מה אפשר לעשות עם שגיאותיו של תלמיד?

מאת: ש. אביטל
הטכניון, חיפה.

1. <u>השגיאה ככישלון אישי של התלמיד</u>

מקובל בהוראה כי כל שגיאה של תלמיד היא דבר פסול, שצריך להימנע ממנו עד כמה שאפשר. השימוש היחיד שנעשה, <u>בדרך כלל</u>, בשגיאות של תלמידים הוא לציין כי הן שגיאות ולהסתמך עליהן כדי להוריד את הציון.
מאידך, ברור שתלמיד שפתר בעייה בשעת בחינה, וחשב שהוא פתר אותה נכונה, ולא שגה, השקיע בפתרון זה חלק מן האני שלו ולפיכך ההודעה שהוא שגה היא בשבילו אכזבה. באכזבה כזאת יש משום תיסכול וישנה סכנה שהתלמיד לא ילמד הרבה משגיאותיו וישגה מחדש באותה שגיאה. חשוב לכן לחפש דרכים שיקטינו את מידת האכזבה והתיסכול ויחלישו את מידת הפגיעה שהתלמיד עלול להיפגע.

כיצד אפשר להקטין את מידת האכזבה? אפשר לחשוב על מספר דרכים שונות לכך. כל דרך כזאת צריכה לקיים לפחות אחת משתי התכונות הבאות, ורצוי אולי לבחור דרכים שיקיימו את שתיהן.

א. הפניית תשומת הלב של התלמיד משגיאתו הוא לדבר מקיף יותר, שיכול להיות חשוב לו ויחד עם זאת להשפיע על תיקון השגיאה.

ב. לנסות למצוא אספקט חיובי - המצביע על מקרים שבהם דרכו של התלמיד תביא לתוצאה נכונה.

נביא דוגמאות לגישות אלה. כל השגיאות יהיו מתחום המתימטיקה, אך אין לנו ספק שכל מורה יוכל לתרגם את הניתוח שלנו לתחום מקצועו הוא.

2. <u>דיון מיבנתי במקור השגיאה</u>

הנסיון מראה, שברוב המקרים, כאשר תלמיד שוגה בתחום מסויים, הרי, כדי להבליט במה שגה, נוהג המורה להצביע על <u>דוגמה נגדית אחת</u> באותו תחום, דוגמה שבה השגיאה בולטת לעין. מסתבר, שהמורה מניח שהשגיאה נבעה מהנחה לא נכונה ביחס לתקיפותו של כלל מתימטי מסויים, והצבעה על הדוגמה הנגדית תשכנע את התלמיד באי נכונות השימוש שלו בכלל זה. נביא כמה דוגמאות לכך:

<u>דוגמה א:</u> תלמיד טעה והניח כי $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
המורה מציע לו להציב $a = 2$, $b = 3$, והתלמיד נוכח כי מתקבל $\sqrt{13} = 5$, דבר שברור לו כי זו טענה שיקרית.

המורה מניח שהתלמיד סובר כי $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ הוא "משפט לכל" ודוגמה נגדית אחת תשכנע אותו שטענה זאת איננה נכונה.

<u>דוגמה ב:</u> תלמיד טעה וטען כי $-a$ חייב להיות מספר שלילי.
המורה שואל: "ומה אם $a = -2$?"
גם כאן התלמיד מניח כנראה כי הסימן "-" לפני כל משתנה מצביע על כך שהמשתנה מייצג רק מספרים שליליים, כלומר ש"<u>לכל</u> a, $-a$ הוא מספר שלילי", ולפיכך דוגמה נגדית אחת תשכנע את התלמיד בשיקריות הטענה "לכל".

<u>דוגמה ג:</u> תלמיד דן בשבר $x/(x + y)$ ו "צימצם" שבר זה בקבלו $1/(1 + y)$.
המורה מציע לו: "ומה אם $x = 2$, $y = 3$? התלמיד נוכח שבמקום $5/2 = 2.5$ הוא מקבל ע"י ה"צימצום" $4/1 = 4$.
ובכן המורה מניח שהתלמיד רואה בטענתו טענה שהיא נכונה "לכל x ו y" ולכן דוגמה נגדית אחת תשכנע אותו שאיננו צודק.

