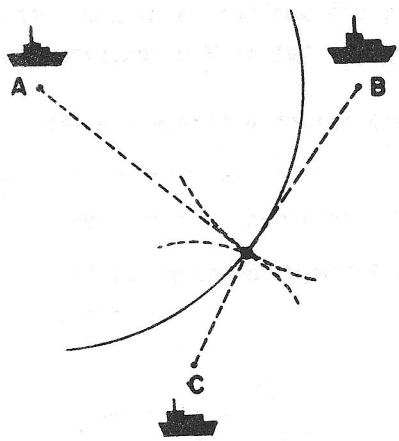
# פגישת האוניות*

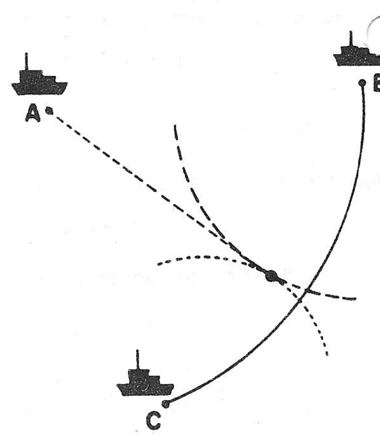
מעובד ע"י: אברהם הרכבי

"הילכו שניים יחדיו
בלתי אם נועדו"
(עמוס ג',ג')

שלוש אוניות עוגנות בנקודות A, B, C כל אחת במרחק 100 מייל זו מזו. האוניות מפליגות במהירויות של 100, 60 ו 40 קשר (מייל לשעה) בהתאמה.
היכן תהיה נקודת הפגישה המוקדמת ביותר של השלוש?




ציור 2




ציור 1

הקשתות (ציור 1) מראות את מיקומן האפשרי של שלוש האוניות כעבור שעת נסיעה. אין נקודה משותפת לשלוש הקשתות אבל מכיון שהאוניה המפליגה מ A נוסעת במהירות הגדולה ביותר היא תגיע לנקודת הפגישה של B ו C (על הקו BC: 40 מייל מ C ו 60 מייל מ B) קדם יותר ושם תמתין.
זה הזמן המינימלי לפגישה המשולשת, כי אם בוחרים כל נקודה אחרת, לפחות לאחת מהאוניות האיטיות דרושה יותר משעה להגיע אליה.
אם נשנה את מהירות האוניה המפליגה מ A ל 80 קשר, הבעיה משתנה: המהירות של האוניה המהירה היא, כעת, לא מספיק גדולה כדי לאפשר פגישה של שתי האוניות המפליגות מ B ומ C על הקו הישר המחבר את נקודת מוצאן. לכן נקודת הפגישה תהיה בתוך המשולש (ציור 2) ושלושתן יגיעו אליה באותו רגע. מרחקי נקודת המפגש מהנקודות A, B ו C נמצאים ביחס 40:60:80 בהתאמה. (מה הזמן המינימלי במקרה זה?).

---

*מאמר זה מבוסס על:

Walker R.: The captain's meeting, The Mathematical Gazette, Dec, 1978, Vol. 62, 422, pp. 263-267.

בשני המקרים קיימת נקודה יחידה שבה מתקיימת הפגישה המוקדמת ביותר.
**כיצד נתייחס לשאלה במקרה שהאוניות אינן נמצאות בקודקודי משולש שווה צלעות?**

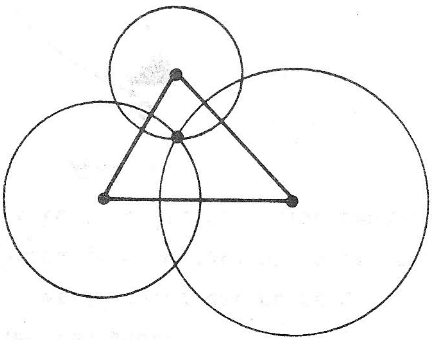
**גם אם האוניות אינן נמצאות בקודקודי משולש שווה צלעות ומפליגות במהירויות שונות (אפילו לא קבועות) קיימת רק נקודה אחת אופטימאלית (הפגישה המוקדמת של השלוש). נקודה זאת נמצאת בתוך המשולש הנקבע על ידי נקודות המוצא של האוניות, או על אחת מצלעותיו.**

נסביר זאת: נסמן ב $P$ את נקודת המוצא של אוניה כלשהי, ואת המרחק המכסימלי שהיא יכולה לעבור בזמן $t$ ב $d(t)$. אם כך מקומה של האוניה הוא בתוך העיגול או על המעגל שמרכזו ב $P$ ורדיוסו $d(t)$. במקרה שיש שלוש אוניות יש שלושה מעגלים כאלו. לפני התחלת ההפלגה רדיוסי המעגלים שווים לאפס והם הולכים וגדלים במשך זמן ההפלגה עד אשר ברגע מסוים $T$ יש לשלושת העיגולים, בפעם הראשונה, נקודה משותפת.

