שבבי שבבים

עשר פנים לשש

מאת: א. הרכבי

החידה הבאה הובאה לידיעתי על ידי רס"ן יעקב קמחי ז"ל (1942-1978), חובב מתמטיקה, בהיותו שליח הסוכנות היהודית בבואנוס איירס, ארגנטינה.
אני מביא אותה לידיעתם של מורים למתמטיקה לזכרו של יעקב.

<u>חידה</u>

עליך לרשום את המספר שש באופנים שונים. בכל כתיבה תוכל להשתמש שלוש פעמים באותה הספרה, בארבע פעולות החשבון, חזקה, $\sqrt{}$ (שורש ריבועי), ! (עצרת).

ניתן לעשות זאת לגבי כל אחת מהספרות מ 0 עד 9. קל מאוד לבטא את המספר שש באמצעות שלוש פעמים הספרה 2:

$$2 + 2 + 2$$

$$2 \cdot 2 + 2$$

$$2^2 + 2$$

עתה נבטא את שש בעזרת 7:

$$7 - \frac{7}{7}$$

כדי לרשום את שש בעזרת 8, אנו זקוקים ל $\sqrt{}$ אך לא נקח בחשבון את המעריך כמספר.
(האם תוכל למצוא אפשרות אחרת?)

$$8 - \sqrt{\sqrt{8 + 8}}$$

נסה לכתוב את המספר שש לפי הכללים האלה בעזרת הספרות האחרות.

צרופי ספרות

מאת: מ. שורק

נציג פה בעיה של צרופי ספרות שהיא, כמו בעיות רבות, בעצם "שעשוע" המאפשר חקירה מתמטית.

<u>בעיה:</u>

בנה את המספר 100 על ידי שימוש בשבע הספרות 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 תוך שמירה על סדרן ובעזרת פעולת החיבור בלבד.

<u>ניתוח:</u>

אם נסכם את שבע הספרות, נראה כי סכומן

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

לכן על מנת להגיע ל 100 עלינו ליצור מספרים דו ספרתיים.
אך, כאשר אנו מנצלים ספרה מסוימת כספרת עשרות, תרומתה לסכום 28 תגדל פי 10 ולעומת זאת יש לחסר אותה מהסכום הנ"ל.

נניח כי בחרנו את הספרה a כספרת עשרות, הסכום החדש יהיה

$$28 + 10a - a = 28 + 9a$$

אנו רוצים להגיע ל- 100, לכן:

$$28 + 9a = 100$$
$$9a = 72$$
$$a = 8$$

אבל, אנו הוגבלנו מלכתחילה לשבע הספרות הראשונות!

כלומר: יש ליצור לפחות שני מספרים דו ספרתיים.

נניח כי נבחר את הספרות a ו b לצורך זה.
משקולים דומים למה שעשינו קודם נקבל:

$$a + b = 8$$

כלומר יש לנצל זוג ספרות שסכומן 8, לצורך ספרות עשרות.

האפשרויות הן:

$$1 + 7 \quad , \quad 2 + 6 \quad , \quad 3 + 5$$

האפשרות 7 + 1 נופלת כי הוגבלנו להופעת הספרות בסדרן הטבעי ולכן לא תוכל להופיע שום ספרה אחרי 7.

לכן נקבל שני פתרונות בלבד:

$$1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100$$

$$1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100$$

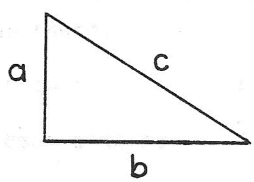
אך אולי אפשר לבנות סכום 100 על ידי יותר משני מספרים דו ספרתיים?

היקף שווה לשטח?

מאת: נורית זהבי

קורה ותלמידים "מבלבלים" בין היקף ושטח. ברור כי היקף ושטח שונים ביחידותיהם, אולם יש מקרים בהם שווים ערכיהם המספריים. מדלין ביטס* מתארת כיצד הגיעה בעקבות שיחה שהתעוררה בכיתה לחקירת התנאים הדרושים לשויון מספרי של היקף ושטח של משולשים.

היא מתחילה ממשולש ישר זוית וזה החלק המעניין. הכללת התנאי למשולש כלשהו נעשית בעזרת טריגונומטריה.



נעסוק כאן במשולש ישר זוית.

נסמן את ניצביו ב a ו b ואת היתר ב c.

