) ובכך מוליכה בטבעיות לניסוח הכללות ופתרונן.

בסעיף הבא, תוך כדי תיאור הצגת החידות בכתה, מובאים רמזים רבים לפתרונן. עם זאת אני ממליץ לחובבי החידות שבין הקוראים לנסות לפתור את החידות בכוחות עצמם בטרם ימשיכו לקרוא. סבורני שבדרך זו יוכלו להפיק את מירב התועלת וההנאה מהחידות עצמן ומהמשך המאמר. תשובות מלאות ניתנות, בצורה מוכללת, בסעיף 4.

3. <u>הצגת החידות בכתה ופתרונן</u>

נסיתי חידות אלו הלכה למעשה בכמה כיתות וקבוצות אחרות של ילדים (תלמידים בינוניים ומעלה בגילים 10 עד 17) ומצאתי את תגובתם חיובית ביותר. מנסיוני רב-השנים עם חידת 12 המטבעות למדתי כי מרבית האנשים מצליחים לפתרה אך בקושי, אם בכלל. היתה זו, איפוא, הפתעה נעימה לגלות כי חלק ניכר מהתלמידים הצליח לגלות את הפתרון - ולהנות מכך!

סעיף זה כולל את הרעיונות העיקריים של הצגת הנושא בכתה. במהלך הצגת הנושא ניתנים רמזים לפתרון, אך בכוונה תחילה השארתי "חורים" רבים בפתרון. תקוותי שהקורא אשר יטרח לסתום חורים אלו יחייה בכך את אוירת הפעלתנות ששררה בכתה. השתתפותו הפעילה של הקורא אף תהווה הכנה טובה לסעיף הבא, שהינו מופשט יותר.

3.1 חידה (א) מוצגת לכתה תחילה. הבעייה העיקרית שמתעוררת כאן, לנוכח ההטרוגניות של הכתה, היא איך לספק תעסוקה מעניינת לכל התלמידים עד שנסכם את הפתרון עם הכתה כולה. חלק מהתלמידים מגלים את הפתרון עד מהרה, וחלקם אף הכירו חידה זו ופתרונה מלכתחילה. לתלמידים אלו נוכל להציב את האתגר הנוסף של "מה ניתן לעשות בעזרת 3 שקילות?". במקרים מסויימים נוכל להרחיק לכת ל-4 שקילות ואף לתהות על העקרון הכללי. אין זה נדיר שתלמיד טוב יגלה את העקרון הכללי "בצורה רקורסיבית", דהיינו שהמטבעות מתרבות פי 3 עם כל שקילה מותרת נוספת. (טיפול מתימטי במקרה הכללי יינתן בסעיף הבא.) תלמידים אחרים, מאידך, מתקשים בפתרון ולפעמים אינם יודעים איך להתחיל. הרמז הבא יספיק בדרך כלל להעלותם על דרך המלך: "נסו 3 מטבעות בשקילה אחת".

3.2 כאן ובהמשך רצוי לסכם את הפתרון עם כל הכיתה, תוך שימת דגש על רדוקציה למקרים שכבר נפתרו קודם לכן (לעתים קרובות יהיה זה אחד התלמידים שיעשה את המלאכה עבורנו). כך למשל, בפתרנו את המקרה של 27 מטבעות ו-3 שקילות, נפצל את המטבעות ל-3 ערימות בנות 9 מטבעות כל אחת, ונשתמש בשקילה הראשונה לזיהוי הערימה המכיל את המטבע המזוייפת. עתה עלינו לגלות את המזוייפת מבין 9 מטבעות אלו ב-2 השקילות הנותרות. אולם זו בעייה שכבר פתרנו קודם לכן. עם העלייה ההדרגתית בדרגת הסיבוך של החידות, התלמידים מקבלים הדגמה ברורה של אחד ההיבטים היסודיים של מתמטיקה גבוהה: הפתרון של בעייה מסובכת ניתן לתיאור ולהבנה בקלות יחסית, אם רק נקח כנקודת הזינוק את הבעיות שפתרנו קודם לכן. אם נדמה את דרגת הסיבוך של בעייה לגובהה של פסגת הר, נוכל לומר בלשון ציורית כי פסגה גבוהה אינה נראית כה גבוהה אם משקיפים אליה מנקודת ראות של פסגות סמוכות, אליהן העפלנו כבר קודם לכן. הדגשה זו על רדוקציה אף סוללת את הדרך לשימוש באינדוקציה מתמטית (כפי שיובא בסעיף הבא).

