התור בבנק*

מאת: עדנה ויהושע אטקין

כל אחד מאתנו מצא את עצמו בודאי ניצב באחד התורים: בבנק, אצל הספר(ית), בקפיטריה ואולי בשדה התעופה, הרגיש כי עצביו נמתחים והיו לו הרבה הצעות ייעול.

שאיפתנו, שהיא משותפת לכל הממתינים בתור, היתה להמתין זמן מועט ככל האפשר.

בעייתו של מגיש השירות הינה כפולה: מצד אחד אינו רוצה לגרום להמתנה רבה בתור, כי אז הממתין יכול לוותר על השירות ולחפשו, אם אפשר, במקום אחר.
מצד שני אין ברצונו של מגיש השירות לקבוע שירות טוב מדי, כלומר שירות ללא המתנה בתור, כי אז נצילות עובדיו (נותני השירות) נמוכה, תופעה שמשמעותה הוצאת כסף מיותרת.

מטרת המאמר הינה הצצה לתחום של בעית התורים, על-ידי הצבת מודל של תור בבנק וסימולציה שלו במחשב. יתכן כי תוצאות הסימולציה והאפשרויות לפיתוח המודל יתרמו במקצת להבנה טובה יותר של הנושא, ולשיפור השירות לרווחת המשתמש.

התורה המתמטית העוסקת בתחום זה נקראת "תורת התורים". תורה זאת צמחה בראשית המאה מן הצורך להגדרה מדוייקת של מבנה רשת הטלפונים וקביעת רמת השירות בה. מתוך מעקב אחר דרישות השרות ואורך השיחות ברשת טלפונים, התברר כי מבנה תורים זה נוח לפתרון אנליטי.

כיום מתרחב השימוש ופיתוח התיאוריה בתחום של חקר ביצועים ובבעיות מבני מערכות, של מחשבים למשל, הן בכיוון של פתרונות אנליטיים והן בכיוון של סימולציה. שני סוגי הפתרון, אנליטי או סימולציה, אינם ה"מוצר" עצמו, אלא תרגיל "על יבש" לתאור המוצר והתנהגותו, על ידי הצגת מודל שלו.
בפתרון אנליטי מוצגת התנהגות המודל ע"י מערכת משואות, ולעיתים יש צורך לפשט את המודל ובכך להרחיקו מן ה"מוצר" עצמו, כדי לאפשר את פתרון מערכת המשוואות.

פתרון הסימולציה מתקבל על ידי הרצה במחשב של תכנית המתארת את המודל.
הפתרון תלוי במספרים המזינים אותו, אך ניתן ליצור מודלים מורכבים ולבדוק את התנהגותם באמצעות הסימולציה.

כדי לטפל בבעית התורים דרושה ידיעתם של שלושה מאפיינים:

א - מבנה בקשות השרות, כלומר באיזו צורה מתווספות בקשות שירות אל המערכת המתוארות על ידי המודל: האם בצורה אקראית, האם ההתנהגות מתוארת על ידי חוק מתמטי מסוים, האם הדרישה הבאה מותנית במספר הדרישות הקיימות כבר וכו'...

---

*המוטיבציה למאמר הותנעה על ידי: Jolly Mathers:
The Barber Queue, Mathematics Teacher, December 1976.

ב - צורת ההתנהגות של התור:

ראשון נכנס - ראשון מקבל שירות, אחרון נכנס - ראשון מקבל שירות, בחירה אקראית בין הממתינים או מבנה של עדיפויות.

ג - מבנה מתן השרות: האם קיימת פונקציה מתמטית מסוימת המתארת את משך זמן מתן השירות לנמצאים בתור.

לצורך המחשה נציג מודל של בנק שבו קיימים מספר קופאים (Tellers), אך קיים בו תור מרכזי אחד. כאשר נכנס אדם לבנק הוא מצטרף לתור ועם הגיעו לראש התור הוא פונה לקופאי הפנוי. כאשר מסיים הקופאי את השירות לאדם אחד הוא מתחיל מייד בשירות של הלקוח הבא בתור, אם קיים כמובן אחד כזה.

