המעגל בכיתה ז

מאת אלכס פרידלנדר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

מהלך השעור (בעצם שעור וחצי) שיובא להלן נוצר באופן מקרי לחלוטין. שבריר של רעיון שבא מצידו של תלמיד הוביל באופן בלתי צפוי ל"עבודת מחקר" כיתתית. לפי התכנון, היה על הכיתה (כיתה ז', הקבצה א') לפתוח בנושא סימון נקודות במערכת צירים קרטזית, לאחר שסיימו זה עתה את הפרק "מספרי הזזה".

לנוחיות הקריאה, כתובות שאלות המורה באותיות מוטות, ותשובות התלמידים מובאות בקיצור ולא תמיד כלשונן.

**כיצד מסמנים נקודות על הישר?*

בעזרת מספרים.

I

**כיצד אפשר לקרוא נקודה זו?*

הצעות: 2, 1, 0 ... בעצם כל מספר. (הצעתי לקרוא לנקודה זו 0).

II

**כיצד נקרא לנקודה שהוספתי?*

הצעות: 1, 2, $\frac{1}{2}$ ... בעצם כל מספר חיובי. (הסכמנו לקרוא לנקודה זו 1).

III

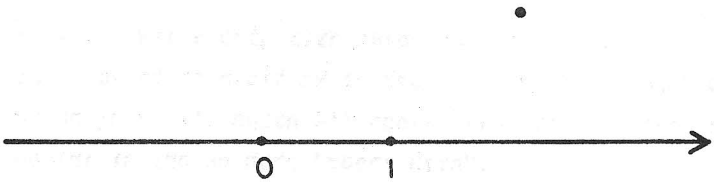
**כיצד נקרא לנקודה החדשה שהוספתי?*

הצעות: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... אם רוצים לדעת בדיוק, צריך לחלק את המרחק שלה מ- 0 באורך קטע היחידה (לא נכנסתי כאן לבעיה של המספרים האי-רציונליים).

**האם אפשר גם עתה לקרוא לנקודה זו (או לכל נקודה אחרת על הציר) בשמות שונים?*

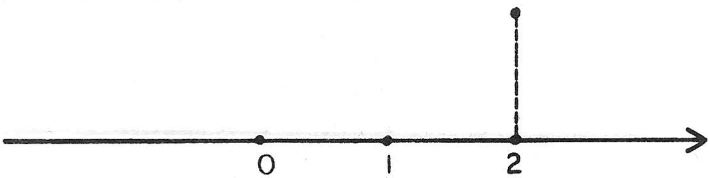
לא! עכשיו אנחנו במצב שלכל נקודה על הישר שם יחיד.

IV.



*כיצד נקרא לנקודה זו שאינה על ציר המספרים?

הצעה (מלווה בשרטוט):



נקרא לה 2.

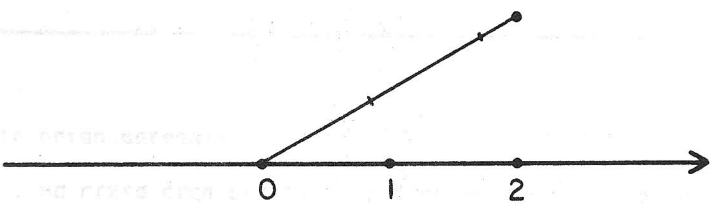
תלמיד אחר: אז יש לנו שתי נקודות שקוראים להן 2.

*האם רק שתי נקודות כאלה?

לא! תלמיד משרטט על הלוח עוד נקודות שאפשר לקרוא להן 2, לפי שיטה זו.

V. *תנו הצעה אחרת לשם עבור הנקודה!

נמדוד את המרחק שלה מ- 0!

