# גילוי כשרונות במתמטיקה: תשובות

מאת תיאודור אייזנברג

בעלון שבבים הקודם (מס' 13) הובא דיון בתחרות מתמטית נושאת הפרסים במישיגן כדי להדגים שיטה אחת לגלוי כשרונות במתמטיקה בארה"ב.

להלן התוצאות של המשתתפים בחלק הראשון. כזכור אלו שצברו לפחות 23 נקודות הוזמנו לחלק השני.

| סה"כ תלמידים | מספר התלמידים | ציון | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 40 | * |
| 2 | 1 | 39 | * |
| 4 | 2 | 38 | * |
| 7 | 3 | 37 | * |
| 11 | 4 | 36 | * |
| 18 | 7 | 35 | * |
| 30 | 12 | 34 | * |
| 35 | 5 | 33 | * |
| 49 | 14 | 32 | * |
| 69 | 20 | 31 | * |
| 96 | 27 | 32 | * |
| 137 | 41 | 29 | * |
| 199 | 62 | 28 | * |
| 294 | 95 | 27 | * |
| 411 | 117 | 26 | * |
| 576 | 165 | 25 | * |
| 767 | 191 | 24 | * |
| 1,081 | 314 | 23 | * |
| 1,505 | 424 | 22 | |
| 2,048 | 543 | 21 | |
| 2,792 | 744 | 20 | |
| 3,802 | 1,010 | 19 | |
| 5,057 | 1,255 | 18 | |
| 6,591 | 1,534 | 17 | |
| 8,375 | 1,784 | 16 | |
| 10,416 | 2,041 | 15 | |
| 12,516 | 2,100 | 14 | |
| 14,820 | 2,304 | 13 | |
| 17,121 | 2,301 | 12 | |
| 19,013 | 1,892 | 11 | |
| 20,611 | 1,598 | 10 | |
| 21,828 | 1,217 | 9 | |
| 22,661 | 833 | 8 | |
| 23,170 | 509 | 7 | |
| 23,395 | 225 | 6 | |
| 23,509 | 114 | 5 | |
| 23,547 | 38 | 4 | |
| 23,564 | 17 | 3 | |
| 23,566 | 2 | 2 | |
| 23,567 | 1 | 1 | |
| 23,567 | 0 | 0 | |

התוצאות לפי כיתות:

| כיתה | מספר התלמידים | ממוצע | שונות | סטית תקן |
|---|---|---|---|---|
| ח' | 7 | 13,000 | 4,000000 | 2,00000 |
| ט' | 870 | 11,845 | 11,990860 | 3,46278 |
| י' | 3,973 | 13,141 | 14,015220 | 3,74369 |
| יא' | 9,356 | 13,872 | 17,125160 | 4,13825 |
| יב' | 9,070 | 15,520 | 23,057320 | 4,80180 |
| אחרים | 291 | 14,103 | 21,824410 | 4,67166 |
| סה"כ | 23,567 | 14,311 | 19,843220 | 4,45457 |

נביא עתה את התשובות הנכונות

חלק I: תשובות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. א | 2. ד | 3. א | 4. ה | 5. א |
| 6. א | 7. ד | 8. ד | 9. ה | 10. ב |
| 11. ג | 12. ב | 13. ב | 14. ה | 15. ג |
| 16. ב | 17. ה | 18. ג | 19. ד | 20. ג |
| 21. ג | 22. ה | 23. א | 24. ג | 25. ה |
| 26. ב | 27. ה | 28. א | 29. ד | 30. ה |
| 31. ד | 32. ב | 33. א | 34. ב | 35. ד |
| 36. א | 37. ב | 38. ג | 39. ג | 40. ד |

חלק II: תשובות

1. א. $t$ הוא הזמן בדקות שבין צלצול השעון לבין הרגע שבין 15 עד 20 דקות מאוחר יותר, כאשר מחוג הדקות הסתיר את מחוג השעות.

ב. מחוג הדקות הוא בין הספרות 3 ו 4 מאחר ש:

$$15 \le t \le 20 \quad \Longrightarrow \quad 3 \le t/5 \le 4$$

ג. לפיכך ב- $t = 0$, השעה שצלצל השעון חייבת להיות 3.
כמו כן הקשת של מחוג השעות הנמדדת מ-12 תהיה

$$\frac{1}{4} + \frac{t}{60}\cdot\frac{1}{12}$$

ד.  לפיכך

$$\frac{t}{60} = \frac{1}{4} + \frac{t}{60}\cdot\frac{1}{12}$$

$$12t = 180 + t$$

$$11t = 180$$

$$t = 16\frac{4}{11} \text{ דקות}$$

או בדיוק של שניות, 16 דקות ו 22 שניות.

