בסיסים שליליים

מאת: רות אזור ומקסים ברוקהיימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

נושא שיטות הספירה בבסיסים שונים הינו אחד הנושאים הראשונים בהם התלמיד נתקל בעת לימודיו בחטיבת הביניים. הלימוד מצטמצם לדיון בבסיסי ספירה של מספרים שלמים חיוביים. במאמר זה מוצגת שיטת ספירה, כאשר בסיס הספירה הוא מספר שלם שלילי. נניח $r < -1$ שלם, אזי ניתן להציג כל מספר שלם באמצעות r ע"י הבטוי

$$a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

כאשר הספרות a_i לקוחות מתוך המספרים $0, 1, 2, \dots, -(r+1)$

נשים לב כי $r^k > 0$ עבור k זוגי

$r^k < 0$ עבור k אי זוגי

הערה: בהמשך, אם לא מצוין הבסיס, פרושו שהמספר רשום בבסיס עשר.

<u>דוגמאות:</u>

נבחר $r = -4$ הסדרה היסודית: $(-4)^0, (-4)^1, (-4)^2, (-4)^3 \dots$

או: $1, -4, 16, -64 \dots$

הספרות: $3, 2, 1, 0$.

א. $321_{(-4)} = 3\cdot(-4)^2 + 2\cdot(-4)^1 + 1\cdot(-4)^0 = 3\cdot16 - 8 + 1 = 41$

ב. $1321_{(-4)} = 1\cdot(-4)^3 + 3\cdot(-4)^2 + 2\cdot(-4)^1 + 1\cdot(-4)^0$

$= -64 + 48 - 8 + 1 = -23$

מתוך דוגמאות ניתן להבחין בתכונה חשובה המנוסחת במשפט הבא:

<u>משפט:</u> מספר x הוא חיובי אם ורק אם מספר ספרותיו בבסיס שלילי r הינו אי זוגי.

<u>הוכחה:</u> (א) נוכיח תחילה בכוון אחד -
אם מספר ספרותיו של המספר x בבסיס שלילי r הינו אי זוגי, אזי x חיובי.

הוכחת (א). נניח כי מספר הספרות בבסיס הוא $2n + 1$ כלומר איברי הסדרה היסודית הם: $r^0, r^1, \dots, r^{2n}$

נפריד בין המעריכים הזוגיים לאי זוגיים. המקרה "הגרוע" ביותר יקרה כאשר איברי הסדרה היסודית <u>החיוביים</u> יקבלו משקל <u>מינימלי</u> ואיברי הסדרה <u>השליליים</u> יקבלו משקל <u>מקסימלי</u>.

כלומר יתקבל:

מעריכים זוגיים

איברי הסדרה היסודית:

$$r^{2n} \;,\; \dots \;,\; r^4 \;,\; r^2 \;,\; r^0$$

<u>לקבלת תרומה חיובית מינימלית</u>

נבחר ספרה אפס עבור $r^{2n-2} , \dots , r^0$

והספרה 1 עבור r^{2n}.

כלומר:

$$1\cdot r^{2n} + 0\cdot r^{2n-2} + \dots + 0\cdot r^0 = r^{2n}$$

מעריכים אי זוגיים

איברי הסדרה היסודית:

$$r^{2n-1} \;,\; \dots \;,\; r^5 \;,\; r^3 \;,\; r^1$$

<u>לקבלת תרומה שלילית מקסימלית</u>

נבחר את הספרה $-(r + 1)$

עבור $r^{2n-1} , \dots , r^3 , r^1$

יתקבל הבטוי:

$$-(r + 1)r^{2n-1} - \dots - (r + 1)\, r^1$$

$$= -(r + 1)\, \underbrace{(r^{2n-1} + \dots + r^1)}_{\text{טור הנדסי עם מנה } r^2}$$

$$= \frac{-(r + 1)\, r\, (r^{2n} - 1)}{r^2 - 1}$$

$$= \frac{-(r + 1)\, r(r^{2n} - 1)}{(r + 1)(r - 1)}$$

$$= -\frac{r\,(r^{2n} - 1)}{r - 1}$$

אם כך ערכו של המספר x הוא:

$$r^{2n} - \frac{r(r^{2n} - 1)}{r - 1} = \frac{r^{2n+1} - r^{2n} - r^{2n+1} + r}{r - 1} = \frac{-r^{2n} + r}{r - 1}$$

נבדוק את סימנו של הבטוי האחרון

$r < 0$, $-r^{2n} < 0 \Leftarrow$ <u>המונה</u> שלילי.