3.3 אנו ניגשים עתה לחלק הצבעוני של החידות, דהיינו חידה (ב). בעזרתם של התלמידים נוכל למצוא תחילה - ולסלק מדרכנו - את המקרים הקלים יותר. בתור הכנה, רצוי להתחיל במקרה הקל של "3 מטבעות ושקילה אחת". החידה

(ב) עצמה אף היא קלה למדי בתנאי שיש 6 או יותר מטבעות מאותו צבע.
(נציין, דרך אגב, שאם כל המטבעות צבועות צהוב אנו שוב בחידה (א).) עתה נפנה למקרה הנותר, שבו 5 מהמטבעות צבועות בצבע אחד ו-4 בשני. מקרה זה הוא ה"אגוז" האמיתי שבחידה, והוא גם המקרה שישמשנו בפתרון החידה (ג). פתרון מקרה זה דורש תחכום מסויים ולכן יהיו מהתלמידים שיזדקקו לעזרה. כתמיד, רצוי לעזור לתלמיד לגלות את הפתרון באמצעות עקרונות כלליים, ולא ע"י רמזים ספציפיים המתאימים רק לחידה זו. עקרון כללי כזה ניתן ב 3.4 להלן, ובעזרתו אפשר להנחות את התלמיד אל הפתרון. ה"טריק" הוא, על כל פנים, לשקול שתי ערימות, כל אחת בת 2 מטבעות אדומים ואחת צהובה (או להיפך). על ידי כך נשיג רדוקציה למקרה של "שלוש מטבעות ושקילה אחת" שנפתר כבר קודם לכן.

3.4 הפשטה, אנלוגיה, הכללה. בפתרון של (ב) דלעיל הופיעו לפחות 3 סוגים שונים של שקילות. בשלב זה כדאי שנשאל את עצמנו (כמו גם את תלמידינו), מהו המשותף לכל השקילות הללו? כדי לענות על שאלה זו, הבה נכנה שתי ערימות דומות, אם יש בהן אותו מספר של מטבעות אדומות ואותו מספר של צהובות; בקיצור, אם צביעתן זהה. קל להווכח שבשקילות הקודמות תמיד השווינו שתי ערימות דומות.
"עקרון הדמיון" הזה ימצא שימוש נאה בפתרון החידה המוכללת B_n בסעיף הבא.
בינתיים אנו רואים כאן, בזעיר אנפין, הדגמה של אחד התהליכים היסודיים של פתרון בעיות, שהוא גם כה אופייני להתפתחות המודרנית של המתמטיקה. אנו מתחילים בחיפוש תכונות משותפות למספר דוגמאות קונקרטיות נתונות, כלומר בתהליך ההפשטה. תהליך זה, פעולתו כמסננת: הוא משמר את החשובות והרלבנטיות שבין העובדות הנדונות, ואילו הפרטים הלא-רלבנטיים הקשורים לדוגמאות הקונקרטיות - אלו המהווים את ה"רעש" - נשמטים ונעלמים. באופן כזה אנו מסוגלים להפיק תועלת מהתבוננות בדוגמאות, אך עם זאת להשתחרר מאחיזתן המגבילה, ובכך לסלול את הדרך להכללות. תהליך ההפשטה עומד גם מאחורי פתרון בעיות בדרך האנלוגיה: העקרונות שדלינו מהדוגמאות הקונקרטיות ע"י הפשטה, משמשים אותנו כאן לטיפול במקרה קונקרטי חדש, אך קרוב בתכונותיו למקרים הקודמים. נוכל להשתמש מייד ברעיון זה על מנת לעזור לתלמיד המתקשה בפתרון החלק האחרון של חידה (ב). לשם כך נכוונו שיבחן את המקרים שכבר פתר, עד שיסיק בעצמו את "עקרון הדמיון", ולאחר מכן ישתמש בו לפתרון המקרה הנותר.

