טעות לעולם חוזרת

מאת טומי דרייפוס
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

1. <u>הקדמה</u>

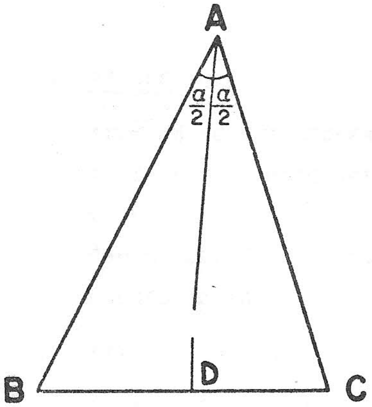
כל תלמיד, כל מורה וכל חוקר במתמטיקה מודע לעובדה כי מדי פעם יטעה ויעשה שגיאות. על פי רוב השגיאות הן טריביאליות: שגיאות בסימן, שגיאות בחשבון וכדומה, אך יש ודווקא הטעויות הן המביאות להיבטים חדשים ולכן עוזרות ללמוד ולפתח את מדע המתמטיקה. למאמר זה נבחרו מספר טעויות אופייניות לשיקול מתמטי העשויות להביא את הקורא למחשבה. בסעיף הבא מוצגים שמונה שיקולים מתמטיים שתוצאותיהם אינן נכונות. על הקורא למצוא את הטעות - גאומטרית, אלגברית או לוגית - בכל אחד מהשיקולים.

נראה גם שלכל הטעויות יש תכונה משותפת: על סמך כל תוצאה המתקבלת בעקבות טעות אפשר להוכיח את השגיאה הבולטת ש- $0 = 1$. נחזור אל התכונה המשותפת הזאת בסעיף 4 כדי להראות שמבחינה מסוימת כל הטעויות שקולות.

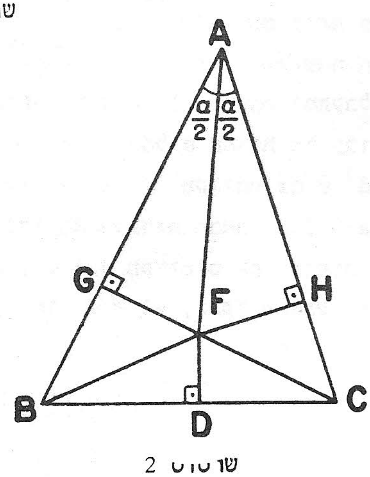
2. <u>מספר טעויות</u>

א) <u>כל משולש הוא שווה שוקיים</u>

מוכר מספר גדול של "הוכחות" המוכיחות שכל משולש הינו שווה שוקיים. הנה אחת מהן: נתון המשולש $\triangle ABC$. נסמן ב D את נקודת האמצע של הצלע BC. נעלה אנך אמצעי ל BC בנקודה D. כמו כן נחצה את הזווית $\measuredangle A$ (ראה שרטוט 1). נסמן ב F את נקודת החיתוך של האנך ב D עם החוצה של $\measuredangle A$. מהנקודה F נוריד אנך לצלע AB ונסמן ב G את נקודת הפגישה. כמו כן נוריד אנך מ F ל AC ונסמן ב H את נקודת הפגישה (ראה שרטוט 2).



שרטוט 1



שרטוט 2

מהבנייה הנ"ל נובע שהמשולשים הבאים חופפים:

- $\Delta AGF \cong \Delta AHF$ (ז.צ.ז.).
צייין שנובע במיוחד ש $\overline{AG} = \overline{AH}$.

- $\Delta FGB \cong \Delta FHC$ (משולשים ישרי זווית השווים בניצב וביתר).
לפיכך נובע במיוחד ש $\overline{GB} = \overline{HC}$.

היות ו $\overline{AG} = \overline{AH}$ וגם $\overline{GB} = \overline{HC}$ נובע ש $\overline{AB} = \overline{AC}$.

מ.ש.ל.

הערה: אם כל משולש שווה שוקיים אזי $0 = 1$.

הוכחה: נתון המשולש שצלעותיו באורכים של 3, 4 ו 5 יחידות. היות ולפי ההנחה הוא שווה שוקיים, מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות:

(i) $3 = 4 \Longleftarrow 0 = 1$ (חיסור של 3).