$r < -1$ (לפי הנחה בתחילת המאמר) $r - 1 < 0$ כלומר <u>המכנה</u> שלילי ולכן הבטוי הנ"ל, כלומר המספר x חיובי.

(ב) כדי להוכיח את הכוון השני:
אם x חיובי אזי מספר ספרותיו בבסיס שלילי r הוא אי זוגי.
נוכיח משפט אחר שקול למשפט האחרון והוא:
אם מספר ספרותיו של x בבסיס שלילי r הינו זוגי, אזי x שלילי (ראה נספח).

ההוכחה דומה להוכחת חלק (א), אלא שכעת יש לתת משקל <u>מקסימלי</u> לאיברי הסדרה היסודית <u>החיוביים</u>, ומשקל <u>מינימלי</u> לאיברי הסדרה היסודית <u>השליליים</u>.

נראה כעת כיצד לתרגם מספרים מבסיס שלילי לבסיס עשר ולהיפך.
התרגום מבסיס שלילי לבסיס עשר הוא פשוט כפי שראינו בדוגמאות בתחילת המאמר.
כיצד לתרגם בכוון ההפוך?

$$31 = \square_{-4}$$

כדי לענות על השאלה האחרונה, נבצע חילוק חוזר ב-(4-), בדומה לתהליך המתבצע בתרגום לבסיס חיובי.

	המנה	השארית	בדיקה
$31:(-4)$	$= (-7)$	3	$31 = (-4)\cdot(-7) + 3$
$(-7):(-4)$	$= 2$	1	$-7 = (-4)\cdot 2 + 1$
$2:(-4)$	$= 0$	2	$2 = (-4)\cdot 0 + 2$

<u>הערות</u>: א. השאריות חיוביות

ב. התהליך סופי ומסתיים כאשר המנה היא אפס.

<u>טענה</u>: המספר בבסיס (4-) מורכב מהשאריות בכיוון החץ, כלומר: 213.

אפשר לבדוק שאמנם $213_{-4} = 31$, אך ננסה לראות כיצד התהליך הנ"ל מוביל אמנם לתרגום המבוקש. לשם כך נשתמש בתרגילי הבדיקה שבוצעו בצד ימין במקביל לחילוק לעיל.

$$\begin{aligned} 31 &= (-4)\cdot(-7) + \mathbf{3} \\ &= (-4)\cdot[(-4)\cdot 2 + \mathbf{1}] + \mathbf{3} \\ &= (-4)\cdot[(-4)((-4)\cdot 0 + \mathbf{2}) + \mathbf{1}] + \mathbf{3} \\ &= (-4)\cdot[0\cdot(-4)^2 + \mathbf{2}\cdot(-4) + \mathbf{1}] + \mathbf{3} \\ &= 0\cdot(-4)^3 + \mathbf{2}\cdot(-4)^2 + \mathbf{1}\cdot(-4) + \mathbf{3} \end{aligned}$$

ואכן מתקבל $31 = 213_{-4}$

נראה דוגמה נוספת $-70 = \square_{-4}$

	מנה	שארית
$(-70):(-4)$	$= 18$	2
$18:(-4)$	$=(-4)$	2
$(-4):(-4)$	$= 1$	0
$1:(-4)$	$= 0$	1

ולכן $-70 = 1022_{-4}$

באופן כללי, אם נרצה לתרגם $x_{\text{עשר}}$ לבסיס r שלילי, נבצע את התהליך הבא:

בדיקה		המנה	השארית
$x = b_0 \cdot r + a_0$	$x : r =$	b_0	a_0
$b_0 = b_1 \cdot r + a_1$	$b_0 : r =$	b_1	a_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$b_{k-2} = b_{k-1} \cdot r + a_{k-1}$	$b_{k-2} : r =$	b_{k-1}	a_{k-1}
$b_{k-1} = 0 \cdot r + a_k$	$b_{k-1} : r =$	0	a_k

כל השאריות a_i חיוביות והתהליך מסתיים כאשר המנה היא אפס.

המספר בבסיס r הוא $(a_k \dots a_1 a_0)$.