הבנק פתוח משך 8 שעות וכל לקוח שהגיע לפני סגירתו מקבל שירות, אפילו יאלצו הקופאים להשאר מעבר לשעת הסגירה. הגורם המשתנה בהרצת הסימולציה הוא מספר הקופאים. בעזרת הסימולציה בכוונתנו למצוא מהי נצילות הקופאים ומה ממוצע אורך התור. כמו כן ברצוננו לדעת מהו זמן הסגירה הממשי (גמר השירות) של הבנק ומהו זמן ההמתנה הממוצע של הלקוח.

נבחרו המאפיינים הבאים, המתאימים לתנאים הממשיים:

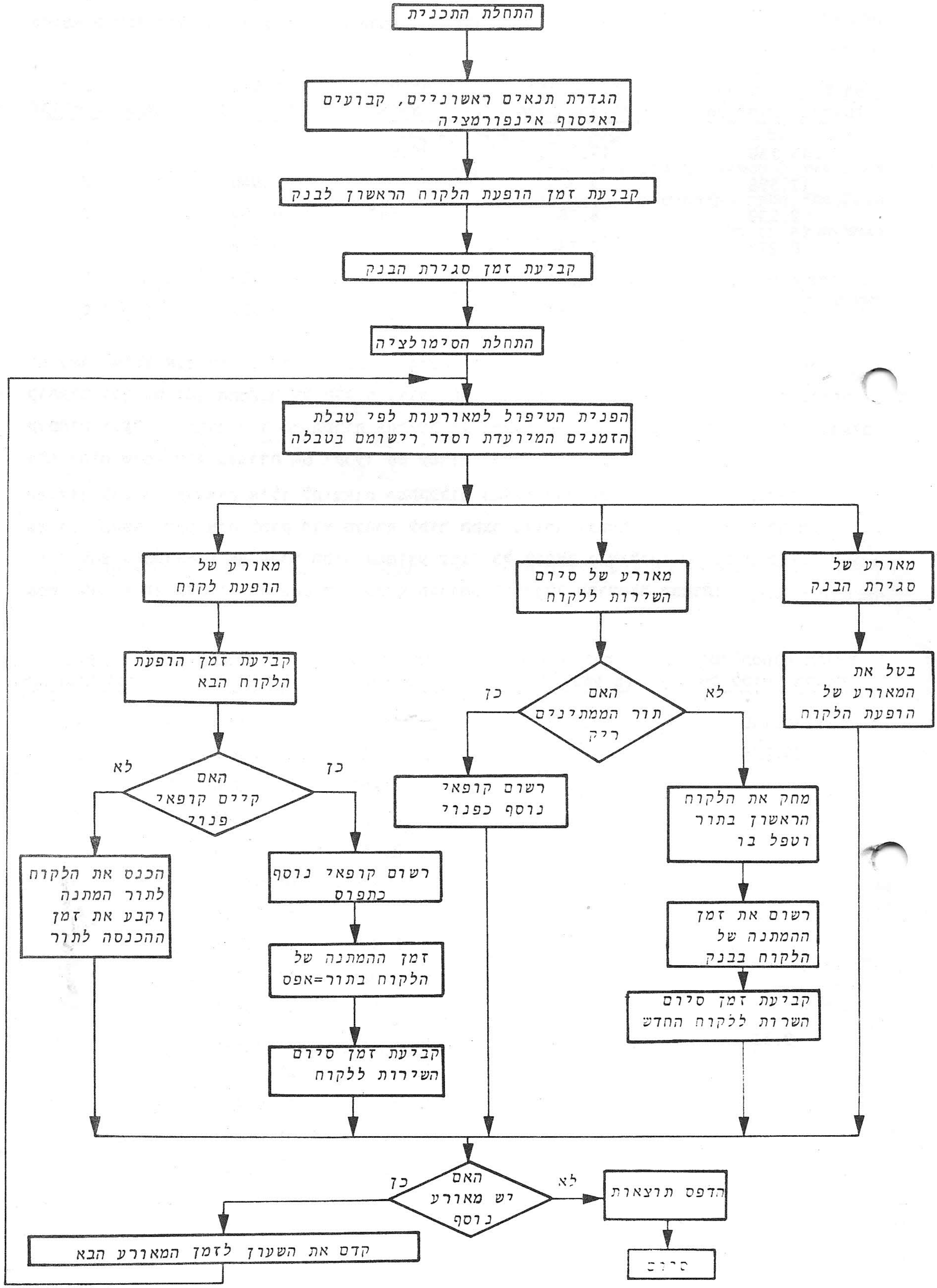
1. מבנה בקשת השירות: מרווח הזמן בין הופעת אדם אחד למשנהו לבנק, מתואר על ידי פונקציה מתמטית הנקראת-התפלגות אקספוננציאלית.
ההתפלגות האקספוננציאלית שלפנינו הינה של קטע זמן שהסתברות סיומו זהה בכל רגע.
הנוסחה המאפיינת פונקציה מתמטית זאת היא: $P(t) = e^{-\nu t}$ כאשר הגורם היחיד שאותו דרוש לדעת הוא הממוצע ν.
הממוצע עבור הסימולציה הוא: $\nu = 5$ דקות.