(ii) $3 = 5 \Longleftarrow 0 = 2$ (חיסור של 3) $\Longleftarrow 0 = 1$ (חילוק ב 2).

(iii) $4 = 5 \Longleftarrow 0 = 1$ (חיסור של 4).

בכל מקרה נובע ש $0 = 1$.

מ.ש.ל.

ב) <u>אי-סדר</u>

ידוע שקיים סדר בקבוצת המספרים השלמים. לפי הסדר המקובל, למשל $1 > 0$ ו $2 > -1$. מטרת השיקול (ב) להראות שגם ההיפך נכון, זאת אומרת ש $-1 > 2$!

לשם כך נניח כי נתונים ארבעה מספרים שלמים a, b, c ו d המקיימים את שלושת התנאים הבאים:

(i) $ad = bc$,

(ii) $b \neq 0$, $d \neq 0$,

(iii) $a > b$.

לפי (ii) מותר לחלק את (i) ב bd ומתקבל $a/b = c/d$. מזה נובע, בגלל (iii), ש $c > d$. במלים אחרות כל קבוצה של ארבעה מספרים שלמים המקיימת את (i), (ii) ו (iii) מקיימת גם ש $c > d$.

נסתכל עתה בדוגמא מספרית הבאה: $a = 2$, $b = -4$, $c = -1$, $d = 2$.

הרי a , b , c ו d מקיימים את ההנחות (i) , (ii) , (iii) ולכן גם מקיימים ש $c > d$, או $2 > -1$, כפי שהוצע לעיל.

הערה: אם $-1 > 2$ אזי $1 = 0$.

הוכחה: $-1 > 2 \Longrightarrow -1 \geq 2$

$\Longrightarrow 0 \geq 3$ (חיבור של 1)

$\Longrightarrow 0 \geq 1$ (חילוק ב 3)

הרי ידוע שגם $0 \leq 1$, ולכן $0 = 1$.

מ.ש.ל.

ג) <u>משוואות קסם</u>

נפתור את המשוואה הבאה:

$$x + \sqrt{x} = 6 .$$

מחיסור x: $\sqrt{x} = 6 - x$

נעלה בריבוע: $x = 36 - 12x + x^2$

או: $x^2 - 13x + 36 = 0$.

נפתור את המשוואה לפי הנוסחה: $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$

עבור $a = 1$, $b = -13$ ו $c = 36$ ונקבל $x_1 = 9$, $x_2 = 4$.

הצבה של x_1 לתוך המשוואה המקורית תיתן:

$$9 + \sqrt{9} = 6 ,$$

או: $12 = 6$!

הערה: על ידי חילוק ב 6 וחיסור של 1 מקבלים גם ש $1 = 0$.

נפתור עתה את המשוואה:

$$x^2 + x + 1 = 0 .$$

כדי למנוע את השימוש בנוסחת פיתרון משוואות ריבועיות נלך בדרך הבאה שהיא אלגנטית יותר: נכתוב קודם את המשוואה בשתי צורות שונות:

$$x + 1 = -x^2$$

ו- $x(x + 1) + 1 = 0$.

הצבה של הראשונה לתוך השניה נותנת:

$$x(-x^2) + 1 = 0 .$$

מכאן: $x^3 = 1$,

ולכן: $x = 1$.

הצבת הפתרון לתוך המשוואה המקורית נותנת:

$$!\ 3 = 0$$

הערה: גם מהתוצאה האחרונה נובע על ידי חילוק ב 3 ש $1 = 0$.

ד) <u>1 מתחלק ב 2</u>

נתונים שלושה מספרים שלמים a , b ו c כך ש: a זוגי, b אי-זוגי ו $bc + 3(c - a)$ אי-זוגי. מכאן אפשר למצוא מספרים שלמים k , j ו m כך ש:

$$a = 2k$$
$$b = 2j + 1$$
$$bc + 3(c - a) = 2m + 1 \ .$$

חשבון ישיר מראה אז ש:

$$\begin{aligned} 1 &= (2m + 1) - 2m \\ &= bc + 3(c - a) - 2m \\ &= (2j + 1)c + 3(c - 2k) - 2m \\ &= 2jc + 4c - 6k - 2m \\ &= 2(jc + 2c - 3k - m). \end{aligned}$$

אגף ימין מתחלק ב 2. לכן גם אגף שמאל מתחלק ב 2 .
נובע מזה ש 1 מתחלק ב 2 .