3.5 אנו מוכנים לבסוף לתקוף את החידה הקלאסית (ג). לאחר שניתן לתלמידים זמן מה להכרות עם החידה, רצוי לעזור להם לנחש את השקילה הראשונה (דהיינו 4 כנגד 4) - דבר זה לא יגרע מאומה מיופיה של החידה. התלמידים מגיעים באופן טבעי לניחוש זה ע"י בחינת השקילות הראשונות בכל החידות הקודמות: בכולן פצלנו את המטבעות ל-3 ערימות שוות ושקלנו שתיים מהן זו מול זו. ועתה - לפתרון. אם הכפות מתאזנות בשקילה הראשונה, כי אז 8 המטבעות הנשקלות הן אמיתיות. מציאת המטבע המזוייפת בין 4 הנותרות ב-2 שקילות, היא עתה עניין קל יחסית. נעבור איפוא למקרה האחר, שבו הכפות אינן מתאזנות בשקילה הראשונה. מקרה זה - ככל הנראה הקשה ביותר בבעייה כולה - הופך לקל מאוד בגישתנו: פשוט נצבע את הערימה הכבדה באדום ואת הקלה בצהוב. היות וברשותנו עדיין 2 שקילות, הרי שהשגנו רדוקציה לחידה (ב). (כדי להעלות את מספר המטבעות הצבעוניות ל-9, כנדרש בחידה (ב), נוכל פשוט לצרף אליהן את אחת המטבעות האחרות, כשהיא צבועה באורח כלשהו.)

3.6 רעיון המפתח בפתרון החידה (ג) - צביעת המטבעות - הינו פשוט ביותר לניסוח ולהבנה. מפתיע הדבר, איפוא, שהתלמידים אינם מגלים רעיון זה כה בקלות, אפילו כאשר ברגע המכריע נציע להם להשתמש ב- (ב). לעומת זאת, הרמז הבא יביא בד"כ ל"אהה!" המבוקש: "נניח שיש לנו מכחול ושני צבעים...". עובדה זו מרמזת כי הקושי כאן איננו דווקא בתוכנו של רעיון הצביעה, אלא בצורך להכניס אמצעי-עזר חדש שאיננו נמנה על נתוני הבעייה המקוריים.

3.7 שתי וריאציות משעשעות על חידת 12 המטבעות הן כדלקמן: ראשית, נוכל להגדיל את מספר המטבעות בחידה ל- 13, אם ניתן לנו לשאול מטבע אמיתית מחבר. כלומר, אם נתונות 13 מטבעות ומטבע נוספת הידועה כאמיתית, ניתן לגלות את המזוייפת ב- 3 שקילות ולקבוע אם היא קלה או כבדה. הפתרון דומה לזה של (ג), פרט לכך שבשקילה הראשונה נשקול 5 כנגד 5, ובכללן המטבע השאולה. שנית, ניתן להגדיל את מספר המטבעות בחידה ל-13, גם ללא מטבע שאולה, אם רק נוותר על הדרישה לקבוע אם המטבע המזוייפת קלה או כבדה. הקוראים מוזמנים לפצח שתי וריאציות אלו להנאתם.

3.8 לסיום, הרי שני "טריקים" משחקיים עבור הגילים היותר צעירים. ראשית, נוכל לתת לתלמידים להיעזר במטבעות-ממש בעת פתרון החידות. אחר כך, כאשר דרושות מטבעות רבות או צבעוניות, נוכל להחליפן במטבעות נייר.
שנית, המשחק המתואר להלן יגביר את הנאת התלמידים מהשעור, ובה בשעה יאפשר להם להביא לכלל ביצוע מעשי את פתרונותיהם. משחק זה אף מאפשר לתלמידים

לבדוק את פתרונותיהם, בלא שיזדקקו לסמכותו של המורה. במשחק משתתפים זוג תלמידים, ה"מאזניים" וה"בלש". ה"מאזניים" מחליט בחשאי איזוהי המטבע המזוייפת, ואח"כ "שוקלי" את המטבעות בכפות ידיו (= כפות המאזניים) לפי הוראות ה"בלש". בהכירו את המטבע המזוייפת, הוא מדגים בידיו את תוצאות השקילה. ה"בלש", ע"י תכנון נאות של השקילות וע"י פירוש תוצאותיהן, מגלה את המטבע המזוייפת במספר הנתון של שקילות.

