כפול, הפוך וכפול

מאת: רוחמה אבן ומקסים ברוקהיימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

בתרגילים הראשונים שבהם עוסקים בתרגום לתבנית מספר, מציגים מספרים דו-ספרתיים ותלת ספרתיים וכו', בצורה:

$$10a + b$$

(וכו') $100a + 10b + c$

בעזרת תבניות אלה אפשר לפתור תרגילים העוסקים במספרים. בדרך-כלל אלה תרגילים די פשוטים. ננסה להראות כיצד ניתן להרחיב ולהעשיר נושא זה ולהוסיף לו מימדים של הכללה וחקירה. מורים יכולים לשאוב רעיונות מחומר זה ולעבדם עבור כתותיהם.

נתבונן בתרגילים הבאים:

$$13 \times 93 = 31 \times 39$$
$$36 \times 84 = 63 \times 48$$
$$23 \times 64 = 32 \times 46$$

רואים שכאשר משנים את סדר הספרות, מכפלת המספרים החדשים שווה למכפלת המספרים המקוריים.

מה משותף לשלושת התרגילים?

מכפלת 2 ספרות העשרות שווה למכפלת 2 ספרות היחידות:

$$1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$$
$$3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$$
$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

נשאלת השאלה, האם זהו תנאי הכרחי ומספיק לקיום השוויון.

ואמנם, שני מספרים דו-ספרתיים: $10a + b$ ו- $10m + n$ מקיימים:

$$(10a + b)(10m + n) = (10b + a)(10n + m)$$

אם ורק אם $am = bn$

ההוכחה מופיעה בספרים רבים, למשל (1), (2):

$$(10a + b)(10m + n) = (10b + a)(10n + m)$$
$$\Longleftrightarrow 100am + 10(an + bm) + bn = 100bn + 10(bm + an) + am$$
$$\Longleftrightarrow 100am + bn = 100bn + am$$
$$\Longleftrightarrow 100am - am = 100bn - bn$$
$$\Longleftrightarrow 99am = 99bn$$
$$\Longleftrightarrow am = bn$$

מכאן לא קשה למצוא את כל זוגות המספרים הדו-ספרתיים בעלי התכונה הנ"ל. ישנם הטרביאלים: מספרים ששתי ספרותיהם שוות או זוגות שבהם סדר הספרות במספר אחד, הפוך מזה שבמספר השני, ומלבדם יש 14 זוגות המקיימים את התנאי המבוקש.

טבעי שהסקרנות המתמטית תעודד להמשיך ולשאול האם קיימים זוגות מספרים תלת-ספרתיים שמכפלתם שווה למכפלת המספרים המתקבלים מהפיכת סדר הספרות.

נחפש דרך לבנות אותם.

$100a + 10c + b$ ו- $100m + 10p + n$ הם שני מספרים תלת-ספרתיים.

נחפש מהו התנאי לכך שיתקיים השוויון:

$$(100a + 10c + b)(100m + 10p + n) = (100b + 10c + a)(100n + 10p + m)$$

נפתח סוגריים, נכנס מחוברים ונקבל את השוויון:

$$10^4am + 10^3(ap + cm) + 10^2(an + cp + bm) + 10(cn + bp) + bn =$$
$$10^4bn + 10^3(bp + cn) + 10^2(bm + cp + an) + 10(cm + ap) + am$$

הערה: נסמן שוויון זה ב (i) וכך נתייחס אליו בהמשך.

<u>טענה:</u> שוויון זה שקול לכך שיתקיים:

$$am = bn$$

וגם $ap + cm = bp + cn$

<u>הוכחה:</u>

ברור שאם $am = bn$ ו- $ap + cm = bp + cn$ אז שוויון (i) מתקיים.

נוכיח שזהו גם תנאי הכרחי. כלומר:

שוויון (i) $\Longrightarrow$ $am = bn$ ו- $ap + cm = bp + cn$

בלי הגבלת הכלליות, אפשר להניח ש- $am \geq bn$
נחסר אגף אחד מאגף שני ונקבל את השוויון:

$$10^4\underbrace{(am-bn)}_{A} + 10^3\underbrace{(ap+cm-(bp+cn))}_{-B} + 10\underbrace{(bp+cn-(ap+cm))}_{B} + \underbrace{(bn-am)}_{-A} = 0$$

ע"י סימון הביטויים המתאימים ב A ו B נקבל:

$$10^4A - 10^3B + 10B - A = 0$$

כלומר, $9999A = 990B$

או $101A = 10B$

נסמן את השוויון האחרון ב- (ii).

