שבבי שבבים

תופעות אריתמטיות מעניינות

מאת מחמד גבארין (אבו סאמח)
תיכון אום אל פחם.

א. באחד משעורי המתמטיקה הצגתי את השאלה: מה היא התכונה המאפיינת את המספרים בני 5 ספרות המתחלקים ל-41 ללא שארית?

תשובתו של אחד התלמידים, מחובבי המתמטיקה, היתה: ניקח מספר בעל חמש ספרות המתחלק בלי שארית ל-41, למשל 15498, נעביר את 8 לראש המספר ונקבל 81549 וכשנחלק מספר זה ל-41 הרי

$$81549 : 41 = 1989$$

נמשיך ונעביר את ה-9 לראש המספר החדש ונקבל 98154. גם מספר זה מתחלק ל-41

$$98154 : 41 = 2394$$

וכשנמשיך את התהליך ונעביר את ה-4 לראש המספר החדש נקבל שוב מספר שמתחלק ל-41

$$49815 : 41 = 1215$$

וכך יהיה גם כשנעשה את הנסיון האחרון ונעביר את ה-5

$$54981 : 41 = 1341$$

תכונה זו מאפיינת את כל המספרים בני 5 ספרות המתחלקים ל-41.

התלמיד סיים את תשובתו בהציגו את השאלה:

מהו מספרם של המספרים בני 5 ספרות המתחלקים ל-41?

ב. <u>מקרה מוזר בכפל</u>

בפעולת הכפל $4396 = 157 \times 28$ מופיעות כל 9 הספרות. המעניין הוא שישנם רק 9 מקרים דומים בלבד:

$$4 \times 1963 = 7852$$
$$4 \times 1738 = 6952$$
$$12 \times 483 = 5796$$
$$42 \times 138 = 5796$$
$$18 \times 297 = 5346$$
$$39 \times 186 = 7254$$
$$27 \times 198 = 5346$$
$$28 \times 157 = 4396$$
$$48 \times 159 = 7632$$

ג. <u>המספר המוזר 9</u>

נכפול את המספר 9 בכל אחת מהספרות ונציג את התוצאה בצורה הבאה:

9 × 1 = 9

9 × 2 = - 18

9 × 3 = - - - 27

9 × 4 = - - - - 36

9 × 5 = - - - - - - 45

9 × 6 = - - - - - - - - 54

9 × 7 = - - - - - - - - - - 63

9 × 8 = - - - - - - - - - - - - 72

9 × 9 = - - - - - - - - - - - - - - 81

נסכם ונקבל

91827364554637281

נחלק את המספר הזה ב-9 ונקבל

10203040506070809

כלומר מספר המורכב מכל הספרות כשאפס מפריד בין אחת לשניה.

ד. <u>רק 2 ...</u>

כתוב את 9 הספרות הראשונות בזו אחר זו לפי סדר עולה וחבר את אותן הספרות בסדר יורד. חזור על פעולה זו פעם נוספת וחבר את הספרה 2 והנה מה שתקבלו:

$$123456789 + 987654321 + 123456789 + 987654321 + 2 = 2222222222$$

מתמטיקה בהנאה

מאת מוריס בהט (בחבוט), בית שאן.

"מתמטיקה בהנאה": זהו שמו של העלון המתימטי בבית-ספרנו (מקיף דתי, ב"ש). המדובר בעלון-קיר (לוח עץ צבעוני מורכב מצורות גאומטריות אחדות) הקבוע באחד הכתלים. צמודה לקיר, ליד הלוח, תיבה נאה אשר לתוכה הכניסו התלמידים חומר לעלון.

המדורים הקבועים הם:

<u>פסיפס - בראי העתונות:</u> לקט קטנים מהעתונות היומית בנושאים מתמטיים.

<u>מתולדות המתמטיקה:</u> תולדות חיים של אישים מפורסמים ותורתם המתמטית (אפטלון, פיתגורס...). התפתחותם של פרקים מתמטיים שונים (התפתחות המספרים האי רציונליים וכדי').

<u>נושאים מתמטיים מעניינים:</u> נושאים מעניינים בתחומי המתמטיקה, בפרט תופעות אריתמטיות מיוחדות. (תכונות המספר 9, מספרים - כהפרש רבועים, וכדי').

<u>בעיות החודש:</u> מדי ראש חודש פורסמו בעיות אחדות: שעשועים מתמטיים, חידות הגיון, רבועי קסם וכדי'. את אלה נתבקשו התלמידים לפתור במשך החודש.