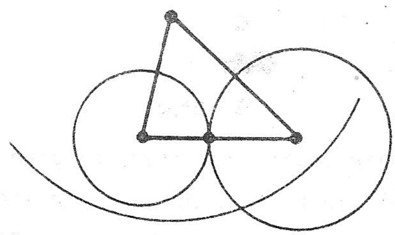
קיימות שתי אפשרויות לפגישה בזמן מסוים $T$:

א. שני מעגלים משיקים בנקודה הנמצאת בתוך העיגול השלישי. במקרה זה נקודת הפגישה נמצאת על הישר המחבר את שני מרכזי המעגלים המשיקים (ציור 3).

ב. לכל שני עיגולים יש איזור משותף, אבל רק נקודת חיתוך אחת לשלושת המעגלים (ציור 4).



ציור 4



ציור 3

נראה עתה כיצד ניתן בעזרת משפט מתמטי מתחום הגיאומטריה הקומבינטורית** להכליל את הבעיה למפגש של $n$ אוניות הנוסעות במהירויות שונות זו מזו:

<u>משפט Helly</u>: אם קבוצה סופית של איזורים מישוריים קמורים היא כזאת שלכל שלושה מהם יש נקודה אחת משותפת; אז לפחות נקודה אחת משותפת לכל האיזורים בקבוצה.
(על הגדרת המונח איזור מישורי קמור ועל הוכחת המשפט ראה בנספח).
נסתכל על כל קבוצה אפשרית של שלוש אוניות מתוך $n$ האוניות, נמצא לה את נקודת הפגישה האופטימלית ונחשב את זמן הפגישה.

---

**Hadwiger H., Debrunner H. and Klee V., <u>Combinatorial Geometry in the Plane.</u> Holt, Reinhart and Winston (1964); pp. 7, 60.

נמצא את הערך המכסימלי של זמני הפגישה הללו ונסמנו $T_m$. לקבוצה שזמן הפגישה שלה $T_m$ נקרא "הקבוצה הגרועה". (יתכן ויש יותר מאחת, אך אין לכך השפעה על הדיון).
בזמן $T_m$ לכל שלושה עיגולים יש לפחות נקודה אחת משותפת, יתכן ויש להם אפילו איזור משותף ואילו ל"קבוצה הגרועה" יש בדיוק נקודה אחת משותפת.
בשלב זה נוכל להשתמש במשפט Helly . עיגולים הם איזורים מישוריים קמורים, היות ולכל שלושה יש נקודה משותפת קיימת לפחות נקודה אחת משותפת לכל n העיגולים.
אם כך, בזמן $T_m$ מתרחשת לראשונה פגישה של כל n האוניות.
נקודת המפגש מוכרחה להיות זו שבה נפגשות האוניות של "הקבוצה הגרועה". (אם יש יותר מקבוצה גרועה אחת, בגלל משפט Helly, חייבות נקודות הפגישה האופטימליות שלהן להתלכד.)

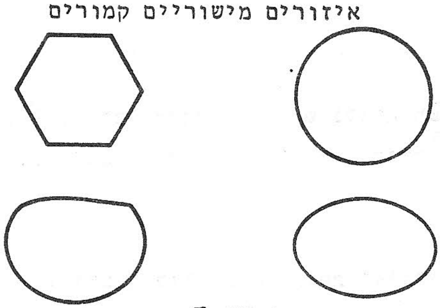
אפשר להציג בעיה דומה על פגישה של n ציפורים. לשם כך אנו זקוקים לגירסה תלת ממדית של משפט Helly. התהליך למציאת נקודה אופטימאלית מבוסס על בדיקה של כל קבוצה של 4 ציפורים ומציאת הקבוצה הגרועה; נקודת הפגישה שלה תהיה הנקודה האופטימאלית של n הציפורים.
יכולנו לדבר על מטוסים במקום על ציפורים אבל מוטב שמטוסים לא יפגשו באוויר....

