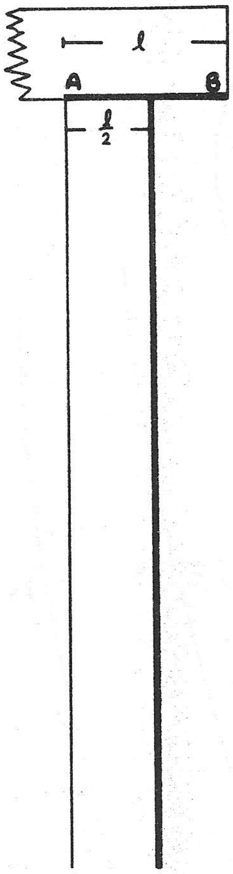
על מניפות, חלוקת זויות ובניית מצולעים משוכללים

מאת: משה ויפים ברונדז

אחת משלוש הבעיות המפורסמות של הקדמונים היתה הבעיה של חלוקת זוית כלשהי לשלושה חלקים בעזרת סרגל ומחוגה בלבד. מתמטיקאים רבים ניסו כוחם במציאת פתרון לבעיה ורק במאה הקודמת הוכח כי אין לה פתרון.

עיסוק גאומטרי מעניין הוא חיפוש אחר מכשירים שונים מסרגל ומחוגה אשר יאפשרו בניות גאומטריות. מכשירים כאלה תוארו כבר בעבר ב"שבבים"*).

מחברי מאמר זה פיתחו שיטה לחלוקת זוית כלשהי ל n חלקים שווים (n - כל מספר שלם) בעזרת סרגל T. תמונת הסרגל מופיעה בציור 1.



ציור 1

הסבר: את סרגל ה- T ניצור משני סרגלים מאונכים זה לזה; נשתמש בקו השפה הימני בלבד של הסרגל הארוך ובקטע $\overline{AB}$ של הסרגל השני. (ראה קווים מודגשים בציור).
אורך הקטע $\overline{AB}$ יסומן ב- ℓ. את הסרגל הארוך נניח כך שקו השפה הימני יימצא במרחק $\frac{\ell}{2}$ מכל אחד מקצות הקטע AB. $\overline{AB}$ יקרא <u>בסיס הסרגל</u>, הקו המאונך לו יקרא <u>ציר הסרגל</u>.

---

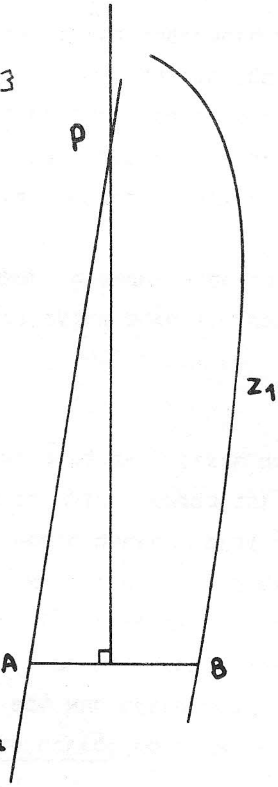
* נחום יער - על אלברכט דירר "שבבים" תיק מס' 3
אסתר רמתי - על בניות גאומטריות והמכשירים לביצוען "שבבים" תיק מס' 12

בניית מניפה בעזרת סרגל T

בשם מניפה נקרא למערכת קווים למציאת קודקודי זויות הבסיס של משולשים שווי-שוקיים חופפים בעלי קודקוד ראש משותף.