תבנית מספר לחישוב השטח היא $\frac{1}{2}ab$

תבנית מספר לחישוב ההיקף היא $a + b + c$

נרשום מערכת תבניות פסוק מתאימה למקרה בו יש שויון מספרי של ההיקף והשטח של משולש ישר זוית.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ab = a + b + c \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

נעבור למערכת שקולה שתתן קשר פשוט יותר בין a, b ו c

נכפול פי 4 את המשוואה הראשונה

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2ab = 4(a + b + c) \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

---

*Madelaine Bates, Serendipity of the area of aTriangle. Mathematics Teacher Vol 72, No 4, April 1979.

נחבר את שתי המשוואות ונשלים לריבוע

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 = c^2 + 4(a + b + c) \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

נעביר את c^2 מאגף שמאל

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 - c^2 = 4(a + b + c) \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

הפרש של שני ריבועי מספרים שווה למכפלת הסכום וההפרש של המספרים

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a + b + c)(a + b + c) = 4(a + b + c) \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

צמצום ב $a + b + c$ יתן

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 4 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

מצאנו אם כך, כי תנאי הכרחי ומספיק לשויון הערך המספרי של ההיקף והשטח של משולש ישר זוית הוא:

$$a + b - c = 4$$

עתה ננסה בעזרת התנאי למצוא משולשים ישרי זוית שבהם שווים הערכים המספריים של ההיקף והשטח.

לפי התנאי: $c = a + b - 4$

לפי משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = (a + b - 4)^2$

נפתח את הסוגריים ונקבל:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 16 + 2ab - 8a - 8b$$

$$4a - 8 = ab - 4b$$

נפשט ונקבל

$$b = \frac{4(a - 2)}{a - 4}$$

$$b = \frac{4(a - 4) + 8}{a - 4}$$

$$b = 4 + \frac{8}{a - 4}$$

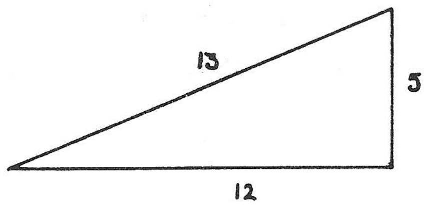
אם נבחר ערך עבור a, למשל $a = 10$, נקבל $b = \frac{1}{3}$, $c = 11\frac{1}{3}$, השטח $26\frac{2}{3}$ סמ"ר וההיקף $26\frac{2}{3}$ ס"מ.

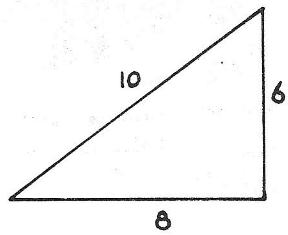
מעניין למצוא שלשות של מספרים טבעיים אשר מקיימים את התנאי.

כאשר a מספר טבעי, b יהיה מספר טבעי עבור

$$a - 4 = 1 , 2 , 4 \text{ או } 8$$

ולכן האפשריות היחידות עבור a הן, 5, 6, 8, או 12. אם נחשב את ערכי b המתאימים נקבל רק שני משולשים.





כדאי לשים לב שהתנאי ממנו יצאנו היה סימטרי לגבי a ו-b ולכן קבלנו בכל מקרה את שתי האפשרויות הסימטריות.

מספר מעניין?

מאת: א. הרכבי

Ramanujan (1887-1920) היה גאון מתמטי בלתי רגיל ממוצא הודי. הוא לא רכש השכלה מתמטית פורמלית, אבל בגיל צעיר נטל בהשאלה ספרי מתמטיקה, שקד על פתרון התרגילים והוכיח לעצמו את הנוסחאות שמצא בהן. מאחר ולא היה לו ידע מתמטי, כל הוכחה שמצא היתה בעצם מחקר שלם.

לפרנסתו עבד במשרד ובזמנו החופשי עסק במתמטיקה והגיע לתוצאות מרשימות אשר עניינו מתמטיקאים ידועי שם וביניהם G.H. Hardy.

סרינִיבסה ראמאנוג'ן (1887-1920)

בהיות Ramanujan חולה אנוש בבית חולים בא Hardy לבקרו. הוא ספר לו כי נסע במונית שמספר הרישוי שלה היה 1729, אך זהו מספר משעמם בלי כל תכונה מענינת. לאחר שניות של מחשבה ענה Ramanujan: לא כך! המספר 1729 הוא המספר הקטן ביותר שאותו אפשר לבטא כחיבור של שתי חזקות שלישיות בשתי דרכים שונות.

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

המשיך הרדי לשאול אותו, אם הוא יודע את פתרון הבעיה המתאימה עבור חזקה רביעית. לאחר כמה רגעי מחשבה הוא ענה כי איננו מוצא דוגמא פשוטה ולדעתו המספר הוא גדול מאוד.