2. צורת ההתנהגות של התור הינה בשיטה של: ראשון נכנס לתור - ראשון מקבל שירות.

3. אורך זמן מתן השירות יתואר גם הוא על ידי התפלגות אקספוננציאלית.
הממוצע עבור הסימולציה הוא: $\nu = 10$ דקות.

ממעקב אחרי תהליכים ממשיים הוברר כי הן מרווח הזמן בין בקשות שירות והן משך מתן השירות ניתן לקירוב טוב על ידי התפלגות אקספוננציאלית, כאשר הסטיות ממנה הן זניחות. כך, לדוגמא, ברשת הטלפונים קיימת סטיה חזקה מן ההתפלגות האקספוננציאלית במשך מתן השרות רק בזמן שהוא סביב 20 שניות. סטיה זאת מוסברת בכך שזהו זמן הקצר מאורך שיחה נורמלית, וארוך יותר מזמן החזקת הקו כאשר המנוי הנקרא תפוס או איננו עונה.

נתאר בתרשים זרימה את הפעולות המתבצעות בסימולציה של מודל הבנק:



תכנית הסימולציה עבור מודל הבנק מתוארת בנספח.

התוצאות שקיבלנו מן התכנית הן הבאות:

מספר הקופאים בבנק	נצילות הקופאים	אורך התור הממוצע	זמן סגירת הבנק (בשעות)	זמן המתנה ממוצע של לקוח (בדקות)
1	1.000	24.992	17.727	245.130
2	0.946	3.383	9.363	17.598
3	0.704	0.545	8.384	2.539
4	0.528	0.059	8.384	0.273
5	0.423	0.002	8.384	0.008
6	0.352	0.	8.384	0.

מתוצאות אילו אנו רואים כי זמן סגירת הבנק (גמר השרות) זהה לגבי שלושה או יותר קופאים וכן גם זמן ההמתנה של הלקוח ואורך התור הממוצע הם קטנים לגבי בנק עם שלושה קופאים ומעלה. ברור לנו כי השרות יתייעל רק במקצת אם יקבעו מעל לשלוש עמדות קופאים, ולא יהיה שום יעול בעבודה אם יקבעו שש עמדות ומעלה.