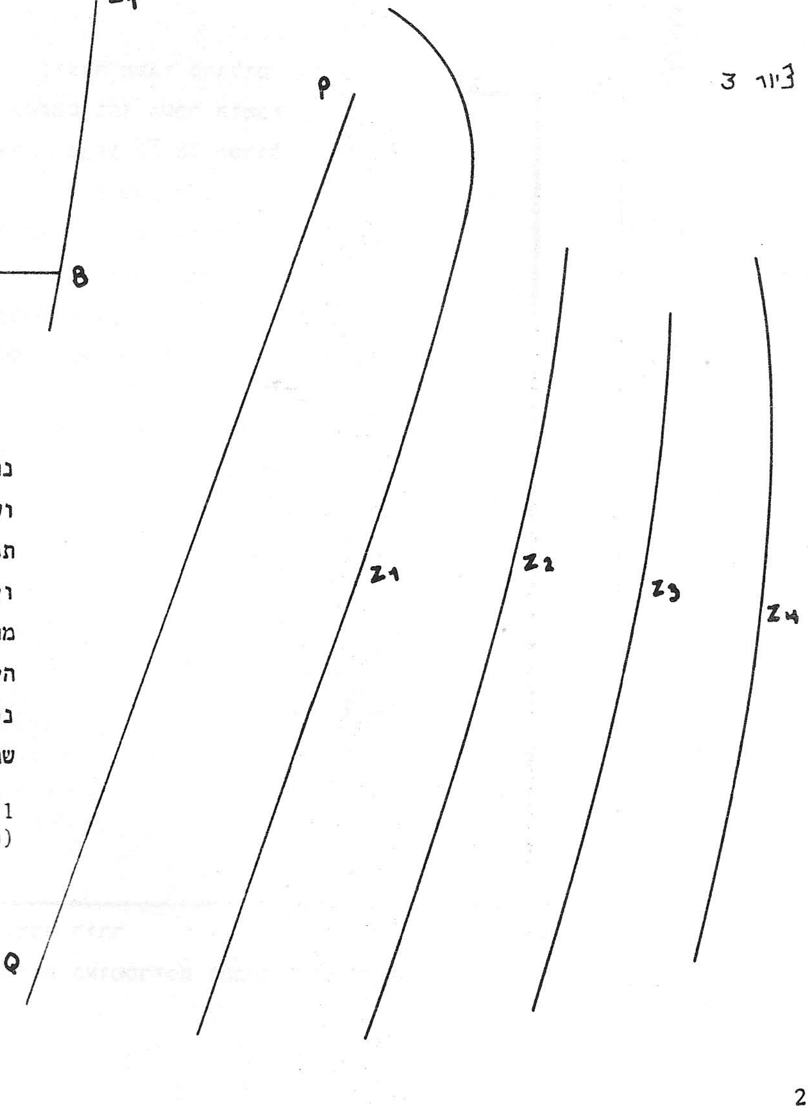
בניית מניפה

ציור 2



נסמן ישר PQ שיהיה הישר הקבוע של המערכת. נחליק סרגל T לאורכו כך שקצהו האחד A של בסיס הסרגל יעבור לאורך הישר וציר הסרגל יעבור דרך P. נסמן ב- z_1 את הקו שירשום קצהו B של הבסיס (ראה ציור 2).

