שתי דרכים לניפוי המספרים הראשוניים

מאת נצה הדר
המחלקה להוראה במדע וטכנולוגיה, הטכניון, חיפה

כבר בעבר העתיק עסקו מתמטיקאים בניפוי המספרים הראשוניים מקרב כל המספרים הטבעיים.

במהלך התפתחות המקצוע הוכח כי לא ניתן למצוא נוסחה אלגברית שנותנת את כל המספרים הראשוניים ולכן יש לשיטת הניפוי חשיבות יתר.
במאמר זה מתוארות שתי נפות אשר הינן פחות ידועות מהנפה המפורסמת של ארתוסטנס.

נפה ראשונה - נפת האיזוגיים (הנפה ההודית)

בעית הניפוי של המספרים הראשוניים מקרב כל המספרים הטבעיים מצטמצמת למעשה לניפוי המספרים האיזוגיים הראשוניים מקרב כלל האיזוגיים. הנפה המתוארת להלן מאפשרת "לשים יד" על כל האיזוגיים הפריקים.

ניצור לוח כפל אינסופי שבשוליו המספרים האיזוגיים לפי הסדר ובתוכו המכפלות המתאימות.

כפל	1	3	5	7	9	
1	1	3	5	7	9	...
3	3	9	15	21	27	...
5	5	15	25	35	45	...
7	7	21	35	49	63	...
9	9	27	45	63	81	...
	.	.	.	.	.	

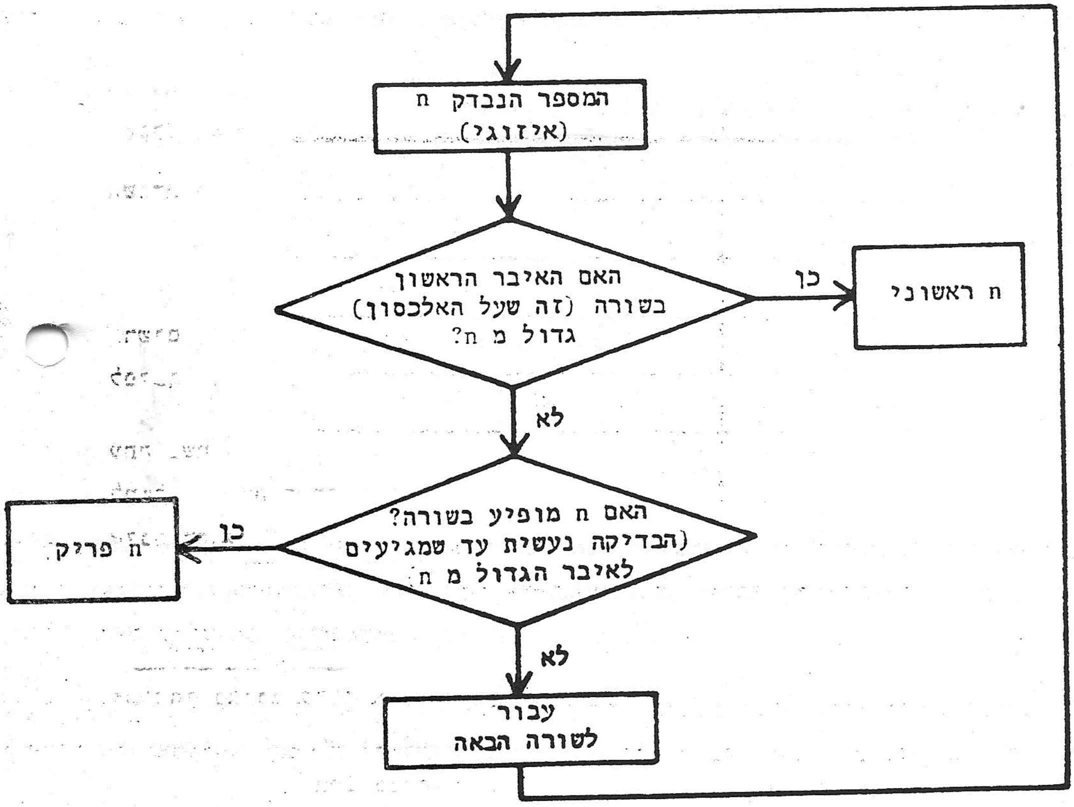
בתוך הטבלה מופיעים כל האיזוגיים, אבל הראשוניים שביניהם יכולים להופיע רק בשורה הראשונה, או בעמודה הראשונה. אם נמחק אותם מהטבלה נוותר אך ורק עם איזוגיים פריקים. האם כולם שם? - כמובן.