4. החידות המוכללות

בסעיף זה נעמיק בחקר התוכן המתמטי של חידות המטבעות ודרכי פתרונן, וזאת באמצעות הכללתן: במקום להרשות רק 2 או 3 שקילות, נבחן עתה את החידות המתקבלות כאשר מרשים מספר כלשהו, n, של שקילות. חידות אלו יסומנו A_n, B_n ו- C_n. (החידות (א), (ב) ו- (ג) הופכות בסימון זה ל- A_2, B_2 ו- C_3 בהתאמה.) כאן עלינו לפתור ב"מכה אחת" מספר אינסופי של חידות, ולכן לא ייפלא שהפתרון יהיה מופשט יותר וקשה יותר להבנה. יובן, איפוא, שהחומר המוצג כאן איננו מיועד לשימוש ישיר בכיתה, פרט אולי לחוגי פתרון בעיות של תלמידים מוכשרים בכיתות העליונות. ראוי לציין עם זאת, שמהבחינה הטכנית איננו חורגים מרמת ביה"ס התיכון, ופרט לשימוש באינדוקציה מתמטית - אף מרמת חטיבת הביניים. ניתן לעבד בקלות חומר זה לחוגים נרחבים יותר של תלמידים - מבלי שיאבד הרבה מעושרו המתמטי - ע"י הגבלת ההכללה לחידות A_3, B_3 ו- C_4 בלבד. טיפול זה מצוי בהחלט בתחומי החומר הנלמד בחטיבת הביניים (ולתלמידים מצטיינים - אפילו בביה"ס היסודי!), היות ובו נעלמים האינדוקציה המתמטית והטיפול הכללי בחזקות. יתר על כן, גם פתרון החידות הכלליות ניתן לתיאור בצורה משכנעת ללא אינדוקציה, כפי שאדגים ב- A_n.

4.1 <u>החידה A_n.</u> בהינתן 3^n מטבעות, מצא את המזוייפת ב- n שקילות אם ידוע כי היא קלה מהאחרות.

הפתרון איננו שונה במהותו מזה המוצג בסעיף 3 למקרה של 9 או 27 מטבעות. תחילה נחלק את 3^n המטבעות ל-3 ערימות שוות בנות 3^{n-1} מטבעות כל אחת, ונשקול שתיים מבין ערימות אלו זו מול זו. תוצאת השקילה תצביע על הערימה (מבין ה-3) המכילה את המטבע המזוייפת, ובכך תקטין את מספר המטבעות החשודות ל- 3^{n-1}. בשקילה השנייה נחזור על תהליך דומה ונוריד את מספר המטבעות החשודות ל- 3^{n-2}, וכך הלאה. נשים לב שמספר המטבעות החשודות קטן פי 3 (ולכן מעריך החזקה יורד ב- 1) עם כל שקילה. מספר המטבעות החשודות לאחר השקילה ה- k יהיה, איפוא, 3^{n-k}. אנו רואים שלאחר n-1 שקילות יישארו 3 מטבעות חשודות ומתוכן נמצא לבסוף את המזוייפת בשקילה האחרונה.

נביא כעת ניסוח פורמלי יותר של הפתרון באמצעות אינדוקציה מתמטית. פתרון החידה A_o הוא טריביאלי ולכן נניח עתה כי $n > 0$ וכי כבר מצוי בידינו פתרון של A_{n-1} (כלומר, תהליך לגילוי המזוייפת מבין 3^{n-1} מטבעות ב- $n-1$ שקילות). לפתרון A_n, נשתמש בשקילה הראשונה (כמקודם) כדי לגלות ערימה בת 3^{n-1} מטבעות, המכילה את המטבע המזוייפת. עתה נשתמש בהנחת האינדוקציה על מנת לגלות את המזוייפת מבין 3^{n-1} החשודות ב- $n-1$ השקילות הנותרות.

<u>הערה:</u> הפתרון הראשון הנו בהיר ומשכנע לפחות כמו השני ולכן בד"כ הוא הפתרון שרצוי להביאו בפני הכיתה, אלא אם כן מטרת המורה היא להשתמש בחידה כדי להדגים את עקרון האינדוקציה. הווה אומר, מבחינה דידקטית אין לראות את האינדוקציה כעוזרת לפתרון החידה, אלא להפך - החידה עוזרת להדגמת השימוש באינדוקציה. כוחה של הערה זו יפה גם לגבי החידה B_n. לעומת זאת, פתרון החידה C_n, עקב מורכבותו, נוח יותר לניסוח ולהבנה בעזרת אינדוקציה, ולכן שם השימוש בה טבעי.

4.2 <u>החידה B_n.</u> נתונות 3^n מטבעות צבועות באדום וצהוב כבחידה (ב) של סעיף 2. מצא את המטבע המזוייפת ב- n שקילות.

<u>הערה:</u> הפתרון שיובא להלן, אילו הוצג באופן פורמלי, היה מופיע כקצר ואלגנטי. אף על פי כן אני מעדיף להביאו בצורה היוריסטית (למחצה), שכן צורת הגשה זו מגלה ביתר בהירות את הרעיונות מאחורי הפתרון ואיך ניתן היה לגלותו. ראוי לציין, עם זאת, כי לא כך גליתי את הפתרון. כפי שיקרה תכופות, היה בידי תחילה פתרון קונקרטי יותר, בדומה לזה של חידה (ב) בסעיף 3. "עקרון הדמיון", שעליו מבוסס הפתרון הנוכחי, צץ רק בשלב מאוחר יותר. אני חייב תודה ליובל בן העשר עבור רעיון זה שפלט בהיסח הדעת, בעת שעבד על פתרון B_3.