מדיון עם תלמיד מתגלה, שעל פי רוב, הוא איננו נותן לעצמו דין וחשבון מלא על ההבדל בין "משפטי לכל" ו- "משפטי קיום". ולפיכך בשבילו השגיאה שעשה נתפסת גם כן כשגיאה ספציפית - כך שדרך ההסבר של המורה נוגעת רק בשגיאתו הוא - מבלי שתפנה את תשומת ליבו למשהו מקיף יותר. ניתוח זה צריך לשכנע אותנו שחשוב לבקר <u>באופן מיבנתי</u> את הכלל שהתלמיד השתמש בו, לפי הנחתו, וטעה בשימושו.
כלומר, עדיף להפנות את תשומת לב התלמיד לעקרונות מתמטיים, אשר ייתכן שלא חשב עליהם בשעה שעשה את השגיאה.
ולפיכך, בדוגמה של $\sqrt{a^2 + b^2}$ נחזירו להגדרה היסודית של שורש ריבועי. כלומר, עלינו <u>להביא</u> את התלמיד שיבין את הדיון הבא:
"שורש ריבועי ממספר נתון הוא מספר אשר ריבועו שווה למספר שמתחת לשורש.
לפיכך הטענה שלכל k,b,a $\sqrt{a^2 + b^2} = k$ גוררת את הטענה ש $a^2 + b^2 = k^2$. ובכן במקרה שלנו אם $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, לכל a ו b, הרי צריך להתקיים $a^2 + b^2 = (a + b)^2$."

בשיחות עם מורים בנושא זה מקבלים הרבה פעמים את התגובה: "הם יגידו ש- $(a + b)^2 = a^2 + b^2$". הרי ברור, שאם זה נכון, על אחת כמה וכמה חשוב לחזור ליסודות בדיון זה. כדאי גם להדגיש שאומנם קיים פילוג שורש מעל מכפלה כלומר: לכל a ו b בעלי אותו סימן קיים $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = ab$, אך לא קיים פילוג שורש מעל לסכום. באופן דומה אפשר לטפל בדוגמאות ב' ו ג'.

3. <u>היבט חיובי על השגיאה</u>

דרך נוספת, קשורה לקודמת, שיש בה כדי להקטין עוד יותר את מידת הפגיעה בתלמיד, היא לנסות לחקור באילו מקרים תוביל דרך השימוש של התלמיד לתשובה נכונה. בגישה זאת עלינו להבהיר לתלמיד שאומנם המשפט שהוא השתמש בו, כנראה, כ-"משפט לכל" איננו נכון, אבל במקרים ספציפיים מסויימים, יהיה אולי המשפט נכון כ-"משפט קיום" וכדאי לחקור כדי לגלות מה הם מקרים אלה.

רעיון זה מופיע, בצורה קצת שונה ובהדגמה ממין אחר, במאמרו של מיירסון [1].

נדגים את דברינו אלה בדוגמה השלישית שהבאנו (סעיף 2). התלמיד הניח כנראה בדוגמה זאת, כי לכל x ו y, $(x + y)/x$ שווה ל $(1 + y)/1$.

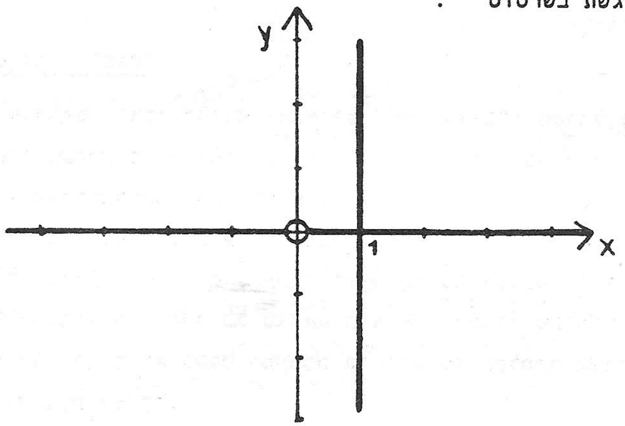
תחילה יביא המורה את הניתוח המיבנתי. ניתוח זה מבוסס על כך שחילוק ב x פירושו כפל ב $1/x$ בתנאי כמובן ש $x \neq 0$. ולכן, במקרה הנ"ל לפי חוק הפילוג $(x + y)/x = (x + y)\cdot 1/x = x/x + y/x$.