"לכדנו" את כל האיזוגיים הפריקים, ועתה נראה כיצד נוכל להכיר אם מספר (אי זוגי) הוא פריק או ראשוני. השאלה שקולה לשאלה האם המספר הנבדק מופיע בטבלה או לא.

נרשום שוב את הטבלה בלי השורה הראשונה והעמודה הראשונה. חשוב לשים לב שאברי הטבלה ערוכים בסדרות עולות הן בשורות והן בטורים. מאחר והטבלה סימטרית ביחס לאלכסון הראשי נתייחס רק לחלק שמעל לאלכסון הראשי, כולל האלכסון הראשי.

כפל	3	5	7	9	11	13	
3	9	15	21	27	33	39	...
5	**15**	25	35	45	55	65	...
7	**21**	**35**	49	63	77	91	...
9	**27**	**45**	**63**	81	99	117	...
11	**33**	55	**77**	**99**	121	143	...
13	**39**	**65**	**91**	**117**	**143**	169	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

נתאר עתה תהליך סופי לבדיקה מתוך הטבלה אם מספר אי זוגי הוא ראשוני או פריק. נעשה זאת בעזרת תרשים זרימה. התרשים מתאר את תהליך האיתור של המספר הנבדק בתוך הטבלה. עקרונית, אם המספר הנבדק איננו מופיע בטבלה, אז הוא ראשוני.



נפה שניה - נפה המבוססת על משולש פסקל*

מספרי עמודות

מספרי שורות

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1		1	1																						
2				1	2	1																			
3						1	3	3	1																
4								1	4	6	4	1													
5										1	5	10	10	5	1										
6												1	6	15	20	15	6	1							
7														1	7	21	35	35	21	7	1				
8																1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9																		1	9	36	84	126	126	84	...
10																				1	10	45	120	210	...
11																						1	11	55	...
12																								1	...
13																									

הטבלה שלעיל היא חלק מטבלה אינסופית. בשורות של הטבלה ערוכות השורות של משולש פסקל, באופן הבא:

השורה ה-n-ית של משולש פסקל היא בת $n + 1$ איברים:

$$\binom{n}{0} , \binom{n}{1} , \binom{n}{2} , \dots , \binom{n}{n}$$

רשום אותה בשורה ה-n-ית של הטבלה, מהעמודה ה-2n ועד לעמודה ה-3n ועד בכלל. לפיכך, במשבצת המתאימה לעמודה ה- k ($2n \le k \le 3n$) ולשורה ה-n יופיע האיבר $\binom{n}{k-2n}$.

עתה נשחיר את כל המשבצות בשורה ה-n שהמספר המופיע בהן מתחלק ב-n. (ראה ציור להלן). למשל, בשורה השמינית תושחרנה המשבצות שבהן רשום 8 ו-56. לעומת זאת, 1, 28 ו-70 אינם מתחלקים ב-8, לכן המשבצות שלהם לא תושחרנה.