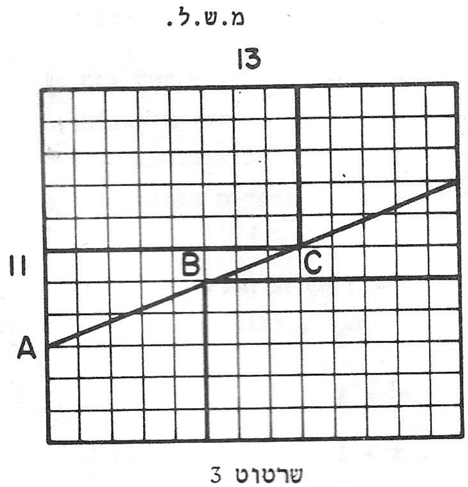
הערה: אם 1 מתחלק ב 2 , אזי $1 = 0$.

הוכחה: לפי ההנחה קיים n שלם כך ש $2n = 1$. מכאן $|n| = \frac{1}{2} < 1$. הרי n מספר שלם שערכו קטן מ 1 ולכן $n = 0$. נובע ש $1 = 2n = 2 \cdot 0 = 0$.

מ.ש.ל.

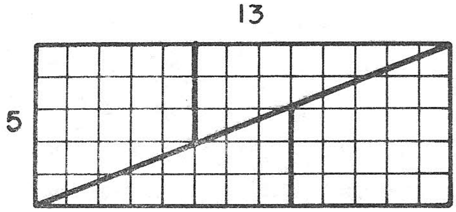
ה) <u>איך ליצור משהו מלא מכלום</u>

גודל השטח הלבן בשרטוט 3 הוא 63 משבצות. כשחותכים את ארבעת החלקים הלבנים ומרכיבים אותם בצורה אחרת מקבלים את המלבן של שרטוט 4, ששטחו 65 משבצות.



שרטוט 3

מניין נוצר השטח הנוסף?
לשם בדיקה, מומלץ להעתיק את שרטוט 3 על דף משובץ, לגזור את ארבעת החלקים הלבנים ולהרכיב מהם את המלבן של שרטוט 4. האם אפשר להרכיב ריבוע מאותם החלקים? מה שטחו?



שרטוט 4

הערה: אם השטח של 63 משבצות בשרטוט 3 שווה לשטח של 65 משבצות בשרטוט 4, אזי $0 = 1$.

הוכחה: לפי הנחה $63 = 65$. על ידי חיסור של 63 וחילוק ב 2 מתקבל ש $0 = 1$.

מ.ש.ל.

ו) <u>תבנית למספרים ראשוניים</u>

התבנית $n^2 + n + 41$ יוצרת את המספרים הרשומים בטבלה הבאה:

n	1	2	3	4	5	...	9	10	...	22	23	...	30	...
$n^2 + n + 41$	43	47	53	61	71	...	131	151	...	547	593	...	971	...

כל המספרים הרשומים בשורה השניה של הטבלה הם מספרים ראשוניים. מתברר שעבור כל מספר טבעי, n, המספר $n^2 + n + 41$ הינו מספר ראשוני.

הערה: אם עבור כל מספר טבעי, n, המספר $n^2 + n + 41$ הוא ראשוני אזי $0 = 1$.

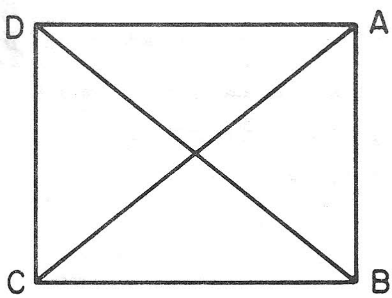
הוכחה: יהי $n = 56$. אזי $n^2 + n + 41 = 3233$ הוא מספר ראשוני לפי ההנחה.
כלומר אם m מספר טבעי שונה מ 3233 המחלק את 3233, אזי $m = 1$.
הרי $3233 = 53 \cdot 61$. במלים אחרות $m = 53$ הוא מספר טבעי שונה מ 3233 המחלק את 3233. ולכן $53 = 1$.
על ידי חיסור של 1 וחילוק ב 52 מתקבל ש $0 = 1$.

מ.ש.ל.

