שבבי שבבים

תכונה של שלשות פיתאגוריות

מאת דוד בן חיים ונורית זהבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

שלושה מספרים טבעיים a, b, c נקראים שלשה פיתאגורית, אם $a^2 + b^2 = c^2$.
אם מבקשים דוגמאות למשפט פיתגורס או לשימוש שלו בבניית משולש ישר זוית, בדרך כלל הדוגמא הראשונה היא משולש שצלעותיו 3, 4, 5.
מעניין לדעת, כי שלושה מספרים אלו מתקשרים לכל שלשה פיתאגורית באופן הבא:

<u>משפט</u>: בכל שלשה פיתאגורית אחד המספרים מתחלק ב 3, אחד ב 4 ואחד ב 5 (לפעמים אותו מספר מתחלק ב 3, ב 4 וב 5 או בשניים מהם).

<u>הוכחה</u>: הטכניקה שבה נשתמש בהוכחת המשפט היא הצגת המספרים הטבעיים (וריבועיהם) לפי אופן חלוקתם במספר n בצורה $an + b$ $(b < n)$, וזאת עבור n-ים שונים בהתאם למטרותינו.

1. כדי להוכיח שבכל שלשה פיתאגורית אחד המספרים מתחלק ב 3 נשתמש בעובדה שכל המספרים הטבעיים הם מהצורה: $3n$ או $3n + 1$ או $3n + 2$

הריבועים שלהם בהתאמה הם מהצורה: $3k$ או $3k + 1$ או $3k + 1$

כלומר, מספר הוא ריבוע שלם רק אם הוא משאיר שארית 1 או מתחלק ב 3 (וכמובן שלא אם ורק אם). מספר מהצורה $3k + 2$ לא יכול להיות ריבוע שלם.
האפשרות שגם a וגם b לא יתחלקו ב 3 לא קיימת כי אז a^2 ו b^2 יהיו מהצורה $3\ell + 1$, $3m + 1$ בהתאמה, כלומר c^2 יהיה מהצורה $3k + 2$ וזה לא יתכן, כפי שראינו.
לכן, בשלשה פיתאגורית, אחד מהמספרים a או b חייב להתחלק ב 3 .

2. כדי להוכיח שבכל שלשה פיתאגורית אחד המספרים מתחלק ב 4 נכתוב את המספרים הטבעיים בצורה: $4n$ או $4n + 1$ או $4n+2$ או $4n + 3$

הריבועים שלהם בהתאמה הם מהצורה: $4k$ או $4k + 1$ או $4k$ או $4k + 1$

גם כאן נראה שלא יתכן שגם a וגם b לא יתחלקו ב 4.

א) אם a ו b יהיו שניהם מהצורה $4n + 1$ או $4n + 3$, אזי c^2 יהיה מהצורה $4k + 2$ וזו לא יכולה להיות צורה של מספר שהוא ריבוע שלם.

ב) אם a ו b יהיו האחד מהצורה $4n + 2$ והשני מהצורה $4n + 1$ או $4n + 3$, אזי c^2 יהיה מהצורה $8k + 5$. קל לבדוק בעזרת הטכניקה שהשתמשנו מקודם כי $8k + 5$ אינו יכול להיות מספר שהוא ריבוע שלם.

ג) אם a ו b יהיו שניהם מהצורה $4n + 2$, כי אז c^2 יהיה מהצורה $4(4t + 2)$. אבל $4t + 2$ אינו יכול להיות ריבוע שלם.

לכן בשלשה פיתאגורית, אחד המספרים a או b חייב להתחלק ב 4 .

3. כדי להוכיח שבכל שלשה פיתאגורית אחד המספרים מתחלק ב 5 נכתוב את המספרים הטבעיים בצורה: $5n$ או $5n + 1$ או $5n + 2$ או $5n + 3$ או $5n + 4$

הריבועים שלהם בהתאמה הם מהצורה: $5k$ או $5k + 1$ או $5k + 4$ או $5k + 4$ או $5k + 1$

א) לא יתכן כי a ו b יהיו שניהם מהצורה $5n + 1$ או $5n + 4$, כי אז c^2 הוא מהצורה $5k + 2$ ואינו יכול להיות ריבוע שלם.

ב) לא יתכן כי a ו b יהיו שניהם מהצורה $5n + 2$ או $5n + 3$, כי אז c^2 הוא מהצורה $5k + 3$ ואינו יכול להיות ריבוע שלם.

ג) אם אחד המספרים, נניח a , יהיה מספר שאינו מתחלק ב 5 וריבועו מהצורה $5k + 1$ ו b יהיה מספר שאינו מתחלק ב 5 וריבועו מהצורה $5k + 4$, כי אז c^2 הוא מהצורה $5k$. מאחר ו 5 הוא מספר ראשוני, אם c^2 מתחלק ב 5 גם c מתחלק ב 5.