בהמשך יודגש שאומנם טענתו ה "כללית" של התלמיד איננה נכונה, אך כדאי לחקור האם קיימים x ו y ממשיים כאלה שעבורם $(x + y)/x = (1 + y)/1$.
כלומר, כדאי לחקור קשר זה כ-"משפט קיום". התלמיד יגלה כי השוויון מוביל ל $y = xy$. הואיל ו $x \neq 0$ נשארות רק האפשרויות $x = 1$ או $y = 0$ שבהן אין צורך לצמצם.

כלומר,

$$\{(x,y) | (x + y)/x = (1 + y)/1\} = \{(x,y) | (x = 1 \text{ או } y = 0) \text{ וגם } x \neq 0\}$$

קבוצה זו מודגשת בשרטוט [2].



נשאיר לקוראים את הניתוח של שתי הדוגמות האחרות שדננו בהן.

4. <u>שגיאות המובילות לתוצאת אמת</u>

בפולקלור של המתמטיקה האלמנטרית הצטברו הרבה דוגמות שבהן מקבלים תשובת אמת למרות שגיאה שנעשתה. מפורסמת הדוגמה $1/4 = 1\not{6}/\not{6}4$ כביכול צמצום ב 6. אוסף גדול של דוגמות כאלה מובאות במאמרו של קרמן [3].

---

(1) L.N. Meyerson, Mathematical Mistakes, Mathematics Teaching, 76, 1976.

(2) פירוט קבוצת הערכים וכן שרטוט הגרף הוצעו ע"י המערכת והמחבר מודה על כך.

(3) R.A. Carman, Mathematical Mistakes, The Mathematics Teacher Vol 64, No 2. (Feb. 1971)

נתעכב כאן על דוגמה המופיעה ברשימה של גודמן [4]. רשימה זאת דנה בשגיאתו של תלמיד ש"חטא" נגד הסכם סדר פעולות ובדוגמה $[7 - 4[7 - 4(7 - 4)]$ חישב את התוצאה לפי $3\times3\times3$, כלומר 27. כאשר התברר שאותה תשובה מתקבלת גם אם נשמור על סדר פעולות נכון, החליט המורה לחקור באילו מקרים זה קורה. כלומר השאלה היתה עבור אלו ערכים של a ו b קיים:

$$a - b[a - b(a - b)] = (a - b)[(a - b)(a - b)] = (a - b)^3$$

ברור מיד שהדבר קורה עבור $a = 0$.
חיפוש אחרי אפשרויות כנ"ל עבור $a \neq 0$ מביא לשוויון

$$a^2 - 3ab + 2b^2 + b - 1 = 0$$

במאמר המקורי משתמש המחבר בדרכים שונות כדי לפרק ביטוי זה. אך הדרך הפשוטה ביותר היא כנראה דיון בתבנית פסוק זאת כמשוואה ריבועית, עם משתנה a ופרמטר b; כלומר $a^2 - 3ba + (2b^2 + b - 1) = 0$. מכאן מקבלים $a = 2b - 1$, או $a = b + 1$. ואומנם בשני מקרים אלה מקבלים אותה תוצאה בחישוב בשתי הדרכים כנ"ל.

5. <u>האם לחכות עד שתלמיד ישגה?</u>

בעריכת מבחנים סגורים - רבי ברירה (מבחנים "אמריקאים") מקובל שכדי לבנות את המסיחים לכל שאלה משתמשים בשגיאות שנעשות ע"י תלמידים בפתרון אותה שאלה, כאשר זו ניתנה כשאלה פתוחה. זהו השימוש העיקרי, ועל פי רוב היחיד הנעשה בשגיאות של תלמידים. מאידך, בשעת הלימוד עצמו נוהגים לראות כל שגיאה של תלמיד כדבר פסול ומזיק. אין ספק שעמדה כזאת איננה נכונה. אין המורה צריך לפחד משגיאות של תלמידים. הרי כל שגיאה היא אינדיקטור שתלמיד לא הבין משהו כהלכה, או שעיקרון מסוים לא נקלט במערכת היחוס של התלמיד בצורה שיוכל להעלות בקלות מן הזיכרון בעת הצורך.