אוילר נתן פתרון לבעיה זו

$$158^4 + 54^4 = 133^4 + 134^4 = 635318657$$

המספר החיובי הקטן ביותר שאותו אפשר לבטא כחיבור של שתי חזקות ריבועיות בשתי דרכים הוא הרבה קטן מ 1729. התוכל למוצאו?

לקריאה נוספת למעונינים

Hardy, G.H., Seshu Aiyar, P.V., Wilson, B.M., Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge, University Press 1927.

Hardy, G.H., Ramanujan: Twelve Lectures on subjects suggested by his life and work. Chelsea Publishing Company, N.Y., 1940, p. 12, 21.

Dickson, L.E., History of the Theory of Numbers, Vol. II. Chelsea Publishing Company, N.Y., 1952, p.644-647.

הערה למאמר קודם

"כפול הפוך וכפולי", שבבים תיק מס' 14

בשבבים מס' 14 פרסמנו מאמר בשם "כפול, הפוך וכפולי". לאחר כתיבת המאמר הגיע לידינו מאמר של *J.H. Manheim הדן באותו נושא. הוא מעלה כמה נקודות מעניינות שכדאי לתת עליהן את הדעת.

1) במאמר "כפול, הפוך וכפולי" קיבלנו שתנאי הכרחי ומספיק לכך שיתקיים השויון:

$$(100a + 10c + b)\ (100m + 10p + n) = (100b + 10c + a)\ (100n + 10p + m)$$

הוא: $am = bn$

וגם $p = |m-n|$, $c = |a-b|$ או מכפלה של c ו p הנותנת מספרים שלמים בין 0 ל-9.

ניתן להוכיח שתנאי זה שקול לתנאי:

$$\frac{a}{n} = \frac{c}{p} = \frac{b}{m} \quad \text{כאשר} \quad p\ ,\ c \neq 0$$

ו $am = bn$ כאשר $p = c = 0$

החיצים ממחישים את התנאי האחרון:

$$(100a + 10c + b) \times (100m + 10p + n) = (100b + 10c + a) \times (100n + 10p + m)$$

המחבר מכליל את התנאי שהתקבל לגבי מספרים בני שלוש ספרות, למספרים בני ארבע ספרות לפי החיצים:

$$(1000a + 100c + 10d + b) \times (1000m + 100p + 10q + n) = (1000b + 100d + 10c + a) \times (1000n + 100q + 10p + m)$$

---

*Manheim, J.H. "Mirror Multiplication. Mathematics Teacher, March 1979.

ומקבל תנאי מספיק לקיום השוויון:

$$\frac{a}{n} = \frac{c}{q} = \frac{d}{p} = \frac{b}{m} \quad , \quad \text{כאשר} \quad c \, , \, d \, , \, p \, , \, q \neq 0$$

(פתרונות נוספים הם: $\frac{a}{n} = \frac{d}{p} = \frac{b}{m}$ כאשר $c = q = 0$

$\frac{a}{n} = \frac{c}{q} = \frac{b}{m}$ כאשר $d = p = 0$

$\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$ כאשר $c = d = p = q = 0$

סביר שהתנאי שהתקבל הוא גם תנאי הכרחי, אך ברור שיש להוכיח זאת).

בצורה כזאת אפשר להמשיך ולקבל תנאי מתאים לזוגות מספרים בני n ספרות. (נסה למצוא תנאי זה).

להלן שתי בעיות שמעלה המחבר:

1) נתון מספר דו ספרתי $10a + b$, $a > b$. האם נוכל לדעת מראש, מבלי לנסות, כמה מספרים דו ספרתיים $10c + d$, מקיימים את השוויון:

$$(10a+b)(10c+d) = (10b+a)(10d+c)$$

תשובה: מספר המספרים המתאימים ל- $10a + b$ (מלבד המקרה הטרביאלי: $10b + a$)

הוא: $\left[\dfrac{9}{\frac{a}{(a\ ,b)}}\right] - 1$. כאשר (a,b) הינו המחלק המשותף המכסימלי של a ו-b

ו- $[\ ]$ הינה פונקצית הערך השלם.

2) האם לשני מספרים המקיימים את התכונה שמכפלתם שווה למכפלת המספרים בעלי סדר ספרות הפוך, חייב להיות אותו מספר ספרות?

תשובה: לא, למשל:

$$231 \cdot 24 = 132 \cdot 42 = 5544$$