ציור 3

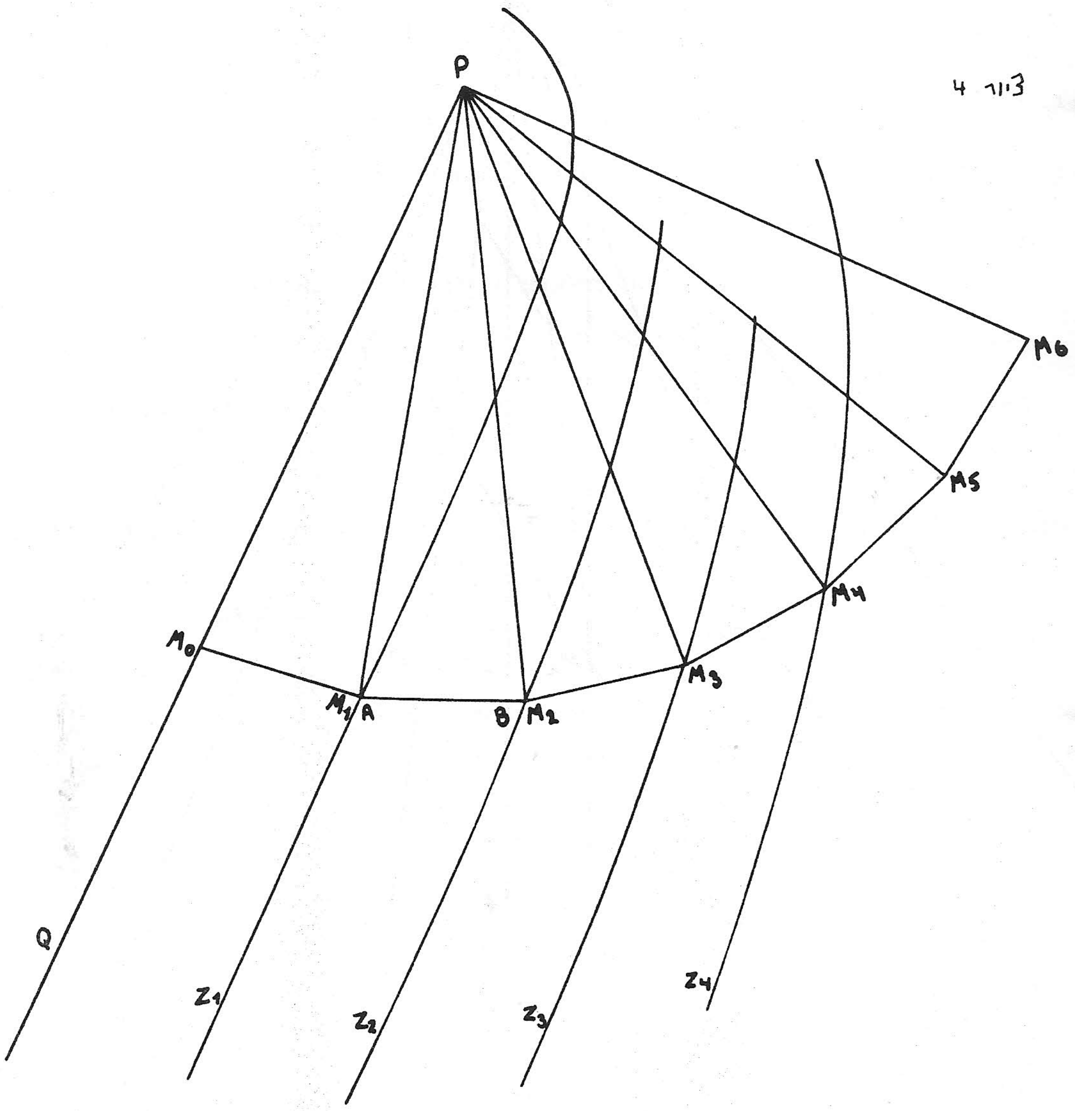


נחזור על שלב זה שוב ושוב כאשר ציר הסרגל תמיד עובר דרך P וקצהו A של הבסיס מחליק בכל פעם לאורך הקו החדש שהתקבל. נסמן את הקווים שהתקבלו:

z_1 , z_2 , z_3
(ראה ציור 3).

בדרך זו מתקבלת "מניפה". "מניפה" זו היא מערכת קווים שכל אחד משורטט כתוצאה מהחלקת סרגל T העובר דרך נקודה קבועה, על הקו הקודם לו. אם נעמיד את סרגל ה- T על מניפה כך שהקצה A יהיה בנקודה M_o (ראה ציור 4) והציר יעבור דרך P הקצה P יסמן נקודה M_1 על z_1. המשולש M_oPM_1 הוא שווה-שוקיים.
נמשיך ונקבל נקודות M_2 , M_3 וכו' הנמצאות על הישרים z_2, z_3 וכו' בהתאמה.
בכל פעם נקבל משולש M_iPM_{i+1} שהוא שווה-שוקיים. קודקוד הראש בכל משולש הוא P ואורך בסיסם ℓ. לכל שני משולשים שוק משותפת ומכאן כל המשולשים חופפים זה לזה.