ז) <u>זוויות גמישות</u>

השיקול (ז) מסתמך על המשפט (הנכון) הבא:

<u>משפט</u>: יהי ABCD מרובע. אם ABCD מלבן אזי אלכסוניו שווים.

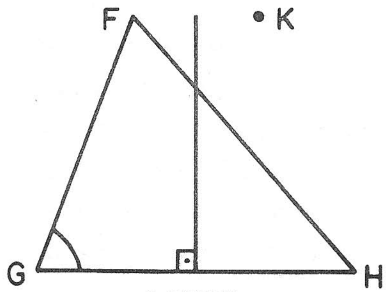


שרטוט 5

<u>הוכחה</u>:
$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ BC = CB \\ \measuredangle B = \measuredangle C \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DCB$$

ולכן: $CA = BD$.

מ.ש.ל.



שרטוט 6

נתבונן עכשיו במשולש FGH, שבו $\measuredangle G = 75^\circ$. נבנה אנך אמצעי ל- GH. תהי K תמונת הראי של F לגבי האנך.
אזי FH = KG ולפי המשפט הנ"ל המרובע FGHK הנו מלבן שבו ארבע הזוויות ישרות. במיוחד $\measuredangle G = 90^\circ$.

הערה: אם זווית של 75° היא ישרה אזי $1 = 0$.

הוכחה: $1 = 0 \Longleftarrow 6 = 5 \Longleftarrow 90 = 75 \Longleftarrow 90^\circ = 75^\circ$.

מ.ש.ל.

ח) <u>חיובי או שלילי?</u>

נתבונן עתה במספר x הנתון כסכום של הטור האינסופי:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

היות ו x הוא סכום של מספרים חיוביים הוא חייב להיות חיובי. לעומת זאת נראה ש x שווה למספר שלילי. בעצם:

$$2x = 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots)$$

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

ולכן $2x + 1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = x$

מתקבל: $2x + 1 = x$

ומכאן: $x + 1 = 0$

ולכן $x = -1$.

האם x הוא מספר חיובי או שלילי?

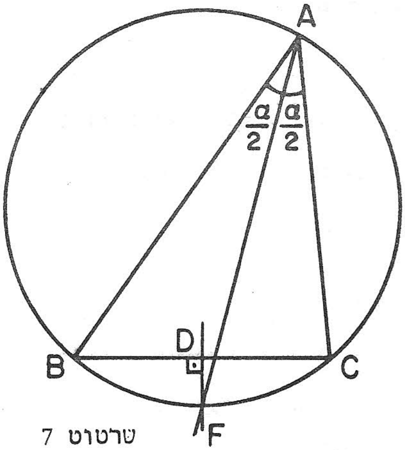
הערה: אם $x > 0$ וגם $x = -1$ אזי $1 = 0$.

הוכחה: $x + 1 = 0 \Longleftarrow x = -1$.
מן ההנחה ש $x > 0$, נובע ש $x + 1 > 0$ ומותר לחלק את המשוואה $x + 1 = 0$ ב $(x + 1)$. מזה נובע ש $1 = 0$.

מ.ש.ל.

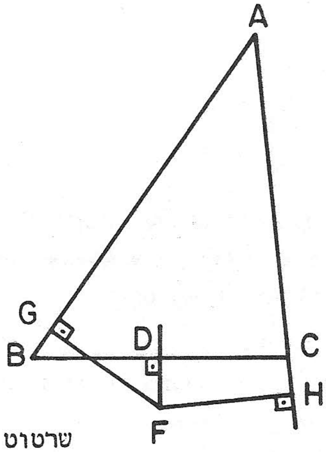
3. הסברים והרחבות

בכל אחד מהשיקולים בסעיף 2 טמונה שגיאה. בסעיף הנוכחי נבאר את מסיבות השגיאות האלה.



שרטוט 7

א) השיקול המביא לתוצאה שכל משולש שווה-שוקיים מסתמך על השרטוטים הנתונים. לא קשה להכניס לשרטוט אי-דיוק. במקרה שלפנינו אי-הדיוק מתיחס למיקום של נקודת החיתוך F. בעצם נקודת החיתוך בין חוצה זווית לבין האנך האמצעי של הצלע ממול נמצאת תמיד על המעגל החוסם של המשולש ולכן מחוץ למשולש (שרטוט 7).