מעניין להשוות תוצאות אילו לתוצאות המתקבלות במודל אחר של בנק שבו לכל קופאי תור משלו. כאשר נכנס אדם לבנק הוא מצטרף לתור הקצר ביותר ונשאר בו עד מתן השירות. חשוב להציג בתוצאות את אורך התור הממוצע לפני כל קופאי ונצילותו של כל קופאי. אפשר להריץ תוכנית הדומה במבנה לתכנית הקודמת ויתקבלו התוצאות הבאות:

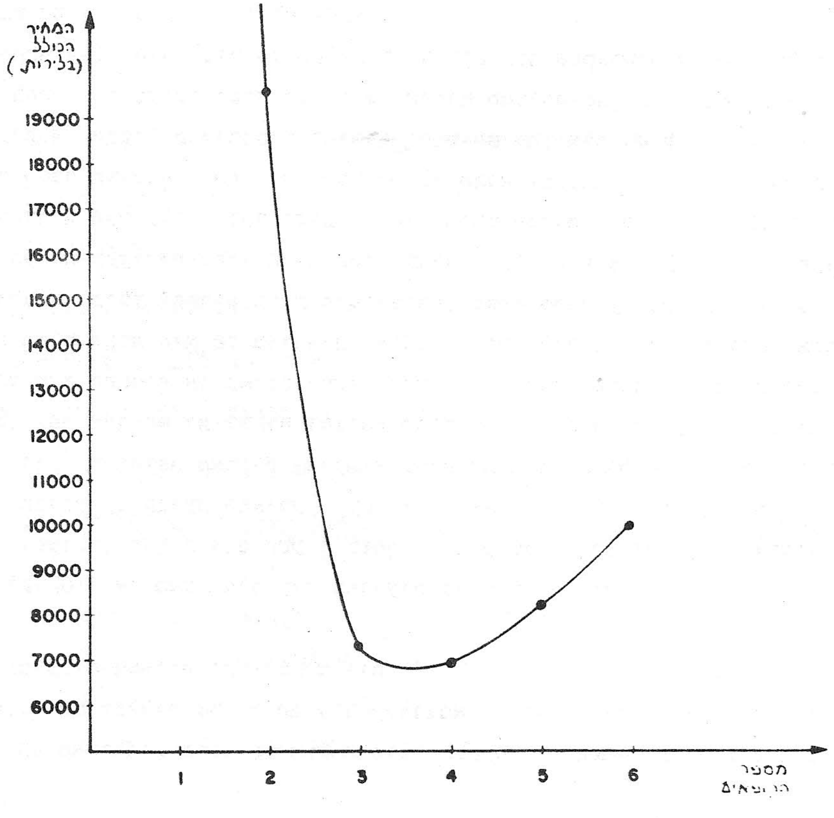
מספר הקופאים בבנק	נצילות הקופאים	אורך התור הממוצע	זמן סגירת הבנק (בשעות)	זמן המתנה ממוצע של לקוח (בדקות)
1	1.000	24.992	17.727	245.130
2	1) 0.892	1) 1.597	9.589	20.556
	2) 0.956	2) 2.261		
3	1) 0.680	1) 0.152	8.754	4.127
	2) 0.614	2) 0.240		
	3) 0.730	3) 0.456		
4	1) 0.714	1) 0.	8.384	0.791
	2) 0.485	2) 0.001		
	3) 0.462	3) 0.038		
	4) 0.455	4) 0.132		
5	1) 0.710	1) 0.	8.384	0.136
	2) 0.504	2) 0.		
	3) 0.470	3) 0.		
	4) 0.241	4) 0.		
	5) 0.029	5) 0.189		

מהשוואת התוצאות עבור שני המודלים ברור כי השירות בבנק בעל תור מרכזי יעיל יותר מהשירות בבנק בעל מספר תורים, זאת עבור מספר קופאים זהה, מאחר וזמן ההמתנה הממוצע של הלקוח מתקצר והבנק נסגר מוקדם יותר.