מסתבר מכאן, שאם ישנן שגיאות, שמורה יודע שיש הסתברות גבוהה שתלמידים ישגו בהן, חשוב שהמורה יעמיד את תלמידיו בפני בעיות שבהן שגיאות אלה עלולות לקרות, כי בדרך זאת יכול הוא לעמוד על מידת ההבנה של תלמידיו. לשם קיצור נקרא לבעיות ממין זה בשם <u>בעיות דיאגנוסטיות</u>.

האם רצוי לחכות עד לבחינה, שבה ישלב המורה בעיות אלה, כדי לבחון את מידת ההבנה והקליטה?

---

(4) Goodman, A Problem With the Order of Operations, <u>The Mathematics Teacher</u> Vol 72, No 2. (Feb. 1979).

מנקודת הראות של התופעות שפרטנו בסעיפים קודמים ברור שהדבר איננו רצוי. ככל שהתקדמנו בלימוד, ולתלמיד נדמה שהעמיק להבין, כך יגדל התיסכול כאשר יגלה ששגה בבעייה דיאגנוסטית, ותקטן היעילות של ניתוח השגיאות. מסתבר לכן, שהיעילות הרבה ביותר, מבחינת מניעת שגיאות בעתיד, תתקבל ע"י שילוב בעיות דיאגנוסטיות בשלבים הראשונים של הוראת הנושא, כאשר מוכנסים בפעם הראשונה המושגים המתאימים.

ובכן כבר בשעת הדיון הראשוני על מספרים חיוביים ושליליים תועלה השאלה: "ומה דעתכם על a-, איזה סוג מספרים מייצגת תבנית מספר זאת?" (דוגמה ב סעיף 2).

בדיון ראשוני בתבניות מספר בצורת שבר לאחר פעולות צמצום בשברים מן הסוג $2a^2/ab$ נשאלת השאלה: "ומה בדבר הצמצום בתבנית $\frac{a + b}{a}$?".

מייד אחרי ההגדרה של מושג הערך המוחלט דנים בקבוצת האמת של $|a| = 5$ ואז נשאלת השאלה: "ובכן מהי קבוצת האמת של תבנית הפסוק $|x - 3| = 2$?".

הקונפליקט שייווצר אצל התלמיד בחיפוש התשובה, ואפילו שגיאה שישגה תלמיד שייתן תשובה לא נכונה, נתקבלו, במקרה זה, כחלק מן הלימוד והבהרת המושג, התיסכול יהיה מועט שבמועט.

יש סבירות רבה שגישה זאת תקטין את מספר השגיאות. עם זאת אין ספק ששגיאות יופיעו גם לאחר מכן, ואז יש לטפל בהן בדרכים שמנינו בסעיפים הקודמים.

6. <u>שגיאות של תלמידים כמכשיר למידה*</u>

אמרנו ששגיאתו של תלמיד הנעשית בשעת בחינה, או בשלב מתקדם של הלימוד יש בה משום תיסכול ופגיעה ב"אני" שלו, עם זאת אפשר לשער שהייצר התחרותי הטבוע באדם יכול ליצור הנעה חיובית, כאשר מוטל על התלמיד לגלות שגיאות של תלמידים אחרים. מדובר בגישה, שבה, במקום לתת לתלמידים תרגילים לפתרון עצמי, נותנים להם אותם תרגילים עם פתרונות מלאים שנעשו ע"י תלמידים אחרים, כאשר יש בהם פתרונות נכונים ובלתי נכונים. אומרים זאת לתלמידים, ומבקשים מהם לגלות אילו הם הפתרונות הבלתי נכונים, ולציין בכל מקרה במה השגיאה.

ההשערה שלנו היא כי העובדה שהתלמיד איננו יודע מי היו התלמידים שפתרו את התרגילים תבטל את הנטייה לא לפגוע בתלמיד אחר. מאידך הנטייה להתבלט תשמש כמניע לבתח את הפתרונות ולגלות שגיאות אם ישנן.

ניסוי מצומצם שביצענו עד כה באימון ותירגול בדרך זו בכיתות ח' במקצועות מתימטיקה ודקדוק נתנו תוצאות התומכות בהשערה הנ"ל. אך דרוש עוד מחקר מקיף בטרם אפשר יהיה לנסח מסקנות חד משמעיות.

---

* הרעיון שבסעיף זה נוצר במשותף עם הסטודנט נסים נעים במחלקה להוראה והוא כרגע עוסק בחקירתו בצורה מבוקרת.