כאשר חוזרים על פעולה זו מתקבלת מעין "מניפה" של משולשים הנקבעים על-ידי בחירת נקודה M ראשונה על אחד הקווים.



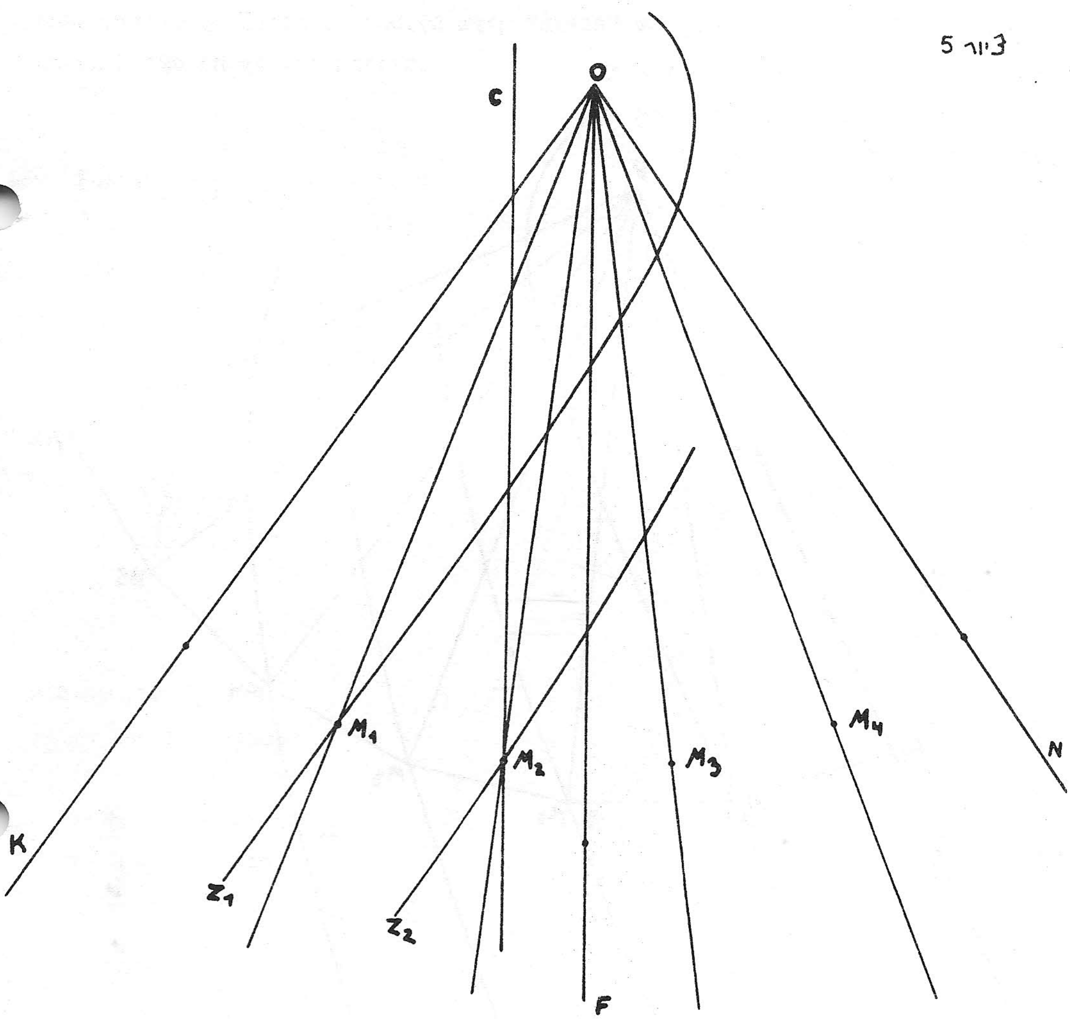
חלוקת זווית

נדגים כיצד ניתן להשתמש במניפה שבנינו כדי לחלק זויות לחלקים שווים.