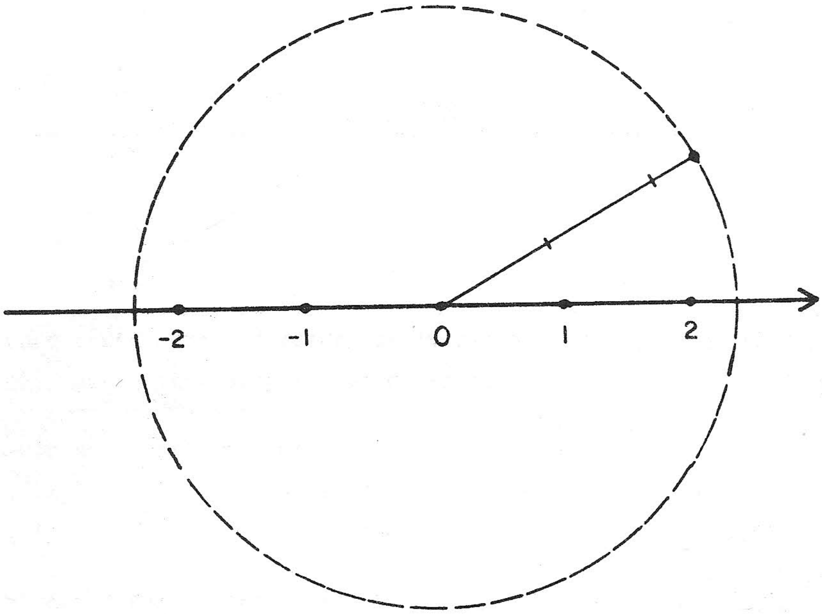


*נניח שהמרחק הזה הוא $2\frac{1}{4}$ יחידות.

האם יש עוד נקודות הנמצאות במרחק זה מ- 0?

כן!

תלמיד משרטט:

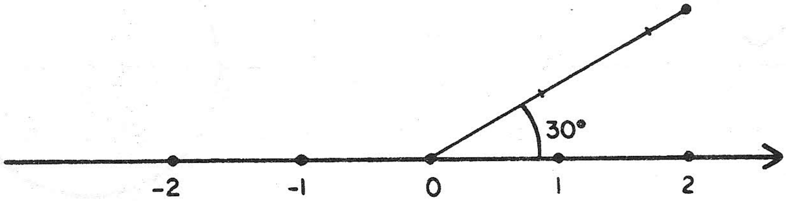


"קוויתי" להגיע בשלב זה למבוי סתום.

VI. כאן באה ההצעה המפתיעה: נמדוד גם "<u>כיוון</u>".

*איך נמדוד כיוון?

התלמידים התקשו לתרגם את המושג האינטואיטיבי של כיוון לאחד המושגים המתמטיים המוכרים להם. לכן, הפעם ההצעה היתה שלי: נמדוד כיוון בעזרת הזוית שבין מרחק הנקודה מאפס לבין ציר המספרים.

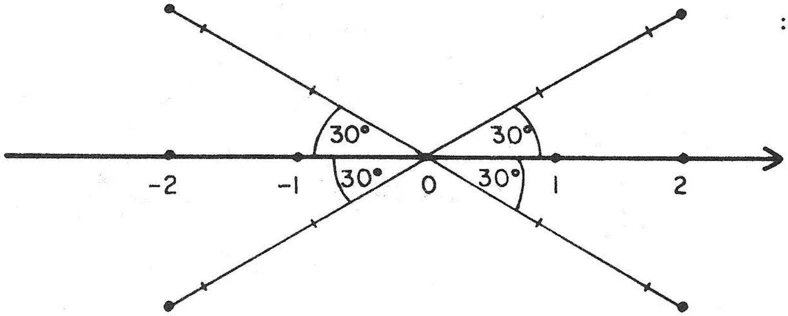


כמו כן, הצעתי את אופן סימון הנקודה לפי השיטה שפיתחנו: $(2\frac{1}{4}\ ,\ 30°)$.

*האם יש עוד נקודות בעלות שם כזה?

כן!

משרטטים:



מכיוון ששוב נוצרה הבעיה של נקודות שונות בעלות אותו שם, הצעתי למדוד את הזוית מן הצד החיובי של הציר נגד כיוון השעון.

VII.*סמן במישור את הנקודות ששמותיהן:

$(3\ ,\ 180^\circ)$ $(1\ ,\ 40^\circ)$

$(4\ ,\ 225^\circ)$ $(2\ ,\ 90^\circ)$

VIII.*נסמן את המרחק באות r ואת הכיוון ב- a (היתה התנגדות ל- α!)

שרטט את הנקודות בעלות התכונות:

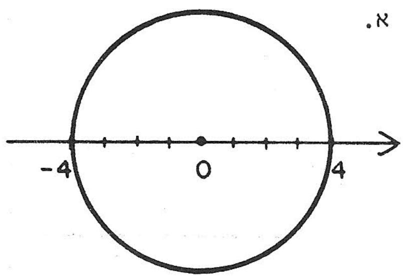
א. $r = 2$ ב. $a = 30^\circ$

ג. $r < 3$ ד. $1 < r < 2$ (לא היו קשיים בהבנת אי-השוויון הכפול).