וזאת מכיוון, שע"י בדיקה חוזרת מתקבל:

$$\begin{aligned}
x &= b_0 \cdot r + a_0 \\
&= (b_1 \cdot r + a_1)r + a_0 \\
&= [(b_2 \cdot r + a_2)r + a_1]r + a_0 \\
&= [((b_3 \cdot r + a_3)r + a_2)r + a_1]r + a_0 \\
&= \dots\dots\dots \\
&= [((0 \cdot r + a_k)r + a_{k-1})r \dots]r + a_0 \\
&= 0 \cdot r^{k+1} + a_k r^k + \dots + a_0 \\
&= a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \dots + a_0
\end{aligned}$$

עפ"י השיטה המוצעת לעיל, כיוון שהתהליך סופי, מתקבל <u>שכל</u> מספר ניתן להצגה בבסיס r.

נשאלת השאלה: האם ההצגה בבסיס r יחידה?

כדי לענות על שאלה זו, נוכיח את <u>משפט היחידות</u>:

יהי $r < -1$ שלם. אזי כל מספר x ניתן להצגה אחת ויחידה בבסיס r מהצורה.

$$x = c_0 + c_1 r + \dots + c_n r^n$$

$$0 \leqslant c_i < |r| \quad \text{עבור} \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

הוכחת משפט היחידות

נניח בדרך השלילה, כי ל-x שתי הצגות שונות בבסיס r.

$x = a_0 + a_1 r + \dots + a_k r^k \qquad 0 \leqslant a_i < |r| \qquad 0 \leqslant i \leqslant k$

$x = b_0 + b_1 r + \dots + a_n r^n \qquad 0 \leqslant b_i < |r| \qquad 0 \leqslant j \leqslant n$

ע"י חיסור שתי המשוואות נקבל:

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)r + \dots + (a_s - b_s)r^s \qquad (1)$$

לשם נוחיות נסמן $a_i - b_i = e_i \qquad 0 \leqslant i \leqslant s$

e_i מקיימים $0 \leqslant |e_i| < |r|$

מכיוון ששתי ההצגות שונות, קיים מעריך מקסימלי m, עבורו $e_m \neq 0$. אפשר להניח, ללא הגבלת הכלליות, כי $e_m > 0$ (אחרת נחליף את סדר החיסור). לכן נוכל לרשום את (1) בצורה

$$e_0 + e_1 r + \dots + e_m r^m = 0 \qquad (2)$$

נסמן: $A = e_0 + e_1 r + \dots + e_m r^m$

נוכיח שאם <u>$e_m > 0$</u> (ולא חשוב סימנם של e_i האחרים), המספר A הוא חיובי או שלילי, אך לא אפס כרשום ב- (2). כלומר, נקבל <u>סתירה</u> להנחת השלילה. (עקרון ההוכחה דומה לזה של המשפט הראשון).

נפריד את ההוכחה לשני חלקים:

(א) אם מספר ספרותיו של A <u>אי זוגי</u> ו- $e_m > 0$ אז A <u>חיובי</u>.

<u>הוכחת (א)</u>

אם מספר הספרות אי זוגי, m זוגי ולכן מהצורה $m = 2t$ והסדרה היסודית המתאימה

$$r^0, r^1, r^2, \dots, r^{2t}$$

הספרה המתאימה ל- r^{2t} (e_m) חיובית.

המקרה "הגרוע" ביותר יהיה כאשר:

הספרה המתאימה ל-r^{2t} תהיה 1.

המקדם המתאים לכל r^i , i זוגי, יהיה $(r + 1)$

המקדם המתאים לכל r^j , j אי זוגי יהיה $-(r + 1)$

(תזכורת: $r + 1 < 0 \ , \ -(r + 1) > 0$

$|r + 1|$ הערך המוחלט המקסימלי ש-e_i יכול לקבל).

כלומר, פרט ל- $r^{2t} > 0$, כל יתר האברים ב-A שליליים ובכל זאת נוכיח כי $A > 0$.

$$A = (r+1)r^0 - (r+1)r^1 + (r+1)r^2 - (r+1)r^3 + \ldots - (r+1)r^{2t-1} + r^{2t}$$

$$= (r+1)\,(1 - r + r^2 - r^3 + \ldots - r^{2t-1}) + r^{2t}$$

$(1 - r + r^2 - r^3 + \ldots - r^{2t-1})$ טור הנדסי בעל $2t$ איברים עם מנה קבועה $(-r)$

$$= (r+1)\cdot\frac{1\cdot[(-r)^{2t} - 1]}{-r-1} + r^{2t}$$

$$= (r+1)\cdot\frac{(r^{2t} - 1)}{-(r+1)} + r^{2t}$$

$$= -(r^{2t} - 1) + r^{2t}$$

$$= 1$$

ולכן $A > 0$.