---

*תודתי נתונה לד"ר ארנון בונה אשר הפנה את תשומת לבי למקור:

R. Monsberger: Mathematical Gems II, Published by the Mathematical Association of America.

מספרי שורה

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1																									
2				1		1																			
3						1			1																
4								1		6		1													
5										1					1										
6												1		15	20	15		1							
7														1							1				
8																1		28		70		28		1	
9																		1			84			84	...
[illegible]																				1		45			...
11																						1			...
12																								1	...
13																									

נתבונן בעמודות השונות של הטבלה. הן נחלקות לשני סוגים: כאלה שלא כל המספרים שהיו בהן הושחרו, וכאלה שכל המספרים שבהן הושחרו. בשרטוט שלמעלה הקפנו בעיגול את מספרי העמודות מהסוג השני. מה משותף למספרים אלה?

התבוננות בטבלה מעלה בנו את ההשערה הבאה:

<u>המספר הטבעי k הוא ראשוני אם ורק אם כל המספרים בעמודה ה-k הושחרו</u>.

(המקרה $k = 1$ מתקיים כאן באופן ריק).

לאחר שנוכיח את ההשערה להלן נוכל להשתמש בנפה כך:

כדי לבדוק אם מספר טבעי k הוא ראשוני, עלינו למצוא את ערכי n המקיימים: $\frac{k}{3} \le n \le \frac{k}{2}$, עבורם לחשב את המקדמים הבינומיים $\binom{n}{k-2n}$ ולבדוק אם כל אחד מהם מתחלק ב-n השייך לו. המספר k הוא ראשוני, אם ורק אם כל המקדמים הללו מתחלקים ב-n המתאים להם.

<u>הוכחה:</u>

כאמור, תורמת השורה ה-n איברים לעמודות ש-k שלהן מקיים:

$$2n \le k \le 3n$$

לפיכך השורות שתורמות לעמודה ה-k הן כל אותן שורות ש-n שלהן מקיים:

$$\frac{k}{3} \leq n \leq \frac{k}{2}$$

כפי שראינו מקודם, השורה ה-n, אם היא בתחום השורות התורמות לעמודה ה-k, תורמת לעמודה זאת את האיבר $\binom{n}{k-2n}$.

נראה, כי לכל n שבין $\frac{k}{3}$ ל- $\frac{k}{2}$ המספר $\binom{n}{k-2n}$ מתחלק ב-n, אם ורק אם k הוא ראשוני. במלים אחרות, לכל n כנ"ל, המספר שהשורה ה-n תורמת לעמודה ה-k יושחר אם ורק אם k ראשוני.

<u>נוכיח תחילה טענת עזר:</u>

<u>מספר $\binom{n}{m}$ מתחלק ל-n אם ורק אם m ו-n זרים.</u>

<u>הוכחת טענת העזר:</u>

נצא מהזהות: $$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

עתה נניח כי n ו-m זרים. מהזהות הנ"ל נובע: $m\cdot\binom{n}{m} = n\cdot\binom{n-1}{m-1}$

$\binom{n-1}{m-1}$ הוא מספר שלם, לכן - n מחלק את המכפלה שבאגף שמאל, אבל ע"ס ההנחה n לא מחלק את m, על כן n מחלק את $\binom{n}{m}$.

עתה נניח ש- $\binom{n}{m}$ מתחלק ל-n, ונראה כי m ו-n הם זרים.

שוב נתבונן בשוויון: $$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

הואיל וע"ס ההנחה n הוא מחלק של $\binom{n}{m}$, הרי ש- $\frac{1}{m}\binom{n-1}{m-1}$ הוא מספר שלם.

נניח בדרך השלילה של-n ול-m יש מחלק משותף $q > 1$.

נסמן $n = aq$ $m = bq$ ונקבל:

$$\frac{1}{bq}\binom{aq-1}{bq-1} = \frac{1}{bq}\cdot\frac{(aq-1)\cdot(aq-2)\ \ldots\ (aq-bq+1)}{1\cdot2\cdot3\ \ldots\ (bq-1)} = \frac{1}{bq}\cdot\frac{aq-1}{bq-1}\cdots\frac{aq-q}{bq-q}\cdots\frac{aq-2q}{bq-2q}\cdots\frac{aq-bq+1}{1}$$

היות והמספר שבאגף שמאל הוא שלם הרי שגם המספר שבאגף ימין חייב להיות שלם. q מופיע במכנה אבל איננו מחלק את המונה לכן אגף ימין איננו מספר שלם. סתירה. מכאן שהמחלק המשותף של n ו-m איננו גדול מ-1 ועל כן n ו-m זרים.