כמו בפתרון A_n, נשאף גם כאן לבודד בשקילה הראשונה 3^{n-1} מטבעות המכילות את המטבע המזוייפת. אולם <u>כיצד</u> נשיג זאת? כדי להעלות רעיונות, הבה נחזור ונעיין בניתוח הפתרון של B_2 (הלא הוא (ב)) שבצענו בסעיף 3.4. הרעיונות שהועלו בעקבות מקרה פרטי זה, מוליכים לתכנית הפעולה הבאה למקרה הכללי: נפצל את 3^n המטבעות ל- 3 ערימות בנות 3^{n-1} מטבעות כל אחת, <u>באופן שתווצרנה שתי ערימות דומות</u>, ונשקול ערימות דומות אלו זו מול זו. (כזכור, "דומות" פירושו "צבועות באופן זהה"). כמובן שהעובדה שתכנית זו אכן פעלה במקרה הפרטי, אינה מהווה ערובה להצלחתה גם במקרה הכללי. כדי לוודא זאת, עלינו לבדוק שתי נקודות

חשובות. ראשית, האם תכנית זו תמיד ניתנת לביצוע? כלומר, האם תמיד אפשרי הדבר ליצור שתי ערימות דומות בנות 3^{n-1} מטבעות כל אחת? (במונחים מתימטיים, עלינו להוכיח קיום של ערימות כאלו). דבר זה אינו טריביאלי, שכן עלינו לקחת בחשבון את כל האופנים האפשריים של צביעת המטבעות. אך הבה נטפל תחילה בנקודה השנייה: האם תכנית הפעולה המוצעת אפקטיבית? כלומר, האם ביצועה אכן יוליכנו לפתרון החידה? היות והמטרה שהצבנו לשקילה הראשונה היא לבודד 3^{n-1} מטבעות המכילות את המטבע המזוייפת, נוכל לנסח שאלה זו ביתר דיוק כך: האם ניתן כתוצאה משקילת שתי ערימות דומות בנות 3^{n-1} מטבעות כל אחת, לבודד 3^{n-1} מטבעות המכילות את המטבע המזוייפת? בניסוח זה, השאלה כבר אינה קשה (ביחוד אם פתרת בעצמך את המקרה האחרון של חידה (ב) בסעיף 3). ואמנם, נניח כי בשקילה זו הכפות אינן מתאזנות - למשל, השמאלית עולה. לפי המשמעות של צביעת המטבעות, קל לראות שהמטבע המזוייפת חייבת להמצא בין המטבעות הצהובות שבכף שמאל או בין המטבעות האדומות שבכף ימין. לכן נוכל ליצור ערימה חדשה של 3^{n-1} מטבעות, המכילה את המטבע המזוייפת: פשוט נסלק את המטבעות הצהובות שבכף ימין ונשים במקומן את המטבעות הצהובות מכף שמאל, השוות להן במספרן. בכך השגנו את הרדוקציה המבוקשת ל- 3^{n-1} מטבעות בשקילה אחת. אותה הרדוקציה במקרה השני, שבו הכפות מאוזנות בשקילה הראשונה, היא פשוטה ונשאירה לקורא. נפנה עתה לשאלת הקיום שהועלתה קודם: האם ניתן תמיד ליצור שתי ערימות דומות בנות 3^{n-1} מטבעות כל אחת? הדרישה המדוייקת בדבר גודל הערימות מקשה על התשובה. ננסה איפוא, לשם התחלה, להקל על עצמנו - ע"י הסרת דרישה זו. קל ליצור ערימות דומות קטנות מאוד, למשל "ערימות" בנות מטבע אחת כל אחת; אך לא ברור כיצד זה יעזור לנו. האם נוכל גם ליצור ערימות דומות גדולות מאוד? (ואם כן, האם זה יעזור לנו בפתרון השאלה המקורית?) למשל, האם נוכל לחלק את כל המטבעות לשתי ערימות דומות? כמובן שלא! שהרי מספר המטבעות, 3^n, הוא איזוגי. ננסה איפוא לסלק מטבע אחת. האם נוכל לפצל את 3^n-1 המטבעות הנותרות (עתה מספר זוגי!) לשתי ערימות דומות? הבה ונראה: אילו היה הדבר אפשרי, היינו מקבלים שתי ערימות אשר מספרי המטבעות האדומות והצהובות בהן שווים. מה נוכל להסיק מכאן לגבי הערימה המקורית של 3^n-1? (אנו קרובים מאוד לקו הסיום. התוכל לראותו עתה?) זהו זה! מסך כל 3^n המטבעות עלינו לסלק מטבע אחת באופן שגם האדומות וגם הצהובות הנשארות יהיו במספר זוגי. ואכן, משימה זו היא בהחלט אפשרית (מדוע?).