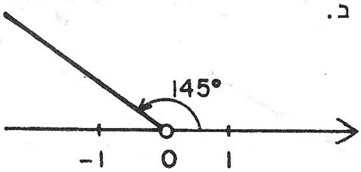
ה. $a < 90^\circ$ ו. $a = 45^\circ$ ו- $r > 2$

IX. *נסה לכתוב בעזרת r ו- a את תכונות הנקודות המסומנות בשרטוטים הבאים:

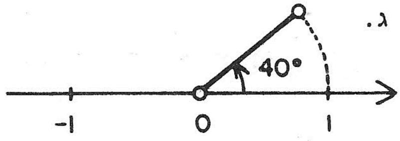
א.



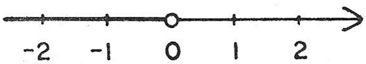
ב.



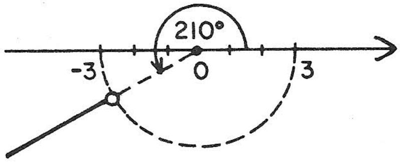
ג.



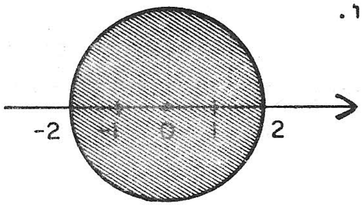
ד.



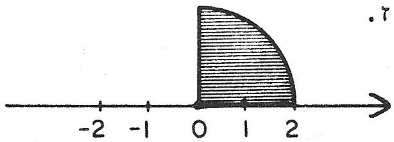
ה.



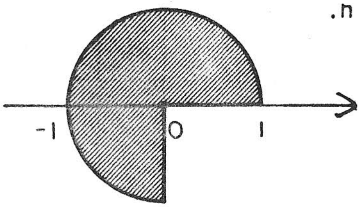
ו.



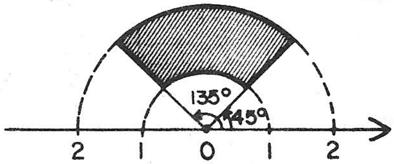
ז.



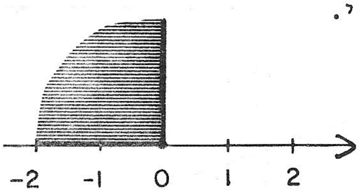
ח.



ט.



י.

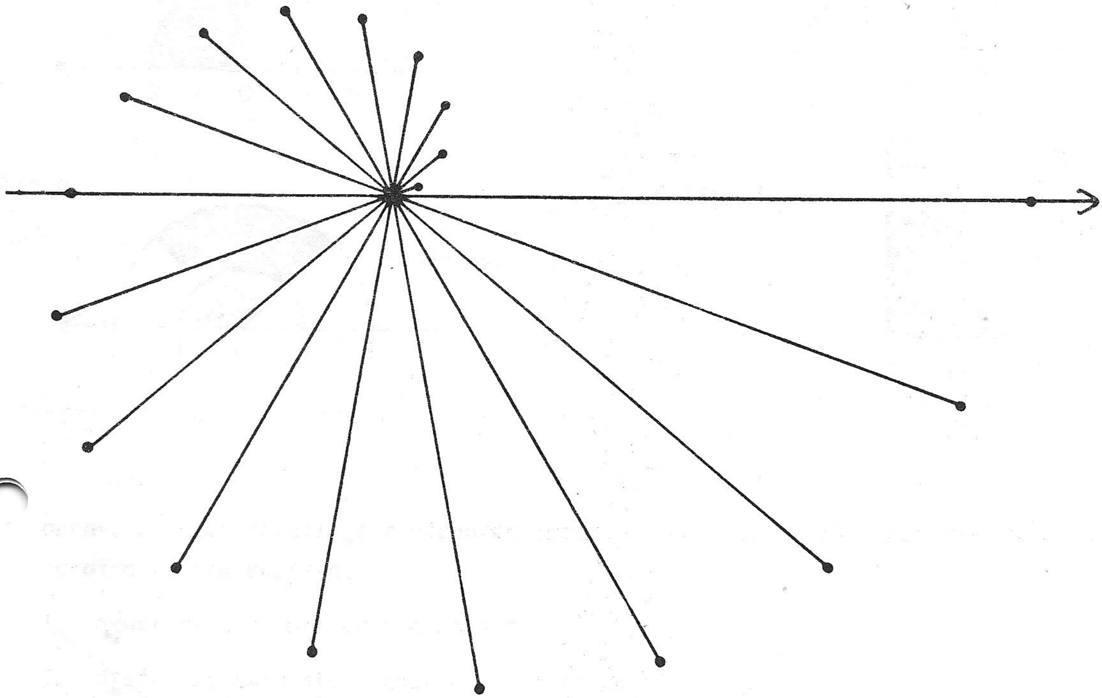


הבנתי, כי מבלי להתכוון לכך מלכתחילה ומבלי שהכיתה תלמד אודות מערכת הצירים הקרטזית ושימוש בתבניות,