שרטוט 8

כשמורידים מ- F אנכים ל- AB ול- AC תהיה נקודת פגישה אחת, נניח G, על הקטע AB, ואילו נקודת הפגישה השניה H, תהיה על המשך הקטע AC (ראה שרטוט 8). עדיין נכון ש $\overline{AG} = \overline{AH}$ וגם ש $\overline{GB} = \overline{HC}$ (הוכח).
אף על פי כן $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ כי $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC}$ ואילו $\overline{AB} = \overline{AG} - \overline{GB}$.
הצגות אחרות של שיקולים אלה נמצאים ב [3 ,2].

ב) כדי לזהות את השלב שבו נכנסה טעות ב 2 (ב), חזור על השלב בהוכחה שבו טוענים כי:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a/b = c/d \end{array}\right\} \Longrightarrow c > d .$$

שיקול מפורט יותר הוא:

(i) $a > b \Longrightarrow a/b > 1$,

(ii) $a/b = c/d$ ו (i) $\Longrightarrow c/d = a/b > 1 \Longrightarrow c/d > 1$,

(iii) $c/d > 1 \Longrightarrow c > d$.

בניתוח זה (i) נכון אך ורק כש- $b > 0$. כש- $b < 0$ הופך (i) ל:

$$(i') \quad \left.\begin{array}{l} a > b \\ 0 > b \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} < 1 .$$

נימוק דומה נכון לגבי (iii) .

בקיצור הטענה הבאה היא נכונה:

$$\left.\begin{array}{l} ad = bc \\ b > 0 \\ d > 0 \\ a > b \end{array}\right\} \Longrightarrow c > d .$$

השלמת הניתוח, עבור המקרים $d < 0$, $b > 0$; $d > 0$, $b < 0$ ו $d < 0$, $b < 0$ מומלצת לקורא.

ג) למשוואה $x + \sqrt{x} = 6$ יש רק פתרון אחד והוא $x = 4$. המספר $x = 9$ אינו פתרון של המשוואה המקורית אלא של המשוואה:

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

שהיא "הריבוע" של המשוואה המקורית. כשתעלה משוואה בריבוע אינך מקבל משוואה שקולה אלא משוואה שקבוצת האמת שלה מכילה את קבוצת האמת של המשוואה המקורית. דוגמא פשוטה לכך: קבוצת האמת של המשוואה $x = 1$, היא $\{+1\}$, ואילו קבוצת האמת של המשוואה $x^2 = 1$, היא $\{-1, +1\}$. גם פעולות חשבון אחרות הגורמות להעלאת מעלת המשוואה, עלולות להכניס אברים נוספים לתוך קבוצת האמת. דוגמאות לפעולות אלה הן כפל, הצבה ועוד. דוגמאות:

i) קבוצת האמת של המשוואה $(x - 1) = 0$ היא $\{+1\}$ ואילו קבוצת האמת של המשוואה $(x + 1)(x - 1) = 0$, המתקבלת מהמשוואה הראשונה על-ידי כפל ב $x + 1$ היא $\{-1, +1\}$.

ii) פתרון המשוואה $x^2 + x + 1 = 0$ כנתון בסעיף 2 (ג). בדוגמא זו מעלים את מעלת המשוואה על ידי הצבה של $-x^2$ במקום $x + 1$. דוגמא זו היא בעלת חשיבות מיוחדת כיוון שלמשוואה המקורית אין פתרון כלל, ואילו למשוואה המתקבלת על ידי ההצבה יש פתרון. הפתרון הזה הוכנס על ידי תהליך ההצבה והוא אינו פתרון של המשוואה המקורית. הדוגמא הזאת מופיעה אצל Rob webb [4] .

ד) רוב המשפטים המתמטיים הם מהצורה "אם P נכון אזי Q נכון", כש- P ו- Q הן טענות מתמטיות. ההוכחה היא למעשה הפירוש למילה "אזי". בסעיף 2 (ח) הטענה P אומרת: "a מספר שלם זוגי, b מספר שלם אי-זוגי ו- $bc + 3(c - a)$ מספר שלם אי-זוגי". והטענה Q אומרת "1 מתחלק ב 2". אין שגיאה בהוכחה שבסעיף 2 (ח). לכן אנו עומדים מול טענה מהצורה "אם P נכון אזי Q נכון" שבה ההוכחה נכונה והמסקנה, Q, אינה נכונה. מוצא יחיד ממצב כזה הוא בדיקת ההנחה P. מתברר שלא קיימים מספרים a, b ו c כך שההנחה P נכונה. בעצם, כש- b אי-זוגי אזי $b + 3$ זוגי ולכן $(b + 3)c$ זוגי עבור כל c. היות וגם a זוגי, 3a זוגי ו $bc + 3(c - a) = (b + 3)c - 3a$ זוגי לכל c.