נחזור עתה על עקבותינו ונהפוך את הדיאלוג הסוקרטי דלעיל לסקיצה של הוכחת הקיום המבוקשת:

ראשית, נסלק מטבע מתאימה כך שיישארו 3^n-1 מטבעות, שבהן מספר האדומות ומספר הצהובות שניהם זוגיים. שנית, נפצל 3^n-1 מטבעות אלו לשתי ערימות דומות, ולבסוף, נסלק מערימות דומות אלו בזה אחר זה זוגות של מטבעות דומות, עד

שנגיע לגודל הרצוי של 3^{n-1} מטבעות כל אחת.

בכך סיימנו את הוכחת הקיום של ערימות דומות, כנדרש. לאחר שהראינו כיצד אפשר לרדת מ- 3^n מטבעות ל- 3^{n-1} בשקילה אחת, נוכל לסיים את הפתרון באינדוקציה בדיוק כמו בפתרון החידה A_n. לחילופין, נוכל לסיים ע"י השיקול הפחות פורמלי של חזרה על אותו צעד n פעמים עד למציאת המטבע המזוייפת.

הערה: הפתרון שהבאנו הוא מופשט. הוא עוסק בתכונותיהן של הערימות הנשקלות (עליהן להיות דומות) ולא בהרכב המסויים שלהן (כמו, למשל, $2\cdot3^{n-1}$ אדומות ו- 3^{n-1} צהובות כל אחת). אופיו זה של הפתרון עושה אותו קשה יותר להבנה, אך בו בזמן הוא זה שמקנה לו את כוחו לאחד מקרים רבים תחת שיקול יחיד: לא זו בלבד שאנו מטפלים ב"מכה אחת" בכל אפשרויות הצביעה, אלא (כפי שניתן להראות) פתרון זה כולל בתוכו את כל הפתרונות האפשריים כמקרים פרטיים.

4.3 החידה C_n. בהינתן $\frac{1}{2}(3^n-3)$ מטבעות, מצא את המזוייפת ב- n שקילות וקבע אם היא קלה או כבדה מהשאר.

הערות: א. נסמן את המספר $\frac{1}{2}(3^n-3)$ של מטבעות בחידה C_n ע"י k, או k(n). איך היינו יכולים לגלות מספר זה על סמך ידיעותינו הקודמות? האינפורמציה הכלולה בחידה (ג), דהיינו $k(3) = 12$, היא בבירור בלתי מספקת כבסיס לניחוש k(n) באופן כללי. לעומת זאת, אם נתבונן בפתרון של (ג), נוכל להגיע לניחוש הנכון באופן טבעי: מתוך רצון לחקות את חלקו העיקרי של פתרון זה, סביר להניח שגם כאן נרצה לחלק את k המטבעות (k כרגע בחזקת נעלם) ל-3 ערימות שוות-מספר, לשקול שתיים מהן ואז לצבען אדום וצהוב. מתבקש הדבר, איפוא, שנשווה את המספר $\frac{2}{3}k$ של המטבעות בשתי הערימות עם המספר 3^{n-1} של מטבעות צבועות בחידה B_{n-1}. אולם 3^{n-1} אי-זוגי בעוד ש- $\frac{2}{3}k$ זוגי,

נאלץ להסתפק במשוואה $\frac{2}{3}k = 3^{n-1}-1$.

מכאן נקבל כי $k = \frac{3}{2}(3^{n-1}-1) = \frac{1}{2}(3^n-3)$.

נציין, דרך אגב, כי חישובים אלו מצביעים על דרך נוספת בה החידה (ב) מבהירה את פתרון החידה (ג). השיקול האחרון, שהוביל באופן טבעי להכללת (ג), לא היה אפשרי על סמך הפתרונות ה"מסורתיים" של (ג). ואמנם מעניין לציין כי ההכללות הראשונות שהופיעו בספרות המתמטית, עסקו במספר מטבעות קטן יותר מאשר המספר k(n) שהתקבל לבסוף (שהוא, כפי שניתן להוכיח, הטוב ביותר האפשרי).

