פתרון בעיה באמצעות הכללתה

מאת נצה הדר
המחלקה להוראה במדע ובטכנולוגיה, הטכניון, חיפה.

א. מבוא

מבחינה הגיונית לא קשה להשתכנע שתהליך הכללה ראוי שיהיה אחד המקובלים בתהליכי פתרון בעיות. שכן, אם מחפשים פתרון לבעיה כללית יותר מהמקורית, מתקבל פתרון הבעיה המקורית כמקרה פרטי ובנוסף לכך כמובן מתקבל מבט רחב יותר על תחום שלם של בעיות. יתרה מזאת, משנוסחה בעיה כללית יותר מהמקורית, ניתן לגשת לפתרונה על ידי בדיקת שורה של בעיות מקבילות לבעיה המקורית. חלק מהבעיות המקבילות עשוי להיות קל יותר לפתרון מהבעיה המקורית, ופתרונן עשוי להצביע על דרך הפתרון של הבעיה המקורית. חשיבותם של תהליכי ההכללה וההקבלה לחינוכו המתימטי של התלמיד נעוצה בשכיחותם בעבודתו של המתימטיקאי היוצר, וגם, ואולי בעיקר, בעצם היותם תהליכי חשיבה מתימטית שכיחים ביותר.

לפנינו דוגמא לבעיה שניתן לפתור אותה על ידי ניסוח של הכללתה, ופתרון של בעיות מקבילות למקורית, הנגזרות מהבעיה הכללית.

ב. הבעיה*

לסוחר היתה משקולת בת 40 ק"ג. כתוצאה מנפילתה, נשברה המשקולת לארבעה חלקים. מאז שימש כל חלק את הסוחר כמשקולת בת מספר שלם של קילוגרמים. הסוחר גילה כי באמצעות ארבעת החלקים הוא יכול לשקול במאזנים כל מטען שמשקלו שלם בין 1 ל-40 ק"ג. בני כמה ק"ג היו ארבעת החלקים?

נבהיר כי שקילה במאזנים מאפשרת לשים משקלות גם על כף המטען וגם על כף המשקלות. שקילה שבוצעה באמצעות איזון של מטען בן a ק"ג + משקולת בת b ק"ג בכף-המטען ע"י משקולת בת $c = a + b$ ק"ג בכף המשקלות תקרא שקילת-חיסור של b ק"ג מ-c ק"ג.

(ינסו נא הקוראים להקדיש זמן מה לפתרון הבעיה בטרם ימשיכו בקריאה.)

ג. רעיונות ראשוניים

כאשר מותירים את הבעיה לתלמידים לחיפוש פתרון נאחזים רובם בנתונים: 4 משקלות ו-40 ק"ג ואינם שוקלים את האפשרות להתחיל במספר אחר של משקלות או קילוגרמים. בין חיפושי הדרך השונים תמצא: נחוש ארבעת המשקלות ובדיקה (ואכזבה לרוב), ניסיון לרשום את כל הרביעיות של מספרים שלמים שסכומם 40 במגמה למצוא

---

*מתוך הספר H. Dörrie: 100 Great Problems of Elementary Mathematics
Dover, 1965, p.7

ע"י אלימינציה את הרביעיה הנכונה, קביעה מעוגנת בהוכחה כי אחת המשקלות חייבת להיות בת 1 ק"ג שאם לא כן אי אפשר יהיה לשקול 39 ק"ג, ועוד רעיונות שמאחורי רובם ככולם מסתתרת תת-בעיה פרטית יותר מהבעיה שיש לפתור אותה, אך קבועים בה המספרים: 4 משקלות ו-40 ק"ג. במלים אחרות, הפותר אינו מעז לשנות את הנתונים הכמותיים ובכך לנסח בעיות מקבילות לבעיה הנתונה, שלא לדבר על פריצה מהבעיה אל בעיה כללית יותר.

(אם לא עשית זאת עדיין, מומלץ להיאחז ברמזים הללו ולנסות לפתור את הבעיה. יש להניח שערכה הלימודי יעלה בעיניך בדרך זאת).