מכיוון ש- 101 הינו מספר ראשוני, B צריך להתחלק ב- 101

נחפש חסם ל B:

$$B = bp + cn - ap - cm = p(b - a) + c(n - m)$$

לא יתכן ש $b > a$ וגם $n > m$, כי אחרת היה מתקיים $am < bn$
בניגוד להנחה שלנו. לכן: $b \leq a$ או $n \leq m$ ואז $b - a \leq 0$ או $n - m \leq 0$.
מכיוון ש- a, b, c, m, n, p הן ספרות מקבלים:

$$B = p(b - a) + c(n - m) \leq 9\cdot(9 - 1) = 72$$

$A \geq 0$ ומשוויון (ii) מקבלים שגם $B \geq 0$.

וקיבלנו: $0 \leq B \leq 72$

אבל B מתחלק ב- 101 ולכן $B = 0$. ומשוויון (ii) גם $A = 0$.

וקיבלנו את התנאי המבוקש:

$am - bn = 0$ ו- $ap + cm - (bp + cn) = 0$
או: $am = bn$ ו- $ap + cm = bp + cn$

בכיתה, מספיק אולי שהתלמידים יקבלו ששני השוויונות: $am = bn$ ו- $ap + cm = bp + cn$ הם תנאי מספיק לפתרון הבעיה. ולא יוכיחו שהם גם תנאי הכרחי. בכך ימצאו דרך לפתרון הבעיה אך לא יוכיחו שבדרך זו הם מוצאים את כל זוגות המספרים התלת-ספרתיים המקיימים את התנאי המבוקש.

נבדוק מה מקבלים משני השוויונות.

$am = bn$, כלומר: מכפלת 2 ספרות המאות שווה למכפלת 2 ספרות היחידות.

נשאר לבדוק מתי יתקיים השוויון השני:

$$ap + cm = bp + cn$$

$$ap - bp = cn - cm$$

$$p(a - b) = c(n - m)$$

$$p = \frac{c(n - m)}{a - b}$$

כדי למצוא פתרון של משוואה זו בשני הנעלמים (c ו p) מספיק למצוא פתרון אחד של p ו c ויתר הפתרונות יהיו מכפלות שלו במספר ממשי כלשהו.
נשתמש בכך כדי לפשט את הפתרון הדרוש לנו.

אם נבחר את c באופן הבא: $c = a - b$ אזי $p = n - m$

ואם: $c = b - a$ אזי $p = m - n$

מכיוון ש: $am = nb$, אם $a > b$ אז $n > m$

ואם $a < b$ אז $n < m$

לכן, אחת משתי האפשרויות נותנת לנו c ו p חיוביים, והשניה - שליליים.

$c = |a - b|$ ו $p = |m - n|$ מתאימים לאחת משתי האפשרויות ולכן מהווים פתרון לשוויון:

$$(100a + 10c + b)(100m + 10p + n) = (100b + 10c + a)(100n + 10p + m)$$

יתר הפתרונות הם מכפלות של הפתרון הנ"ל במספר ממשי כלשהו, בתנאי שהתוצאה היא מספר טבעי קטן מ 10.

לפי מה שהוכחנו, אפשר לצאת מזוגות מספרים דו-ספרתיים ולבנות מהם מספרים תלת-ספרתיים המקיימים את התנאי הדרוש.

<u>**דוגמאות:**</u>

א. מהזוג: $12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$

$|a - b| = 1 \qquad |n - m| = 2$

אפשר לבנות לפי השיטה שמצאנו את המספרים התלת-ספרתיים הבאים:

ערך מוחלט של הפרש 2 הספרות: $112 \cdot 422 = 211 \cdot 224$

כפל הספרה שמצאנו ב 0 : $102 \cdot 402 = 201 \cdot 204$

כפל הספרה שמצאנו ב 2 : $122 \cdot 442 = 221 \cdot 244$

כפל הספרה שמצאנו ב 3 : $132 \cdot 462 = 231 \cdot 264$

כפל הספרה שמצאנו ב 4 : $142 \cdot 482 = 241 \cdot 284$

ב. מהזוג: $12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$

$|n - m| = 4 \qquad |a - b| = 1$

נבנה את המספרים התלת-ספרתיים הבאים:

ערך מוחלט של הפרש 2 הספרות: $112 \cdot 844 = 211 \cdot 448$

כפל ב 0 של הספרה שהתקבלה: $102 \cdot 804 = 201 \cdot 408$

כפל ב 2 של הספרה שהתקבלה: $122 \cdot 884 = 221 \cdot 488$

ג. מהזוג: $14 \cdot 82 = 41 \cdot 28$

$|n - m| = 6 \qquad |a - b| = 3$

נוכל לבנות את המספרים הבאים:

ערך מוחלט של הפרש 2 הספרות: $134 \cdot 862 = 431 \cdot 268$

כפל הספרה שמצאנו ב 0 : $104 \cdot 802 = 401 \cdot 208$

כפל הספרה שמצאנו ב $\frac{1}{3}$: $114 \cdot 822 = 411 \cdot 228$

כפל הספרה שמצאנו ב $\frac{2}{3}$: $124 \cdot 842 = 421 \cdot 248$

כפל הספרה שמצאנו ב $\frac{4}{3}$: $144 \cdot 882 = 441 \cdot 288$

סה"כ יש 60 זוגות כאלה, מלבד הטרביאלים שבהם ספרת היחידות שווה לספרת המאות או שסדר הספרות במספר אחד הפוך מזה של המספר השני .

אפשר להמשיך ולשאול שאלות נוספות: מהו התנאי למקרה של מספרים בני 4 ספרות, 5 ספרות וכו'.

יש ספרות עשירה על בעיות כאלה. דוגמאות לכך הופיעו כבר בעבר ב"שבבים" (3) (4).

לואיס קרול (5) המציא כמה חידות שפתרונן דורש גם הוא עבודה עם תבניות מספר:

1. חידה

	דוגמא
א. בחר מספר בן 3 ספרות שונות	471
ב. הפוך את סדר הספרות	174
ג. מצא את ההפרש בין 2 המספרים	297
ד. הפוך את סדר הספרות	792
ה. מצא את סכום 2 המספרים האחרונים	1089

הוכח שהתוצאה 1089 מתקבלת לכל מספר תלת-ספרתי שנבחר בהתחלה. הסבר מדוע המספרים בשורה השלישית וברביעית מתחלקים תמיד ב 99.

2. חידה

א. בחר מספר בן 3 ספרות	471
ב. הפוך את סדר הספרות	174
ג. מצא את סכום 2 המספרים	645
ד. חסר פעמיים סכום הספרות של המספר שבחרת	24
ה. התוצאה היא	621
ו. חלק ב 9. קיבלת	69
ז. חסר שוב פעמיים סכום הספרות	24
ח. התוצאה	45
ט. חלק ב 9	5

י.	הוסף את הספרה האמצעית של המספר שבחרת	**דוגמא** 7
יא.	הסכום של 2 המספרים האחרונים	12

קיבלת את סכום הספרות של המספר שבחרת.
הוכח שתקבל את סכום הספרות לכל בחירה של מספר תלת-ספרתי.

ב"פרדס המספרים"(1) אפשר למצוא בעיות נוספות. למשל:
סכום של מספר דו-ספרתי ומספר הכתוב באותן ספרות בסדר הפוך נותן ריבוע.
מצא את כל המספרים המקיימים תנאי זה.

ספרות

1. מ. נחשון, בפרדס המספרים, הוצאת ספרי גדיש, ת"א, (1958).
2. אהרון מוראלי, הקסם שבמספרים, בהוצאת המכון להכשרת עו"ה והשתלמותם - ירושלים, המחלקה להשתלמות מורים מחוז הדרום, ביה"ס המחוזי להשתלמות מורים ב"ש, (1977).
3. יעקב גויסקי ומרדכי שורק, צמצום מהיר, שבבים תיק מס' 8.
4. עדנה אטקין, התרומה שבתמורה, שבבים תיק מס' 10.
5. Eperson, D.B., Puzzles, Pastimes and Problems, Mathematics in School, 2(2), March, 1973.