ב. הפתרון של C_n מורכב בעיקרו מצירוף יחודי של מספר תוצאות וטכניקות שהופיעו קודם לכן, ואינו מכיל רעיונות מתמטיים בעלי עניין כללי. ה"בשר" של הפתרון כבר כלול בחידה B_n, אשר עליה מבוסס הפתרון הנוכחי. מסיבה זו יובא תיאור הפתרון בקצרה, תוך השמטת הפרטים הקטנים.

לפני שנפתור את C_n, נוח לפתור בנפרד את החידה הקלה הבאה:

D_n: בהינתן $\frac{1}{2}(3^n-1)$ מטבעות (דהיינו, אחת יותר מאשר ב- C_n) בתוספת מאגר גדול של מטבעות אמיתיות, מצא את המזוייפת ב- n שקילות וקבע אם היא קלה או כבדה מהשאר.

<u>הערה</u>: אביא כאן פתרון קל באינדוקציה, המבוסס על החידה A_{n-1}. לפתרון זה דרושות 3^{n-1} מטבעות טובות במאגר. בגירסה מתוחכמת יותר של D_n, המבוססת על החידה B_{n-1}, ניתן להשיג אותה מטרה בהינתן מטבע נוספת אמיתית <u>אחת בלבד</u>. היות וגרסה חזקה זו אינה דרושה לנו לצורך פתרון C_n, נשאירה כתרגיל לקורא המעוניין (ראה גם ב- 3.7).

וכעת - לפתרון D_n: בהינתן $\frac{1}{2}(3^n-1)$ מטבעות, נשקול 3^{n-1} מהן כנגד 3^{n-1} מהמטבעות האמיתיות. אם הכפות בשקילה זו לא יתאזנו, נוכל לסיים על פי A_{n-1} (או החידה האנלוגית לה במקרה שהמטבע המזוייפת כבדה יותר). אם, מאידך, הכפות יתאזנו, אז המטבע המזוייפת נמצאת בין המטבעות הנותרות שמספרן:

$$\frac{1}{2}(3^n-1)-3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^{n-1}-1) .$$

לכן נוכל לסיים בעזרת טיעון באינדוקציה.

לבסוף, נפנה לפתרון C_n, שהוא עתה קל להשגה באמצעות רדוקציה ל- B_{n-1} ו- D_{n-1}. בהינתן $k = \frac{1}{2}(3^n-3)$ מטבעות נחלקן ל-3 ערימות של $\frac{1}{3}k$ מטבעות כל אחת ונשקול שתיים מהן זו מול זו. אם אין איזון, נצבע את הערימה הקלה יותר בצהוב ואת הכבדה יותר באדום, ובכך יהיו בידינו מטבעות צבועות שמספרן:

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{3}k = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(3^n-3) = 3^{n-1}-1 .$$

נצרף אליהן מטבע נוספת (אמיתית) הצבועה באורח שרירותי ונסיים על פי B_{n-1}.
אם, מאידך, הכפות מתאזנות בשקילה הראשונה, אז המטבע המזוייפת חייבת להמצא בין המטבעות הנותרות שמספרן:

$$\frac{1}{3}k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(3^n-3) = \frac{1}{2}(3^{n-1}-1) .$$

היות ויש בידנו מהשקילה הראשונה מאגר של $3^{n-1}-1$ מטבעות אמיתיות (מספר שהוא ודאי גדול יותר מאשר המספר הדרוש של 3^{n-2}), נוכל לסיים לפי D_{n-1}. בכך סיימנו את פתרון החידה C_n.