ד. הבעיה הכללית ובעיות מקבילות

למרבה העניין קל יותר לפתור את הבעיה המקורית ע"י ניסוח של בעיה כללית יותר, שהבעיה שלפנינו מהווה מקרה פרטי שלה. הבעיה הכללית יותר היא: "לכל n, קבע לפחות מערכת אחת של משקלות (מספרים שלמים), אשר באמצעותם ניתן לשקול במאזנים כל מטען שמשקלו שלם מ-1 ק"ג עד n ק"ג. דון במערכות השונות האפשריות לכל n. (מהי החסכונית ביותר, למשל?)"

מקרה פרטי של הבעיה הכללית מהווה הבעיה הבאה:

"קבע מערכות של משקלות (שלמים) שבאמצעותם אפשר לשקול במאזניים כל מטען שמשקלו בין 1 ק"ג ל 40 ק"ג. התוכל למצוא מערכת כזאת שיש בה בדיוק 4 משקלות שסכומם 40 ק"ג?" זאת האחרונה איננה אלא בעיה שקולה לבעיה המקורית שכן אין היא אלא ניסוח מחודש העוקף את האילוץ של 4 משקלות חלקיים. ניסוח חדש זה מרמז על האפשרות לקבל אולי בשלב ראשון פתרונות לבעיה דומה שבה מתקיים רק חלק מהתנאי הנדרש בבעיה המקורית, הלא הוא אפשרות השקילה של כל מטען בין 1 ק"ג לבין 40 ק"ג ע"י מערכת כלשהי של משקלות שלמים. מובן מאליו שקיום תנאי זה הכרחי, אף כי איננו מספיק, למציאת פתרון לבעיה המקורית.

יצוין כי גם בגישושים שהוזכרו לעיל כשכיחים בקרב תלמידים נעשו נסיונות לפתור תחילה בעיה שבה מתקיים חלק מהתנאי - ע"י קביעת רביעיות של משקלות שסכומם 40 ק"ג, ומתוך הנחה שבשלב שני צריך יהיה לברר אלו רביעיות מאפשרות שקילה של כל המטענים בין 1 ל 40 ק"ג. ההבדל בין דרך זאת לדרך המוצעת לעיל הוא שכאן הדרך איננה נגזרת מבעיה כללית יותר ועל כן הגישושים הם בנוסח של ניסוי וטעיה. בדרך המוצעת למעלה החיפושים יכולים להיעשות באופן שיטתי ואנליטי, כפי שיובהר להלן.

ה. פתרון הבעיה

לפתרונה של הבעיה הכללית יותר ניגש באופן אינדוקטיבי, היינו ע"י בדיקה שיטתית של מקרים פרטיים שלה.

המקרה הלא-טריביאלי הראשון הוא $n = 4$. בעזרת מערכת המשקלות $\{1, 3\}$ אפשר לשקול כל מטען בין 1 ל 4 ק"ג. שקילת מטען בן 2 ק"ג מתאפשרת ע"י שקילת חיסור של 1 ק"ג מ- 3 ק"ג. באמצעות המערכת $\{1, 3\}$ אי אפשר לשקול במאזניים מטען שמשקלו עולה על 4 ק"ג. עבור $n = 5$ לא קיימת מערכת של שתי משקלות אשר תענה על תנאי הבעיה שכן באמצעות $\{1, 4\}$ אי אפשר לשקול מטען בן 2 ק"ג לא בשקילה רגילה ולא בשקילת-חיסור;

באמצעות {3, 2} אי אפשר לשקול מטען בן 4 ק"ג; ובאמצעות מערכות שסכומן קטן מ 5 לא ניתן לשקול 5 ק"ג.

בכלל, קל לראות כי עבור $n > 4$ הכרחי לעבור למערכות של שלוש משקלות.

נשאלת השאלה - איזה משקולת יהיה נבון לצרף למערכת {3, 1} על מנת לענות על הבעיה הכללית עבור $n = 5$? מערכות כגון {3, 1, 1} {3, 2, 1} תענינה על הדרישה. השניה מהווה פתרון אפילו עבור $n = 6$.

נשאל את עצמנו מהו ה-n הגבוה ביותר שאליו ניתן להגיע ע"י מערכת של שלוש משקלות? אם נצרף ל {3 , 1} את המשקולת 5 - נוכל לשקול 5, 6, 7 ו 8 ק"ג באמצעות המערכת המורחבת. אך העובדה שיש בידינו שתי דרכים שונות לשקילת 4 ק"ג (וגם מטענים קטנים יותר) מעידה על כך שהמערכת היא "בזבזנית".