<u>פותרים וזוכים:</u> במדור זה פורסמו שמות התלמידים שפתרו נכון את בעיות החודש והזוכים מביניהם בפרסים.
הפרסים היו: עתונים, כלי שרטוט, ספרים ומשחקים מתמטיים, בצירוף מכתב אישי לזוכה.
כן זכו בפרסים התלמידים אשר חומר מפרי עטם פורסם.

בסוף שנה"ל, הופיע עלון בכתב שנשא אותו שם ("מתמטיקה בהנאה") וכלל שני חלקים: בחלק האחד, מבחר כתבות ומאמרים, חידות ובעיות שפורסמו במשך השנה בעלון הקיר. בחלק השני, דפי עבודה - אחד לכל שכבת כתות - שהכילו שאלות בכל הנושאים שנלמדו, עליהן נתבקשו התלמידים להשיב בימי חופשת הקיץ הארוכה.
כל אחד נדרש לפתור גם דפי עבודה לכתות קודמות. כך, תלמיד בכתה י', למשל, התיחס ל-4 דפי עבודה של הכתות ז', ח', ט', י'. חלק זה היווה מעין "חוברת עבודה לחופש" (בשוק לא קיימת חוברת מתאימה כזו) ושימש לחזרה על חומר הלימודים משנים קודמות.

חשוב לציין, כי המטרה הראשית של עלון זה, הן החדשי והן השנתי, לא היתה שיפור הכשרים וההישגים המתמטיים כשלעצמם, אלא בעקר שנוי העמדה השלילית מצד התלמידים כלפי המקצוע מתמטיקה. יחס זה אופיני לתלמידים רבים בכל מקום, בפרט בבתי ספר המורכבים מאוכלוסיות טעונות-טפוח.

להלן דוגמאות אחדות של חידות ושאלות מהמדור "בעיות החודש":

1. באחד מישובי הנגב צריכים להתקין צנור מים בקוטר 12 ס"מ.
זלמנאי הפועל לא מצא צנור כזה, לכן הניח במקומו שני צנורות בקוטר 6 ס"מ כל אחד, בהנחה כי גם כך תזרום אותה כמות מים. מנהל העבודה התנגד וטען כי יש הבדל בין שני המקרים.
מי צדק ומדוע?

2. בתרגיל הכפל הבא, מיצגות האותיות ספרות שונות. מצא ערכה של כל אות והצב להלן בהתאם (בשורה למטה.)

ר נ מ
× נ ר
ד ח ש
נ ד ר
3408

אם תציב נכון - תקבל אימרה נאה.

האימרה:

154כ4ס   א 8 2   1 2 ב י 1   ב 5 1 6 ה

3. השתמש בספרה 8, שמונה פעמים, בכל צורה ובכל פעולת חשבון שתרצה, כך שתתקבל התוצאה: 1000

4. א. אילו שני מספרים טבעיים נוכל לכפול זה בזה, ומכפלתם תהיה 7?
ב. מצא שני מס' טבעיים, אשר סכומם שווה למכפלתם.
ג. מצא שני מס' טבעיים, אשר סכומם גדול ממכפלתם.
ד. מצא שני מס' טבעיים, אשר סכומם גדול כפליים ממכפלתם.
ה. מצא שלושה מס' טבעיים, אשר סכומם שווה למכפלתם.

5. מצא את ערכן המספרי של האותיות בתרגילי החבור הבאים:

א.
$$\begin{array}{r} XX \\ +\ YY \\ \hline TYT \end{array}$$

ב.
$$\begin{array}{r} MN \\ +\ NP \\ \hline NPN \end{array}$$

מניית הרציונלים

עובד ע"י עדנה אטקין
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

הדרך המקובלת להוכחה שקבוצת המספרים הרציונלים היא קבוצה בת-מניה היא להראות שקבוצה זו אקוילנטית לקבוצת המספרים הטבעיים.
לצורך זה ניתן לסדר את כל הרציונלים, $\frac{m}{n}$, כך שיתאימו באופן חד-חד-ערכי למספרים הטבעיים באופן הבא:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \cdots$$

$$\frac{2}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{2}{5} \cdots$$

$$\frac{3}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{3}{4} \cdots$$

$$\frac{4}{1} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{4}{3} \cdots$$