נפתח כעת את המודל של תור מרכזי ונכניס בו פונקצית מחיר. נקבע עבור שעת עבודה של הקופאי 200 ל"י ועבור "שעת הפסד בתור" של הלקוח 500 ל"י. מטרת המודל היא לקבוע את פונקצית המחיר הכולל, שהוא הסכום של שכר הקופאים והפסד הלקוחות ולקבוע עבור הבנק מהו מספר הקופאים האופטימלי שיקבע מינימום למחיר זה.
לאחר הרצת המודל, שהינו עיבוד של התכנית הראשונה קיבלנו את התוצאות הבאות:

מספר הקופאים בבנק	סכום שעות העבודה של הקופאים (בשעות)	סכום שעות ההפסד של הלקוחות (בשעות)	המחיר הכולל (בלירות)
1	17.73	443.03	225061
2	18.73	31.68	19586
3	25.15	4.57	7315
4	33.54	0.49	6953
5	41.92	0.02	8394
6	50.31	0.	10062

הצגתן של התוצאות בצורה גרפית נותנת את תמונת המצב הבאה ממנה ברור כי מספר הקופאים האופטימלי הוא 4.



המודלים השונים של מערכת בנק וההשואות ביניהם, מקנים לנו תחושה בתחום של הצגת מודלים וסימולציה והבנה טובה יותר בנושא התורים.

אפשר, כמובן, על בסיס המודלים שהוצגו להרחיב את היריעה ולבצע סימולציה של מודלים מורכבים הקרובים יותר להתנהגות מציאותית. התנהגות זאת יכולה להיות, לדוגמא, פילוג לא אחיד של בקשות השירות במשך כל היום, כאשר קיימות שעות עומס ושעות שפל.
אפשרות אחרת לתאור מציאותי היא זאת שהקופאים מזרזים את הטיפול כאשר התור מתארך, או שלקוח המגיע ורואה תור גדול עוזב את הבנק ללא קבלת שירות.
אפשר כמובן גם להעמיק בכיוון המתמטי של "תורת התורים" או להרחיב בנושא של מודלים.

נספח

סימולציה של בנק בעל תור מרכזי ומספר קופאים

השפה שנשתמש בה היא שפה SIMSCRIPT II .5,
שפה זאת פותחה עבור סימולציה של תהליכים בדידים, כך שמתאפשרת הצגת מודלים מורכבים וטיפול נח בהם. כך מכילה השפה מבנים של איסוף סטטיסטיקה, כך שהמשתמש אינו צריך לכתוב בתכנית את הפעולות הדרושות לאיסוף הסטטיסטיקה, אלא רק לטפל במשתנים המתאימים ולהצהיר על בקשת האיסוף. התכנית עצמה מכילה מבוא (PREAMBLE) שבו נקבעת הסכימה הסטטית, ההגדרות הגלובליות והדרישות לאיסוף הסטטיסטיקה. קטע שני (MAIN) שבו מתחיל הביצוע, קובע את הפעולות לפני הרצת הסימולציה (START SIMULATION) ואת הפעולות לאחר סיום הסימולציה, כולל אפשרות הרצת סימולציה נוספת,.לרוב עם נתונים שונים.
מבנה תכנית הסימולציה היא של מאורעות (EVENTS) הפועלים בזמנים בדידים ואשר זמן פעולתם נקבע ע"י המתכנת או כאינפורמציה חיצונית (במודל שלנו המאורעות הם: בוא הלקוח לבנק, גמר מתן השרות ללקוח וסגירת הבנק). על מהלך ביצוע הסימולציה שולטת רוטינת הזימון. הרוטינה מארגנת בצורה דינמית את תור המאורעות העתידים לקרות לפי לוח הזמנים הנקבע עם קביעת המאורע. עם סיום מאורע אחד מכניסה רוטינת הזימון את המאורע הבא לפעולה, תוך קידום השעון לזמן הביצוע של מאורע זה. הסימולציה נפסקת על ידי פקודת STOP או כאשר אין עוד מאורעות נוספים לביצוע.