האם נוכל ליצור מערכת יעילה יותר שתשיג אותם הישגים, או אולי טובים מהם?

אם במקום משקולת של 5 ק"ג נצרף למערכת {3, 1} את המשקולת 6 או 7 או 8 ק"ג, עדיין תהיה בידינו מערכת "בזבזנית" במובן זה שיהיה לפחות משקל אחד שמדידתו אפשרית בשתי דרכים שונות. הדעת נותנת איפוא לבחון את האפשרות של צירוף משקולת בת 9 ק"ג. ואמנם המערכת {9, 3, 1} מאפשרת, בנוסף כמובן לשקילת כל המטענים בני 1, 2, 3, 4 ק"ג כפי שאפשרה זאת המערכת {3, 1}, גם שקילת המטענים 5, 6, 7, 8 אשר יישקלו באמצעות שקילת-חיסור של 1, 2, 3, 4 ק"ג בהתאמה מהמשקולת 9.

המערכת {9, 3, 1} מאפשרת איפוא שקילת כל המטענים שהמערכת {5, 3, 1} מאפשרת, אך יתרונה בכך שכל משקל ניתן למדידה בדרך אחת בדיוק. יתרון זה ניכר בכך שבנוסף למטענים בני 1-8 ק"ג, מאפשרת מערכת זאת גם שקילת מטענים בני 9-13 ק"ג, ע"י שקילת חיבור של 1, 2, 3, 4 ק"ג והמשקולת החדשה בת 9 ק"ג. כמובן שסכום שלוש המשקלות הוא המשקל המקסימלי הניתן לשקילה, היינו 13 ק"ג.

לבעיה הכללית מצאנו עד כה פתרונות עבור $n = 1, 2, \ldots, 13$. מהדיון עד כאן עולה כי עבור $n > 13$ נזדקק לארבע משקלות לפחות. נסמן את המערכת החדשה כך: {1, 3, 9, x}. שיקול דומה לזה שעשינו לעיל, מביא למסקנה שעל מנת שהמערכת המורחבת תהיה יעילה ככל האפשר, (היינו שתאפשר פתרון עבור ערך של n גדול ככל האפשר) המשקולת הנוספת, x, צריכה לאפשר שקילה של 1 - 13 ק"ג באותו אופן שהמערכת {1,3,9} מאפשרת, ומטענים שמשקלם 14 ק"ג ומעלה צריכים להישקל ע"י הפחתת 13 ק"ג ומטה מהמשקולת הנוספת x. היינו $x - 13 = 14$ על כן $x = 27$.

המשקולת הנוספת צריכה להיות איפוא בת 27 ק"ג, והמערכת {1,3,9,27} תאפשר בנוסף לשקילת המטענים בני 13 ק"ג גם שקילה של כל מטען שמשקלו בין 14 ל 40 ($= 27 + 13$) ק"ג. כבדרך אגב, פתרנו את הבעיה המקורית שהוצגה בסעיף ב'.

ו. <u>פתרון הבעיה הכללית</u>

בשלב זה פתרנו את הבעיה המקורית אך טרם פתרנו את הבעיה הכללית. בכל זאת, הטיפול במערכות הפרטיות היה מודרך ע"י שיקול דעת שקל להכלילו.

נניח שהמערכת {A,B,C...} מאפשרת שקילה במאזניים של כל מטען בין 1 ל-m ק"ג ע"י הצבת חלק או כל המשקלות על שתי כפות המאזניים בדרך אחת ויחידה. נטען כי הרחבת המערכת ע"י משקולת P כך ש- $P = m + m + 1$ מאפשרת שקילה (בדרך יחידה) של כל מטען בין 1 לבין $P + m$ ק"ג היינו בין 1 ל $3m + 1$ ק"ג. על מנת להוכיח