נניח שמספר העמודה k הוא ראשוני $k = p$.
נוכיח כי לכל שורה n התורמת לעמודה p, המספר $\binom{n}{p-2n}$ מתחלק ל-n (ולכן כל המשבצות בעמודה ה-k תושחרנה).

במקרה זה n מקיים: $\frac{p}{2} < n < \frac{p}{3}$

הואיל וראינו שהטענה נכונה עבור $p = 2, 3$ נוכל לטפל רק בראשוניים יותר גדולים.
על כן ברור כי: $1 < n < p$.

היות ו-p ראשוני ו-n קטן ממנו n ו-p הם זרים, לכן גם n ו- p-2n הם זרים.

על סמך טענת העזר, $\binom{n}{p-2n}$ מתחלק ל n . בכך הוכח כיוון אחד של ההשערה.

נעבור למקרה ש k אינו מספר ראשוני ונוכיח שקיים לפחות איבר אחד בעמודה ה k שלא יושחר.
בכל מקרה ש n ו k אינם זרים ברור שגם ו- k-2n אינם זרים ולכן לפי טענת העזר, המספר $\binom{n}{k-2n}$ אינו מתחלק ל n (ולכן המשבצות המתאימות לא תושחרנה).

נותר רק להראות כי עבור כל k פריק קיימת לפחות שורה אחת n מבין השורות התורמות לעמודה ה k, שעבורה מתקיים ש n ו k לא זרים. נוכיח זאת לחוד עבור k זוגי ועבור k אי זוגי.

אם k זוגי תהיה שורה זו $n = \frac{k}{2}$.

אם k איזוגי, יהי q מספר ראשוני המחלק את k (לפי הנחתנו k פריק) k איזוגי לכן גם q איזוגי וגם מנת החילוק של k ב q היא איזוגית.

כלומר: $k = q(2r + 1)$ (r שלם , $r \geq 1$)

נראה שהשורה $n = qr$ היא השורה המבוקשת:

השורה $n = qr$ תורמת לעמודה ה k, כי k השווה ל- $2qr + q$ נמצא בין 2qr ל-3qr

שהרי $q \leq qr$ $(r \geq 1)$ לפיכך, $2qr \leq 2qr + q \leq 3qr$, ועל כן $n = qr$ הוא בתחום השורות התורמות לעמודה $k = q(2r + 1)$.

בנוסף לכך ברור כי n ו k אינם זרים מפני ש q גורם משותף שלהם. בכך הוכח הכיוון השני של ההשערה.

מ.ש.ל.

לסיכום

הצגנו כאן שתי נפות. הראשונה מרשימה בפשטותה, אולי אפילו קלה יותר מזו של ארתוסטנס. יצירת הטבלה היא מהירה והניפוי נעשה בעזרת קריאה מהטבלה.
הנפה השניה היא בעלת מבנה מורכב יותר. יצוין כי למרות שהטבלה עוזרת להבין את השיטה, אין צורך לבנותה לצורך בדיקה מעשית של ראשוניותו של מספר מסוים. לצורך זה די לחשב ולבדוק תכונה פשוטה של המספרים המופיעים בעמודה שמספרה שווה למספר הנבדק.

הערות המערכת

במאמרו של יוסף דוד "ניפוי המספרים הראשוניים" שהתפרסם ב"מדע" כ"א-5, 1977 מתוארות נפות אחדות של המספרים הראשוניים וכן שימושים של שיטת הניפוי לבעיות אחרות.
קורא המתעניין בנושא יוכל למצוא דיון בשאלה, מהו מספר המספרים הראשוניים הקטנים מ-n במאמרו של יוסף דוד "מספר המספרים הראשוניים", "מדע" כ"ג-1, 1979.