האוביקטים הפועלים במערכת נקראים ישויות (ENTITIES) המאופיינים על ידי תכונותיהם (ATRIBUTES). הם יכולים להיות קבועים (לדוגמא הקופאים) או זמניים (במודל שלנו הלקוחות). הם מאורגנים במבנים (במקרה שלנו QUEUE) המאפשרים פעולות מורכבות.

```
"BANK WITH MULTIPLE TELLERS AND CENTRAL QUEUE
PREAMBLE
   EVENT NOTICES INCLUDE ARRIVAL "OF CUSTOMER",
     END.OF.SERVICE "TO CUSTOMER" AND CLOSING "OF BANK
   TEMPORARY ENTITIES
     EVERY CUSTOMER HAS A TIME.OF.ARRIVAL
       AND MAY BELONG TO THE QUEUE
     THE SYSTEM OWNS THE QUEUE
   DEFINE BUSY.TELLERS AND NO.OF.TELLERS AS INTEGER VARIABLES
   ACCUMULATE AVG.QUEUE.LENGTH AS THE AVERAGE OF N.QUEUE
   ACCUMULATE UTILIZATION AS THE AVERAGE OF BUSY.TELLERS
   TALLY MEAN.WAITING.TIME AS THE MEAN OF WAITING.TIME
   DEFINE WAITING.TIME AS A VARIABLE
   DEFINE MEAN.INTERARRIVAL.TIME AND MEAN.SERVICE.TIME AS VARIABLES
   END

MAIN
   READ MEAN.INTERARRIVAL.TIME AND MEAN.SERVICE.TIME
   READ NO.OF.TELLERS
   LET BUSY.TELLERS = 0
   SCHEDULE AN ARRIVAL IN EXPONENTIAL.F(MEAN.INTERARRIVAL.TIME, 1) MINUTES
   SCHEDULE A CLOSING IN 8 HOURS
START SIMULATION "BEGINNING OF SIMULATION RUN
   PRINT 4 LINES WITH TIME.V*HOURS.V, AVG.QUEUE.LENGTH,
   UTILIZATION NO.OF.TELLERS,MEAN.WAITING.TIME * HOURS.V * MINUTES.V
   THUS
        BANK CLOSED AFTER           *.*** HOURS
        AVERAGE QUEUE LENGTH        *.***
        UTILIZATION OF TELLERS      *.***
        AVERAGE WAITING TIME        *.*** MINUTES
END
```

```
EVENT ARRIVAL "OF CUSTOMER
   SCHEDULE AN ARRIVAL IN EXPONENTIAL.F(MEAN.INTERARRIVAL.TIME, 1) MINUTES
      IF BUSY.TELLERS = NO.OF.TELLERS,
         CREATE A CUSTOMER
      LET TIME.OF.ARRIVAL (CUSTOMER) = TIME.V
      FILE CUSTOMER IN QUEUE
ELSE
   LET WAITING.TIME = 0.0
   SCHEDULE AN END.OF.SERVICE IN EXPONENTIAL.F(MEAN.SERVICE.TIME, 2) MINUTES
   ADD 1 TO BUSY.TELLERS
ALWAYS
RETURN
END

EVENT END.OF.SERVICE "TO CUSTOMER
   IF QUEUE IS EMPTY,
SUBSTRACT 1 FROM BUSY.TELLERS
   ELSE
      REMOVE FIRST CUSTOMER FROM QUEUE
      LET WAITING.TIME = TIME.V - TIME.OF.ARRIVAL (CUSTOMER)
      DESTROY CUSTOMER
   SCHEDULE AN END.OF.SERVICE IN EXPONENTIAL.F(MEAN.SERVICE.TIME, 2) MINUTES
ALWAYS
RETURN
END

EVENT CLOSING "OF BANK
   CANCEL THE ARRIVAL
RETURN
END
```