טענה זאת נסמן ב-M את משקלו של המטען. אם $0 < M <$ אזי לפי ההנחה יש בדיוק דרך אחת לשים משקלות מהמערכת המצומצמת $\{A,B,C...\}$ כדי לאזן את כפות המאזניים. אם $m + 1 \leq M \leq P$ ההפרש שבין P ל-M הוא לכל היותר m (מפני ש $P = 2m + 1$ ו-M הוא לפחות $m + 1$), על כן ניתן להרכיב את ההפרש הזה באופן יחיד ע"י המשקלות מהמערכת המצומצמת $\{A,B,C,...\}$. לפיכך ע"י שקילת-חיסור מ-P אפשר באופן יחיד לשקול את המטען באמצעות המערכת המרחבת. באופן דומה אם - $P + 1 \leq M \leq 3m + 1$ ההפרש בין M ל-P הוא לכל היותר m. הפרש זה ניתן להרכיב מהמערכת המצומצמת באופן יחיד. שקילת-חיבור של P אל ההפרש הזה תאזן את הכפות באמצעות המערכת המורחבת*.

הואיל ועבור $n \leq 40$ מצאנו פתרון לבעיה הכללית ניתן עכשיו באופן רקורסיבי לכל n טבעי לבנות מערכת משקלות שתעמוד בתנאי הבעיה הכללית. כך למשל עבור $n = 41$ נצא מהמערכת $\{1,3,9,27\}$ שמאפשרת שקילה שלכל מטען בין 1 ל 40 ונצרף אליה משקולת נוספת של 81 ק"ג. המערכת $\{1,3,9,27,81\}$ מאפשרת שקילת כל משקל בין 1 ל 41, ואף למעלה מזה. מערכת זאת היא פתרון עבור $n \leq 121$. עבור $n = 121$ היא הפתרון החסכוני והיעיל.

ז. <u>מלים אחדות לסיכום</u>

בספרו - כיצד פותרין?** - מציע ג' פויה שהפותר בעיות מתמטיות צריך לסגל לעצמו מערכת של שאלות, על מנת להעלותן בשלבים שונים של חיפוש פתרון לבעיה. בין השאלות הללו נמצא למשל: "התוכל להעלות בדעתך בעיה מעין-זו קרובה לה, שכיחה יותר? בעיה כללית יותר? בעיה פרטית יותר? בעיה מקבילה? היכול אתה לפתור חלק מן הבעיה? נסה לקיים רק חלק מן התנאי והתעלם מחלקו האחר...". מבלי להסתכן בגוזמה ניתן לאמר שרוב הבעיות המתמטיות עמהן מתמודד התלמיד במהלך לימודיו בבית הספר אינן מקנות התנסות בתהליכי החיפוש שפויה מזכיר. את רוב הבעיות ניתן לפתור בדרך ישירה כלומר תוך הצמדות אל מערכת הנתונים בשלמותה ומבלי להזדקק להכנסת שינויים בתנאי הבעיה המקורית לצורך איתור דרכי הפתרון. לעתים רחוקות, כאשר הבעיה מהווה אגוז קשה לפיצוח, יש צורך לנסח תחילה בעיה קרובה לה, פרטית יותר מהמקורית מתוך תקווה שפתרון מקרה או מקרים פרטיים יצביע על דרך לפתרון הבעיה כולה. יישום תהליך הפרטה כזה בפתרון בעיות שכיח בנושאים "קומבינטוריקה" ו"אינדוקציה מתימטית" יותר מאשר באחרים. את מערכת ההתנסויות של התלמיד בפתרון בעיות יש להעשיר לא רק בבעיות שפתרונבן נעשה ע"י הפרטה אלא גם ע"י בעיות שפתרונן עובר דרך פתרון של הכללות או של בעיות מקבילות ובעיות שקולות. הדגש הוא על תהליך <u>מציאת</u> הפתרון ולא על הפתרון שמתקבל לבסוף. ברור שבעיית המשקלות כשלעצמה אין לה חשיבות גדולה יותר מאשר יש לכל בעיה אחרת. אך בהדגימה תהליכי פתרון לא שגרתיים יש עמה תרומה לקידום החשיבה המתימטית של המתנסה בה, לפחות מנקודת ראות של הגדלת הרפרטואר של איסטרטגיות של פתרון בעיות.

* דיון רחב יותר בבעית כל המערכות האפשריות של משקלות שבאמצעותם אפשר לשקול מטענים בני 1 עד n ק"ג נמצאו בכרך 21 של Quarterly Journal of Mathematics משנת 1886 במאמר מאת MacMahon.

**ג.פויה - כיצד פותרין? - (מאנגלית א. בן-נחום)הוצאת "אוצר המורה"1961(עמ'4).