דוגמא: נתונה זוית KON, נחלק אותה לחמישה חלקים שווים (ציור 5).

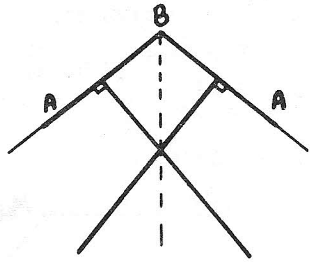
הישר OK ישמש כישר הקבוע והנקודה O תהיה נקודת ההחלקה של ציר הסרגל.

ציור 5



א. נעביר חוצה זוית OF .

הערה: ציור 6 מראה כיצד ניתן לבצע חציית זוית בעזרת סרגל T



ציור 6

ב. במרחק $\frac{\ell}{2}$ מ- OF נעביר c מקביל ל- OF (גם זאת ניתן לבנות בעזרת סרגל T).

ג. נסמן את נקודת החיתוך של c עם z_2 ב- M_2 .

ד. משלימים את M_1 , M_3 ו- M_4 (באופן שבו הסברנו מקודם את בניית "מניפה" המשולשים בציור 4).

הישרים OM_1 , OM_2 , OM_3 ו- OM_4 מחלקים את הזוית לחמישה חלקים שווים.

כלומר: $\sphericalangle M_4ON = \sphericalangle M_3OM_4 = \sphericalangle M_2OM_3 = \sphericalangle M_1OM_2 = \sphericalangle KOM_1$

שים לב! אין צורך בבנית z_3 ו- z_4, ברגע שמצאנו את M_2 נוכל לקבל את כל יתר ה-M-ים.

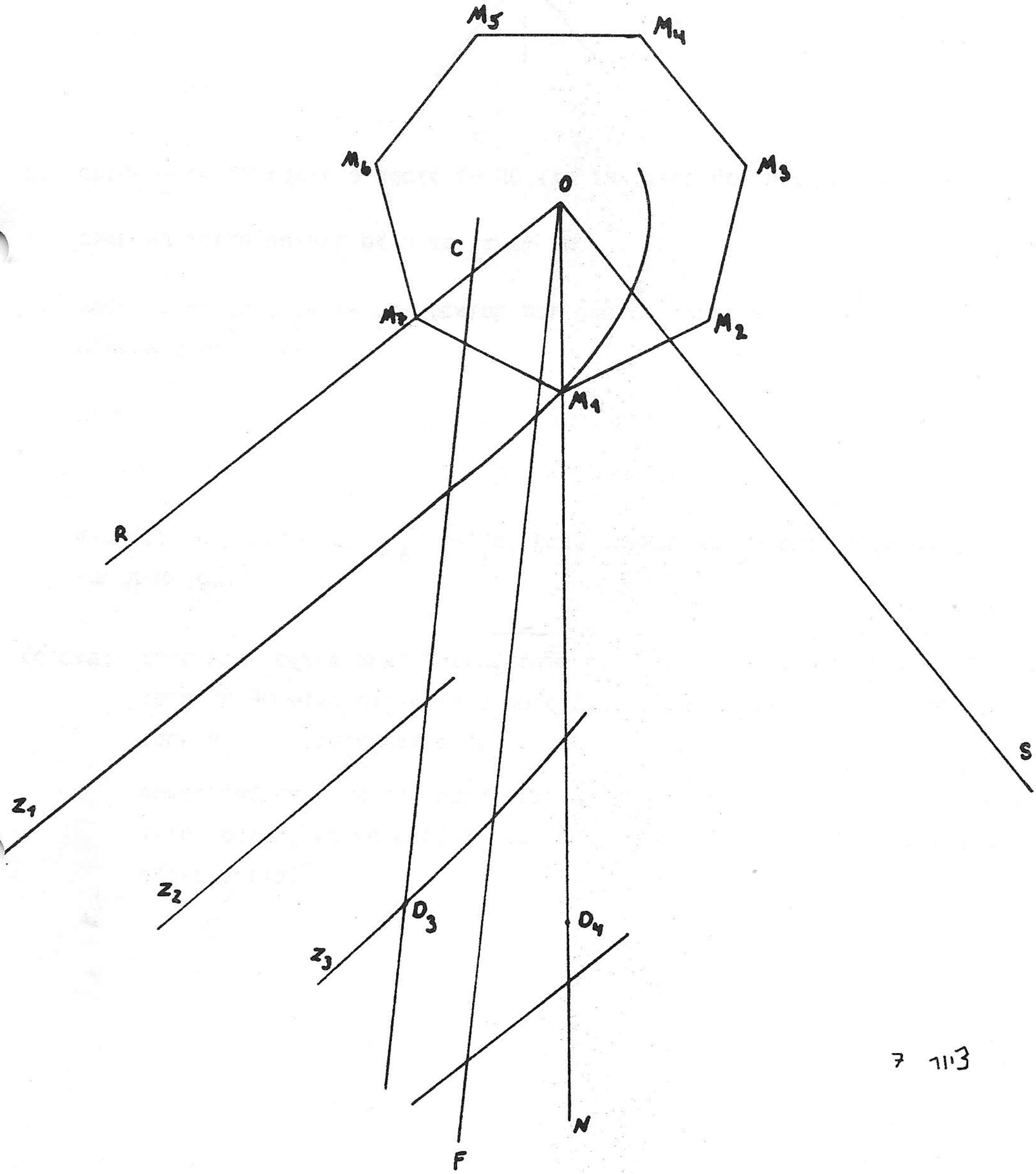
לסיכום: בדרך דומה בעזרת סרגל T נוכל לחלק זוית לכל מספר אי-זוגי 2n + 1 של חלקים. נבנה את OF חוצה הזוית ו- C המקביל לו. נעביר את z_1 עד z_n ועל z_n נסמן את M_n ונמשיך כמו קודם.