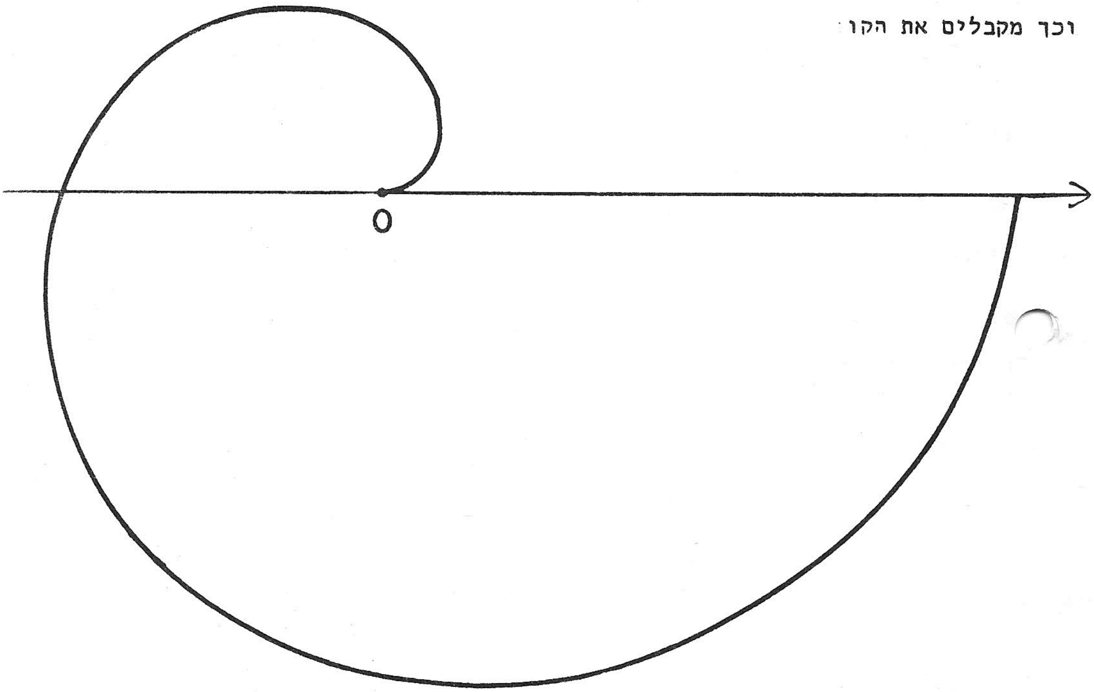
1. מצאנו שיטה לסימון נקודות במישור.
2. טיפלנו בנושאים שונים בהנדסה - תכונות המעגל וחלקיו.
   - מדידת זויות.
   - סימטריה.
3. עסקנו (מבלי לציין זאת במפורש) בתבניות פסוק ובמערכות של תבניות פסוק, ובקבוצות האמת שלהן.
4. שרטטנו גרפים של קבוצות אמת
5. מצאנו תבניות פסוק על-סמך הגרף של קבוצת האמת שלהן.

לסיכום, ברור כי התלמידים "גילו" כאן את השעורים הקוטביים של נקודה $A(r\ ,\ \theta)$,
אך לא טיפלנו בזויות שליליות או בזויות גדולות מ- 360° .
יתכן, שסימון הנקודה בדרך זו קל יותר מן הסימון ע"י שעורים קרטזיים: אין
סכנה של בילבול בין שני השעורים, כפי שזה קורה לעיתים קרובות עם הסימון $A(x\ ,y)$.

תלמידים מתקדמים יכולים לחקור את קבוצת הנקודות בעלות התכונה $r = a$.
בחירת קטע יחידה של $\frac{1}{4}$ מ"מ מבטיחה שרטוט בקנה מידה סביר.
להלן משורטטות מספר נקודות כאלה:



וכך מקבלים את הקו:



אפשר להמשיך בחקירתם של הקווים המתקבלים ממשוואות מן הסוג:

$$r = k \cdot a$$

(k מספר קבוע מסויים)

עבור ערכים שונים של k.

הקווים המתקבלים מכונים "ספירלות של ארכימדס".

ניכר מהמאמר שניתן להפיק תועלת ממצבים מקריים הנוצרים בכיתה. לא פעם מאפשר מצב כזה "לזרוע" רעיונות בעלי תוכן מתמטי, תוך גילוי, חקירה והנאה לתלמיד ולמורה.