לכן בשלשה פיתאגורית שבה a ו b לא מתחלקים ב 5, חייב c להתחלק ב 5 .

אמצעי המחשה בהוראת הנדסת המרחב

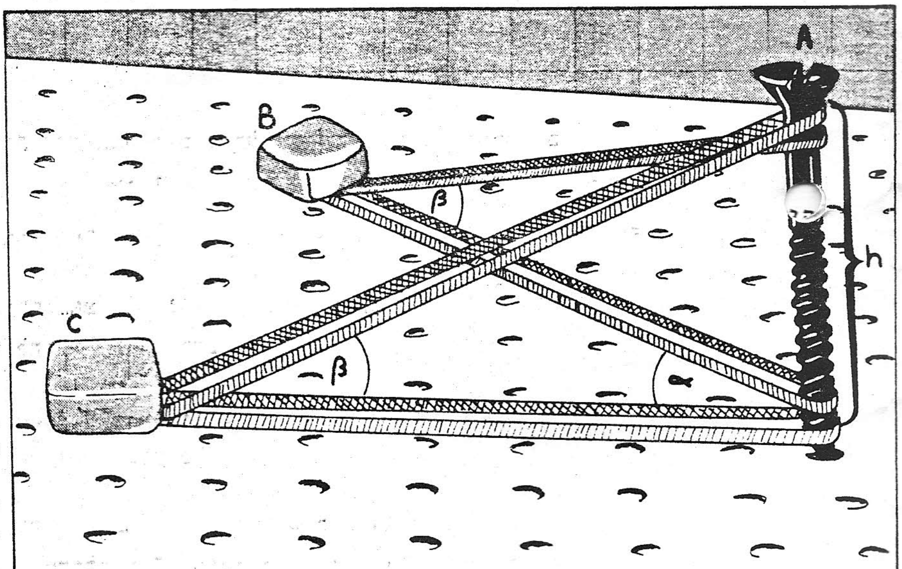
מאת: בוריס צוקרשטיין

ברצוני להציע מכשיר פשוט כאמצעי המחשה בהוראת הנדסת המרחב. מנסיוני המכשיר מתקבל על ידי התלמידים ברצון רב ועוזר להם להתגבר על הקשיים.

על כל תלמיד להכין או להשיג לוח מחורר הדומה ללוח גיאומטרי (לוחות דומים משמשים כצעצוע לילדים במשחקי חברה) ברגים או מסמרים, גומיות ומסמרים קטנים יותר.

הברגים ישמשו אותנו כאנכים, מקצועות, אלכסונים ועוד. ראשי הברגים ישמשו כנקודות במרחב. הגומיות ישמשו כישרים, היטליהם ועוד.

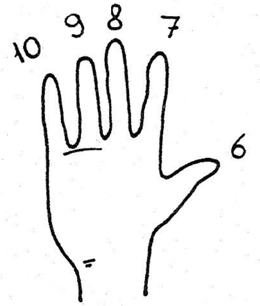
התמונה הבאה מהווה הדגמה להמחשת שאלה מהסוג הבא: נקודת A (ראש הבורג) נמצא במרחק h מהמישור. מ A יוצאים שני ישרים החותכים את המישור בנקודות B ו C ויוצרים עמו זויות בנות β. הזוית בין היטלו המשופעים היא α. מהו המרחק בין עקבי הישרים (בין המסמרים הקטנים C ו B)?



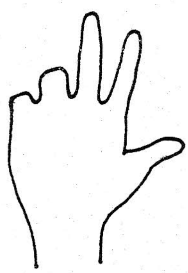
כדאי לציין שהכל כאן ניתן לשינוי בהתאם לשאלה המוצגת בפני התלמידים.

לוח כפל בעזרת אצבעות

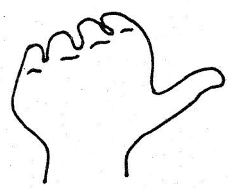
תרגילי כפל במספרים קטנים מ 5 קל לבצע בעזרת האצבעות.
לגבי מספרים בין חמש ועשר אפשר להפעיל את השיטה הבאה.
נסמן את אצבעות כף ידנו בספרות מ 6 עד 10 .



נניח שרוצים לכפול 8 × 6. נציג ביד אחת את 6 וביד שניה את 8 .



8



6

נחבר את האצבעות הזקופות (3 + 1) ונכפול פי 10, נקבל 40. ל 40 נוסיף את מכפלת מספרי האצבעות הקמוצות (2 × 4) ונקבל 48 .

פשט את תבנית המספר הבאה ותבין מדוע השיטה פועלת.

$$10[(m - 5) + (n - 5)] + (10 - m)(10 - n)$$