שלוש ההנחות:

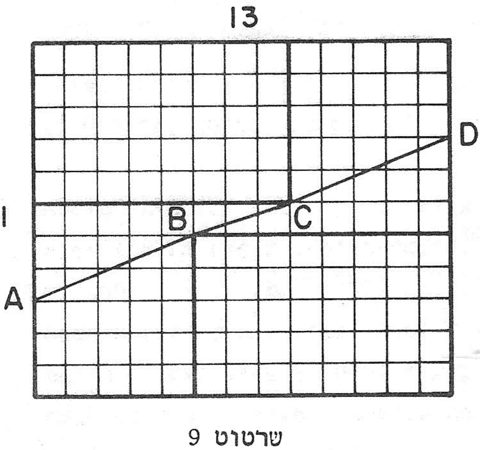
a זוגי

b אי-זוגי

ו $bc + 3(c - a)$ אי-זוגי

לא יכולות להתקיים בו זמנית. אומרים שההנחות הן בלתי עקביות. אפשר להסיק מסקנות לא נכונות מהנחות בלתי-עקביות.

ה) הקו הישר $\overline{AD}$ בשרטוט 3 אינו עובר דרך הנקודות B ו C אלא על ידן. ואילו הקו העובר דרך ארבע הנקודות A, B, C ו D אינו קו ישר (ראה שרטוט 9)! כשמחברים מלבן מארבעה החלקים הלבנים שבשרטוט 9 נוצר "חור" לאורך אלכסון המלבן. החור בעל צורת מקבילית צרה ששטחה 2 משבצות בדיוק!



שרטוט 9

ו) המתמטיקאי הדגול Leonard Euler (ליאונרד אוילר, ראה גם [1]) ניסה לגלות תבנית למספרים ראשוניים. הוא לא הצליח בכך ואף אחד אחר לא הצליח! היום לא מאמינים שקיימת תבנית המייצרת מספרים ראשוניים בלבד.

התבנית $n^2 + n + 41$ היתה הניחוש המוצלח ביותר של Euler. היא מייצרת מספרים ראשוניים עבור $n = 1, 2, \ldots, 39$. אבל עבור $n = 40$ מתקיים:

$$n^2 + n + 41 = n(n+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 41^2$$

קיימים הרבה מספרים נוספים, גדולים מ 40, שעבורם התבנית $n^2 + n + 41$ מייצרת מספר פריק, למשל $n = 56$.

תהליך השיקול בסעיף (ו) הוא תהליך מקובל ושימושי ביותר במחקר מתמטי: הכללה לפי דוגמאות. בסעיף (ו) התהליך הזה בוצע בצורה בלתי-מושלמת. שלבי התהליך בצורה נכונה הם:

- בדיקת דוגמאות,
- הבחנה של מבנה משותף בדוגמאות,
- ניסוח של טענה על סמך המבנה הזה,
- הוכחת הטענה בצורה כללית.

כל עוד לא ניתנת הוכחה יש להתיחס אל הטענה כאל השערה. השערה היא טענה הנראית נכונה לפי כל הדוגמאות המוכרות וכל השיקולים הידועים. מציאת הוכחה הופכת את ההשערה למשפט.

דוגמא נוספת של הכללה בלתי מוצדקת לפי מספר דוגמאות שאף היא קשורה לשם של Euler, היא קיום של ריבועים גרקו-לטיניים. חומר על הנושא אפשר למצוא ב [1] .

ז) המשפט שהוכח בסעיף זה טוען שאם ABCD מלבן אזי האלכסונים שווים. הטענה ההפוכה לכך היא:

אם האלכסונים שווים אזי ABCD מלבן.

הטענה ההפוכה הזאת אינה נכונה. מספיק למצוא דוגמא אחת כדי להראות זאת.

השיקול המראה ש $\measuredangle G$ היא זווית ישרה אינו מסתמך על המשפט המצוטט שם אלא על היפוכו, האיננו נכון. ולכן אין השיקול נכון.