5. סיכום

הנושא העיקרי של דיוננו היה הקשר בין חידות ובין הוראת המתמטיקה. באמצעות "בעיית המורה" מההקדמה, ניסיתי להראות כי קשר זה מסוגל להעשיר את שניהם. הצגת החידה בכיתה, כפי שתוארה בסעיף 3, מספקת לתלמידים פעילות מעניינת ומשעשעת ובאותו זמן מתרגלת אותם בפתרון בעיות. ראינו גם כי חידה טובה מסוגלת להדגים רעיונות מתמטיים עמוקים למדי, תוך הצמדות לסיטואציה פשוטה וקונקרטית ביותר. אולם, מעבר לתועלת התלמידים, העיסוק בפתרון "בעיית המורה" מהווה, לפי נסיוני, פעילות רבת ערך עבור המורה עצמו. האתגר הטמון בעיסוק זה, והסיפוק מההתגברות עליו, אינם נופלים לעיתים מאלו הכרוכים בפתרון החידה המקורית עצמה; והדבר מוסיף הרבה להבנת פתרון החידה. החוקר הנודע של תהליכי פתרון בעיות ג'ורג' פויה (Polya), בספרו "כיצד פותרין"*, מציין את חשיבות שלב "ההסתכלות לאחור", שעיקרו העמקה והפקת לקחים מהפתרון המוצלח של בעיה. נראה כי אחת הדרכים היעילות לביצוע שלב זה היא לחשוב על דרך להצגת החידה בפני כיתה. נזכיר כאן גם כי היה זה עצם הנסיון לפתור את בעיית המורה עבור חידת 12 המטבעות, שהביא לגילוי החידה החדשה (ב).

לסיום, אביא הרהור נוסף הקשור אף הוא בנושא הבנת הפתרון. נראה לי כי על ידי תכנון מוצלח של שלבי השיעור, יכול המורה לא רק להוביל את התלמידים לגילוי עצמי של הפתרון, אלא אף להבנה טובה יותר שלו. כדי להבהיר נקודה זו, נדמה לעצמנו מצב (אידיאלי במידת-מה) שבו שני תלמידים שווי-כשרון, שמעון וראובן, פותרים את חידת 12 המטבעות בשתי דרכים שונות. שמעון, השאפתני יותר בין השניים, פתר את החידה בכוחות עצמו לאחר שעות רבות של מאמץ מחשבתי. ראובן, לעומתו, הגיע לפתרון במשך 90 דקות בדרך הגילוי המונחה כפי שתואר בסעיף 3. נניח גם, לצורך הטיעון, כי החומר החשוב לתלמידים הוא החידה (ג) עצמה, ואילו החידה (ב) הוכנסה רק כאמצעי עזר להשגת מטרה זו. שמעון וראובן מחליטים לבדוק את מידת הבנתם את הפתרון לפי שני קריטריונים: השתמרות הפתרון בזכרונם (נאמר לאחר שנה), ויכולתם להכליל את החידה ופתרונה (למשל, פתרון החידה C_4 - המקרה של 39 מטבעות ו-4 שקילות - ללא עזרה). על סמך נסיוני האישי אני משוכנע שהצלחתו של ראובן בשני המבחנים תהיה מרובה משל שמעון. (ראה גם הערה א' בסעיף 4.3.) נראה איפוא שאפילו כאשר רמת הכיתה והזמן העומד לרשותה מאפשרים לימוד בשיטת הגילוי העצמי, נוכל לפעמים להשיג תוצאות טובות יותר ע"י גילוי מונחה, כאשר הוא מתוכנן כהלכה. (מחשבות אלו, כמו גם הניתוח להלן, נולדו בי כתוצאה מהתבוננות עצמית בעת שפתרתי את החידה בשתי הדרכים. אך היות ובינתיים הספקתי להתבונן ב"שמעונים וראובנים" אמיתיים רבים, אני מאמין שהתמונה המתוארת כאן היא טיפוסית.)

---

*ג' פויה: כיצד פותרין? אוצר המורה, תשכ"ב.

הנושא של הבנת הפתרון (לעומת גילוי הפתרון בלבד) הוא נושא עמוק ומסובך שמן הראוי להוסיף ולחקור בו רבות. הסיפור של שמעון וראובן מצביע על מקור אפשרי להבנת ההבדל. נראה כי אחד הגורמים החשובים הוא ראיית <u>מבנה</u> הפתרון (אשר כאן מתבטא בצביעת המטבעות והרדוקציה ל- (ב)). שמעון אשר ככל הנראה פתר את החידה ע"י "ניסוי ותעיה", המוגברים לפרקים ע"י הברקות בודדות, מחזיק בידו את כל <u>החלקים</u> המרכיבים את התהליך למציאת המטבע המזוייפת, ויודע כי התהליך אכן פועל. לראובן, לעומתו, יש תמונה יותר שלמה וכוללת (אינטגרטיבית) של הפתרון: בראותו ביתר בהירות את <u>היחסים</u> בין המרכיבים השונים ובינם לבין הפתרון השלם, הוא רואה טוב יותר <u>מדוע</u> התהליך פועל.

שבבים - עלון למורי המתמטיקה, תיק מס' 16