(ב) באופן דומה, נוכיח שאם מספר ספרותיו של A <u>זוגי</u> ו- $e_m > 0$, אזי A <u>שלילי</u>

(אם נתייחס כאן למקרה ה"גרוע" ביותר נקבל $A = -1$).

לסיכום, ההנחה כי ל-x שתי הצגות שונות מביאה אותנו לסתירה ולכן לכל מספר x הצגה אחת ויחידה בבסיס r.

כמו בכל שיטות הספירה האחרות, גם כאן אפשר לבצע פעולות חשבון בין המספרים.

לפני שנעבור על הפעולות השונות, נשים לב לעובדות הבאות:

(א) כדי להמנע מתרגומי ביניים תוך כדי בצוע הפעולה, נשים לב לספירה בבסיס השלילי.

במקרה שלנו $r = -4$

ולכן נספור בצורה הבאה: $130_{-4} = 4$

בסיס עשר	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....
בסיס -4	1	2	3	130	131	132	133	120	121	122	....

שים לב להשתנות המספרים בבסיס השלילי, דבר המקשה על קביעת סדר הגודל בין שני מספרים.

(ב) $13_{-4} = -1$

ולכן $0 = 1 + 13_{-4}$

(כמו כן, מתקיים $0 = 2 + 12_{-4}$; $0 = 3 + 11_{-4}$)

חיבור

דוגמה: $r = -4$ (לא נציין ליד המספרים את הבסיס (-4))

$$\begin{array}{r} 132 \\ +\underline{213} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 131 & = 2 + 3 \\ +\ 130 & = 3 + 1 \\ \underline{3} & = 1 + 2 \\ 331 & \end{array}$$

הסבר:

בכל שורה רשום סכום המספרים בעמודה המתאימה (היא רשומה גם במאוזן ליד התוצאה)

בכל סכימה חלקית אפשר להעזר בספירה בהערה (א) לעיל.

עם כל עמודה נוספת, זז הסכום מקום אחד שמאלה. בסכימה הסופית מתקבל בשתי העמודות השמאליות

$$\begin{array}{r} 1 \\ +13 \\ \underline{3} \end{array}$$

מנצלים את העובדה ש- $0 = 1 + 13_{-4}$ ולכן $3 = 3 + (1 + 13)$

דוגמה נוספת:

$$\begin{array}{r} 231 \\ +\ 321 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2 & = 1 + 1 \\ +\ 131 & = 3 + 2 \\ 131 & = 2 + 3 \\ \hline 13012 & \end{array}$$

הסבר: למעשה יש להסביר רק את הסכימה הסופית ב-3 העמודות האחרונות $\begin{array}{r} 13 \\ +\ 131 \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{r} 13 \\ +\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

ולכן:

$$\begin{array}{r} \boxed{13} \\ +\ 13\boxed{1} \\ \hline 130 \end{array}$$

כפל: $r = -4$

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 132 \\ \hline 132 \\ 130\ \\ 2\ \ \\ +\ 121\ \\ 132\ \ \\ 3\ \ \ \\ 123\ \ \\ \hline \end{array}$$

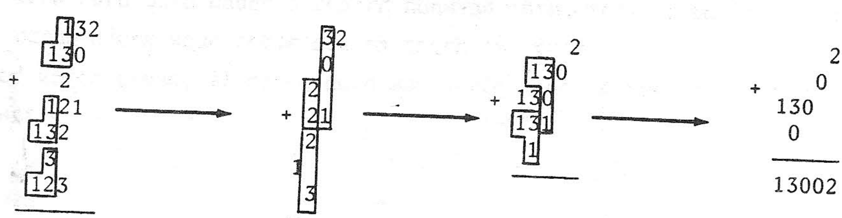
$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 123 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 123 \\ \times\ 1 \\ \hline \end{array}$$

שים לב להזזות.

לשם ביצוע החיבור, ננצל שוב את העובדות:

$2 + 3 = 131_{-4}$ $\quad$ $2 + 2 = 130_{-4}$ $\quad$ $12_{-4} + 2 = 0$ $\quad$ $13_{-4} + 1 = 0$

בכל מקום אפשרי נבצע את ההצבות הנ"ל:



מכיוון שההצבות קלות אפשר לבצען בע"פ ואין צורך ברישום.