ח) הסכום האינסופי המצויין על ידי x אינו מספר רגיל אלא מספר גדול מכל מספר סופי (בצורת דיבור בלתי-פורמלית: "שווה לאין-סוף"). נראה, למשל, ש $x > 1000$. נסמן $y = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{999}$. y הוא סכום של 1000 מספרים גדולים מ 1 ולכן $y > 1000$. מצד שני $x > y$, כי ל x יש עוד אברים. מכאן נובע ש $x > 1000$. שיקול דומה מראה ש x גדול מ n עבור כל מספר טבעי n . היות ו x אינו מספר רגיל, אסור לערוך בו חישובים כמו במספר רגיל. אין כלל מובן למשוואות שנכתבו בסעיף 2 (ד).

4. איזו שגיאה חמורה ביותר?

כל מורה יסכים שיש שגיאות חמורות יותר ושגיאות ש(כמעט) מותר לעשות אותן. הדבר תלוי במורה ובנושא הלימוד והם קובעים איזו שגיאה מותרת ואיזו חמורה. מבחינת הלוגיקה המתמטית ההבדל הזה לא קיים. עבורה כל שגיאה מביאה לתוצאה לא נכונה.

ראינו בסעיף 2 שמכל תוצאה בלתי נכונה שקבלנו, נובעת התוצאה הנוספת ש $0 = 1$.

יתר על כן, אפשר להפוך את השיקולים שהביאו ל $0 = 1$. במלים אחרות אפשר להניח ש $0 = 1$ ולהסיק תוצאה בלתי נכונה כלשהי מההנחה $0 = 1$. במובן הזה כל השגיאות שקולות ואין אחת חמורה יותר מהשניה.

לדוגמא נניח ש $0 = 1$ ונראה שנובעת הטענה של סעיף 2 (א) האומרת שכל משולש הוא שווה שוקיים. יהיו a ו b שתי צלעות במשולש. אם $a = b$ אין מה להוכיח. אם $a \neq b$ אזי $a - b \neq 0$. נשתמש עכשיו בהנחה ש- $0 = 1$. היות ו $a - b \neq 0$ אפשר להכפיל: $a - b = (a - b)\cdot 1 = (a - b)\cdot 0 = 0$ ולכן $a = b$.

מ.ש.ל.

ניקח כדוגמא נוספת, את הטענה ש 5 מתחלק ב 3: מ $0 = 1$ נובע ש- $5 = 6$. צד שמאל מתחלק ב 3. לכן גם צד ימין מתחלק ב 3 .

מ.ש.ל.

הקורא מוזמן להמציא עוד דוגמאות של טענות לא נכונות ולהוכיחן בעצמו בהנחה ש $0 = 1$. כך הוא ישתכנע שכל טענה בלתי נכונה שקולה לגמרי לטענה ש $0 = 1$, ולכן גם לכל טענה בלתי-נכונה אחרת.

5. <u>סיכום</u>

למרות שכל השגיאות שקולות מבחינת הלוגיקה המתמטית, הן אינן שוות ולכן ניתן לחלק אותן לקבוצות לפי סוגיהן. במאמר זה הובאו דוגמאות לטעויות העלולות להופיע בהוכחות מתמטיות. הטעויות החשובות והשכיחות ביותר הן:

בהנדסה: קיום או מיקום של נקודות חיתוך (א) .
מסקנות נומריות לא מוצדקות על סמך שרטוט (ה) .

באלגברה: שימוש בכלל מעבר לתחום הקיום שלו (ב) .
הכנסת פתרונות נוספים על ידי העלאת הדרגה של משוואה (ג).
שימוש בטורים לא מתכנסים (ח) .

בלוגיקה: הכללה על סמך דוגמאות (ו) .
הסתמכות על משפט הפוך (לא נכון) של משפט נכון (ז) .
הנחות בלתי-עקביות (ד) .

ביבליוגרפיה

[1] מ. ברוקהיימר: "לאונרד אוילר", שבבים, תיק מס' 2.

[2] Martin Gardner: "Mathematical Games", Scientific American, April 1971, p. 114.

[3] E.S. Maxwell: Fallacies in Mathematics, Cambridge University Press 1963.

[4] Rob Webb: "The case of the spurious root", Mathematical Gazette, Vol. 61 (1977), p. 132 .