המעבר לחלוקת זוית לכל מספר זוגי של חלקים הוא פשוט מאחר וניתן לחצות זוית. כלומר, בעזרת סרגל T אפשר לחלק זוית כלשהי למספר שלם כלשהו של חלקים שווים.

<u>בניית מצולעים</u>

נשתמש עתה ב"מניפה" לבניית מצולעים משוכללים.

דוגמא: נבנה משובע משוכלל. (ציור 7)



ציור 7

א. נעביר את OF חוצה הזוית הישרה ROS .

ב. במרחק $\frac{\ell}{2}$ מ OF נעביר את c .

ג. נסמן ב- D_3 את נקודת החיתוך של c עם z_3 (זה מבטיח לנו חלוקה ל 7 של הזוית הישרה).

ד. בעזרת סרגל T נמצא את D_4 (כמו בציור 4).
הזוית AOD_4 שווה ל- $90° \cdot \frac{4}{7}$ כלומר $\frac{360°}{7}$

הקטע AD יכול לשמש כצלע של משובע משוכלל אבל כדי לבנות את כל המשובע נצטרך לבנות כל צלע על-ידי מציאת 4 נקודות וזו תהא עבודה רבה ומסורבלת והמשובע שיתקבל יהיה גדול מדי לשרטוט על גליון.

הרעיון של בניית "מניפת" המשולשים היה בכך שבסיסי המשולשים שווי-השוקיים היו שווים ל- ℓ. למצב כזה נוכל להגיע אם נבצע את הפעולה הבאה:

ה. נסמן את נקודת החיתוך של OD_4 עם z_1 על ידי M_1 (ברור שגם הזוית AOM שווה ל- $\frac{360°}{7}$) .

ו. עתה נמצא בשיטה שתוארה בציור 4 את: M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 , M_7 ונחברם וכך יווצר המשובע.

לסיכום: הסברנו לעיל כי ניתן לחלק זוית למספר כלשהו של חלקים. כאן ראינו את הקשר שבין בניית מצולע משוכלל וחלוקת הזוית (בת $90°$). לפיכך נוכל בשיטה זו לבנות כל מצולע משוכלל.