פעולת החיסור מתבצעת בצורה דומה לפעולת החיבור, אך פעולת החילוק קשה יותר וכל המעונין ינסה להתמודד איתה.

ולסיום, נשאל את השאלה הבאה:

בבסיסים חיוביים בלבד, אי אפשר למצוא שתי הצגות זהות, בבסיסים שונים, לאותו מספר. האם כעת, כאשר לרשותנו עומדים בסיסים חיוביים ושליליים, נוכל למצוא דוגמה (או יותר) לשתי הצגות זהות, בבסיסים שונים, עבור אותו מספר?

$$x = (a_k a_{k-1} \ldots a_0)_r = (a_k a_{k-1} \ldots a_0)_s$$

$$r \neq s$$

<u>נספח</u>

נביא כאן הצדקה לדרך בה הוכח המשפט:

"אם x חיובי, אזי מספר ספרותיו בבסיס שלילי r הוא אי זוגי".

נסמן: A = "x חיובי"

B = "מספר ספרותיו של x אי זוגי".

כלומר היה עלינו להוכיח: $B \Longleftarrow A$.

לעומת זאת הוכחנו את המשפט:

"אם מספר ספרותיו של מספר x בבסיס שלילי r הינו זוגי, אזי x שלילי".

נבטא את המשפט האחרון באמצעות A , B שהוגדרו לעיל.

"מספר ספרותיו של x זוגי" הוא השלילה של B ומקובל לסמן $\sim B$.

"x שלילי" הוא השלילה של A ולכן יסומן $\sim A$.

כלומר, במקום להוכיח: $B \Longleftarrow A$

הוכחנו: $\sim A \Longleftarrow \sim B$

או במילים אחרות: במקום להוכיח משפט, הוכחנו את השלילה של ההפוך לו.
האם זה תמיד נכון?

לפני שנענה על כך, נראה מספר דוגמאות:

(א) נגדיר:

A : "היום יום חמישי" $\sim A$: "היום לא יום חמישי"

B : "מחר יום שישי" $\sim B$: "מחר לא יום שישי"

המשפט: $B \Longleftarrow A$ (אם היום יום חמישי, מחר יום שישי)
הוא משפט נכון.

האם גם המשפט: $\sim A \Longleftarrow \sim B$ נכון?
נבדוק את משמעותו:

"אם מחר לא יום שישי, היום לא יום חמישי" ואכן זה משפט נכון.

(ב) נגדיר:

A = "התוצאה היא 2" $\sim A$: "התוצאה אינה 2"

B = "התוצאה זוגית" $\sim B$: "התוצאה אי זוגית"

$B \Longleftarrow A$ משפט נכון.

וגם $\sim A \Longleftarrow \sim B$ משפט נכון.

נכליל את הדוגמאות הנ"ל במשפט:

אם המשפט (1): $B \Longleftarrow A$ (קיומו של A גורר קיומו של B) נכון.

אזי גם המשפט (2): $\sim A \Longleftarrow \sim B$ (אי קיומו של B גורר אי קיומו של A) נכון.

הוכחה

נניח בדרך השלילה כי משפט (2) אינו נכון. כלומר, נתון $\sim B \Rightarrow A$ (B אינו קיים) ומתקיים $\sim B \Leftarrow A$, כלומר, אי קיומו של B גורר את קיומו של A, אך לפי משפט (1) אם A קיים אזי B קיים וזה סותר את הנחת השלילה.

בסכום: במקום להוכיח משפט, נוכל תמיד להוכיח את השלילה של ההפוך לו. שני משפטים כאלו נקראים משפטים שקולים.

הערה: שים לב, כי אם $A \Rightarrow B$ משפט נכון, לא בהכרח המשפט $\sim A \Rightarrow \sim B$ נכון (למרות שיש נטיה לחשוב כך).

בדוגמה (א) לעיל, $\sim A \Rightarrow \sim B$ (אם היום לא יום חמישי, אז מחר לא יום שישי) הוא משפט נכון.

לעומת זאת, בדוגמה (ב), $\sim A \Rightarrow \sim B$ (אם התוצאה אינה 2, אזי התוצאה אי זוגית), אינו משפט נכון.