$$\frac{5}{1} \quad \frac{5}{2} \cdots$$

$$\frac{6}{1} \cdots$$

כאשר בשורה הראשונה מופיעים המספרים שמוניהם 1, בשניה אלו שמוניהם 2 וכו' ובכל שורה המכנים מסודרים בסדר עולה. כשעוברים את השברים על-פי המסומן על-ידי החיצים, כלומר את המספרים $\frac{m}{n}$ עבור $m + n = 2$ (המספר $\frac{1}{1}$), אחר-כך את אלו עבורם $m + n = 3$ ($\frac{1}{2}$ ו $\frac{2}{1}$) וכך הלאה, ולאורך דרך זו מוחקים את השברים שהופיעו כבר קודם בצורה מצומצמת, הרי נקבל את סדרת הרציונלים החיוביים. לכל איבר בסדרה מתאים באופן חד-חד-ערכי מספר טבעי המציין את מקומו בסדרה. לשיטה זו חסרון אחד והוא שאין זה קל למצוא מספר מסויים בסדרה או לומר היכן מקומו של מספר רציונלי כלשהו ללא כתיבת כל סדרת המספרים שלפניו.

דרך אחרת המקלה על בעיה זו הצעה על-ידי תלמיד מבית-ספר באנגליה:
תחילה יש להגדיר התאמה חד-חד-ערכית בין השלמים החיוביים, α , והשלמים השונים מאפס, β:

$$\beta = (-1)^{\alpha + 1}\left[\frac{1}{2}(\alpha + 1)\right]$$

כאשר הסימן [ ] פרושו שיש לקחת את החלק השלם של המספר המתקבל.
אבריה הראשונים של התאמה זו יהיו:

α	1	2	3	4	5	6	. . .	$2i - 1$	$2i$	. . .
β	1	-1	2	-2	3	-3	. . .	i	$-i$	. . .

בעזרת התאמה זו ניתן ליצור את הסדרה $\{S_n\}$ של כל הרציונלים החיוביים:

יהי $S_1 = 1$ - מאחר וכל מספר טבעי הגדול מ 1 ניתן לתאור בצורה יחידה כמכפלת מספרים ראשוניים שונים, נבטא כך את $n > 1$, היינו

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}$$

כאשר p_i גורמיו הראשוניים וכל $\alpha_i > 1$

לפיכך יהיה
$$S_n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_j^{\beta_j}$$

מספר רציונלי חיובי ומצומצם.

השבר מצומצם מאחר והגורמים הראשוניים (והזרים) עבור α אי זוגיים מופיעים במונהו של המספר הרציונלי ואילו הגורמים הראשוניים עבור α זוגיים מופיעים במכנהו ולכן לא יתכן שאותו גורם ראשוני יופיע במונה ובמכנה.

כל מספר רציונלי מופיע פעם אחת בסדרה ואת מקומו בה ניתן למצוא על-ידי ביטוי המספר בצורה המצומצמת.

$$q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_K^{\beta_K}$$

כאשר q_i ראשוניים ו β_i שלמים חיוביים או שליליים. ומכאן, בשימוש הפוך בהעתקה שהגדרה לעיל, ניתן למצוא את המספר השלם m המייצג את מקומו של הרציונלי S_m בסדרה ע"י:

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_K^{\alpha_K}$$

על פי הכללים הנ"ל נוכל לבנות את סדרת הרציונלים החיוביים:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{7}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{10}{1},\ \frac{11}{1},\ \frac{3}{2},\ \dots$$

<u>דוגמא 1:</u>

נמצא מהו המספר הרציונלי הנמצא במקום ה- 600, כלומר את S_{600}.

נרשום
$$600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

ולפי ההתאמה, α יהיו:
$$2\ ,\ 1\ ,\ 3$$

וה- β המתאימות:
$$-1\ ,\ 1\ ,\ 2$$

מכאן ש-
$$S_{600} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^{-1} = \frac{12}{5}$$

<u>דוגמא 2:</u>

נחפש באיזה מקום נמצא המספר הרציונלי $S_m = \frac{56}{225}$. לצורך זה נבטא אותו כמכפלת ראשוניים.

$$\frac{56}{225} = 2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2} \cdot 7^1$$

מכאן שה- β הן: $3,\ -2,\ -2,\ 1$

וה-α המתאימות: $5,\ 4,\ 4,\ 1$

לפיכך:
$$m = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^1 = 11340000$$

מעובד ע"י: Heard T.J., "Counting the rationals", <u>The Mathematical Gazette</u> Vol 60 (1976), No. 411, p. 62-63.