באופן תיאורטי אפשר להכליל את הבעיה למספר גדול יותר של מימדים, אלא שאז נצטרך לגייס את דמיוננו כדי לחשוב על דוגמאות לכך.

## נספח

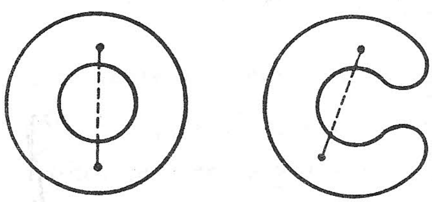
איזור מישורי קמור הוא איזור בו לכל קבוצה של שתי נקודות, הקו הישר המחבר אותן נמצא כולו בתוך האיזור.
לדוגמא:

איזורים מישוריים קמורים



ציור 5

איזורים מישוריים לא קמורים



ציור 6

הוכחה של משפט Helly (1912).
ההוכחה היא באמצעות עיקרון האינדוקציה השלמה.
קודם נוכיח עבור 4 איזורים A, B, C, D .
ההנחה היא ש: ל A, B, C יש נקודה משותפת, נסמנה P .
ל A, B, D יש נקודה משותפת, נסמנה Q .
ל A, C, D יש נקודה משותפת, נסמנה R .
ל B, C, D יש נקודה משותפת, נסמנה S .

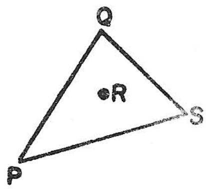
מכיוון ש P, Q ו R נמצאות באיזור A , כל המשולש $\overset{\Delta}{RQP}$ מוכל ב A, כך המשולש $\overset{\Delta}{SQP}$ מוכל ב B, המשולש $\overset{\Delta}{SRP}$ מוכל ב C, והמשולש $\overset{\Delta}{SRQ}$ מוכל ב D . יש לנו ארבעה משולשים כל אחד מהם מוכל כולו באחד מהאיזורים, כך שאם נמצא נקודה משותפת לארבעת המשולשים היא תהיה משותפת לארבעת האיזורים.

יתכנו שתי אפשרויות:

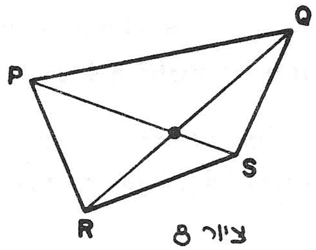
א. ארבע הנקודות הן קודקודי מרובע קמור (ציור 8).

ב. שלוש נקודות הן קודקודי משולש והרביעית נמצאת בתוכו (ציור 7).

במקרה הראשון, נקודת הפגישה של אלכסוני המרובע היא הנקודה המבוקשת. (היא שייכת לארבעת המשולשים האפשריים שנוצרים על ידי P, Q, R ו S).
במקרה השני הנקודה הנמצאת בתוך המשולש היא הנקודה המבוקשת.



ציור 7



ציור 8

נוכיח, עכשיו, שאם ההנחה נכונה ל n איזורים היא נכונה ל $n + 1$ איזורים.

ניקח $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ איזורים. לפי הנחת המשפט ל $A_1, A_n$ ו $A_{n+1}$ יש נקודה משותפת, לכן $B = A_n \cap A_{n+1} \neq \phi$ ו B הוא איזור קמור (כי הוא חיתוך של שני איזורים קמורים).

ניקח עכשיו את n האיזורים $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B$ . לכל ארבעה מהם יש נקודה משותפת ולכן ל $A_{n+1}, A_n, A_k, A_h$ יש נקודה משותפת ולכן גם ל- $B, A_k, A_h$ יש נקודה משותפת עבור כל $0 < h \leq n$ , $0 < k \leq n$ .

ואז $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B$ היא קבוצה של n איזורים המקיימים את הנחת האינדוקציה לכן יש להם נקודה משותפת.
אותה נקודה נמצאת ב B, לכן היא נמצאת גם ב $A_n$ וב $A_{n+1}$ (יש לזכור ש $B = A_n \cap A_{n+1}$)
ולכן היא משותפת ל $n + 1$ האיזורים.