2.  יהי $a = 2x$, $b = 7x$ כך ש $a + b = 9x = c^3$, ו $x = 3D^3$ כאשר

$1000 \le 27D^3 \le 9999$ ו $37 < D^3 < 370$.

לכן $D = 4, 5, 6, 7$ ו $D^3 = 64, 125, 216, 343$

ו- $x = 3D^3 = 192, 375, 648, 1029$

לפיכך מ- $a = 2x$

$b = 7x$

נקבל

$$\begin{array}{r} 384 \\ \underline{3144} \\ 1728 \\ \shortparallel \\ 12^3 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 750 \\ \underline{2625} \\ 3375 \\ \shortparallel \\ 15^3 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 1296 \\ \underline{4536} \\ 5832 \\ \shortparallel \\ 18^3 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 2058 \\ \underline{7203} \\ 9261 \\ \shortparallel \\ 21^3 \end{array}$$

3.  המספר הגדול ביותר שניתן לקבל הוא:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

המספר הקטן ביותר שניתן לקבל הוא:

$$-1 - 2 - \ldots - n = -\frac{n(n+1)}{2}$$

בין שני מספרים אלה (כולל הקצוות) יש $n(n+1) + 1$ מספרים. נראה כי מבין המספרים שבין שני הקצוות שהוזכרו רק כל מספר שני יכול להתקבל, כך שבסך הכל מספר האפשרויות הוא

$$\frac{n(n+1) + 1 + 1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

נוכיח טענה זו בשני שלבים:

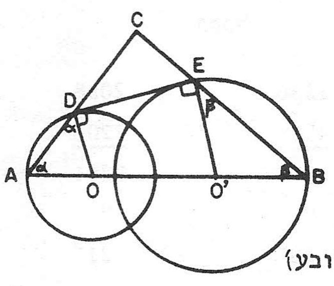
ראשית נראה כי עבור $n$ מסוים כל המספרים המתקבלים הם או זוגיים או איזוגיים.

הסבר: אם נחסר שני מספרים מהצורה $\sum_{k=1}^{n}(\pm k)$ נקבל מספר זוגי, כי עבור כל $k$ או שיש לו אותו הסימן בשני המספרים ואז בהפרש שני המספרים נקבל אפס או שסימניו של $k$ מנוגדים ואז נקבל $+2k$ או $-2k$. המסקנה היא כי שני המספרים הם זוגיים או איזוגיים, היות והדבר נכון לכל שני מספרים מהצורה הזו כולם הם או זוגיים או איזוגיים.

עתה נראה כי כל המספרים (הזוגיים או האיזוגיים) שבין שני הקצוות מתקבלים. נסתכל על כל המספרים פרט לקטן ביותר ונראה כיצד ניתן על ידי שינוי סימנים לקבל מספר הקטן ממנו ב 2. עבור המספר הגדול ביותר פשוט נשנה את $+1$ ל $-1$.

בכל מספר אחר מהצורה $\sum_{k=1}^{n}(\pm k)$ (פרט לקטן ביותר) יש שני מספרים סמוכים שהראשון בהם שלילי $-j$ וזה שאחריו חיובי $+(j+1)$, אם רק נחליף את סימניהם נקטין את הסכום ב-2.

לסיכום: מספר האפשרויות השונות עבור מספרים מהצורה $\sum_{k=1}^{n}(\pm k)$ הוא $\frac{n(n+1)}{2}+1$.




4. א. שרטט $\overline{OD}$ , $\overline{O'E}$

ב. $OD = OA$ (רדיוסים) , $O'E = O'B$ (רדיוסים)

ג. הזוית בין משיק לרדיוס היא זוית ישרה.

ד. $2\alpha + 90^\circ + 2\beta + 90^\circ = 360$ (סכום זויות במרובע)

ה. $\alpha + \beta = 90^\circ$

לפיכך במשולש $ABC$ , $\sphericalangle C$ היא בת $90^\circ$.

5. א. נתון $(x-2)\,f(x+1) - (x+1)\,f(x) \equiv 0$

ב. שים לב ש $f(2) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, כך שניתן לרשום:

$f(x) = (x-2)(x)(x-1)g(x)$.

ג. קבלנו עתה

$$(x-2)[(x-1)(x+1)(x)g(x+1)] - (x+1)[(x-2)(x)(x-1)g(x)] \equiv 0,$$

או $x(x+1)(x-1)(x-2)\,[g(x+1) - g(x)] \equiv 0$

כך ש $g(x+1) = g(x)$ לכל $x$, לפיכך $g(x)$ הוא קבוע, נסמנו $k$

ו $f(x) = kx(x-1)(x-2)$.