בעקבות הגרף של הפונקציה הריבועית

מאת רנה הרשקוביץ ומקסים ברוקהיימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

מבוא

העוסקים בהוראת המתמטיקה או בכתיבת חומר לימודים מתמטי, חשים לפעמים "עייפות" לגבי נושא מסוים; נדמה כי מוצו כבר הגישות המתמטיות לפיהן אפשר ללמד את הנושא. - רעיון חדש שצף ואולי לגמרי במקרה, מכניס גמישות ורוח רעננה. תוך כדי עבודה והתלבטות בהכנת יום-עיון בנושא כה מוכר של "הוראת פונקציות ותכניות פסוק ריבועיות", צף ועלה רעיון מסוג כזה, והכניס עמו שמחת עשיה לצוות המכין את יום-העיון ואחר כך למורים שהשתתפו בו.
חלק מן המורים נסה לישם רעיון זה בהוראה בכיתתם, ועזרו לנו כך, לקרום על רעיון זה בשר עד לפיתוח גישה שלמה להוראת הפרק כולו.

- הנושא של הוראת פונקציה ריבועית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ והגרף שלה, וכן הוראת דרכי הפתרון של המשוואה ואי-שוויון הריבועי המתאים $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$, "מופיעים" כמעט בכל סדרת ספרי-לימוד במתמטיקה לחטה"ב או לבית הספר התיכון. נושאים אלה אפשר אף למצוא בספרים שנכתבו כקורסים מכינים במתמטיקה לסטודנטים באוניברסיטה בארה"ב.

בחלק גדול מן הספרים ניתנים שני הנושאים האלה, בלי קשר ביניהם. לרוב ניתנת הדרך האלגברית הכללית לפתירת משוואה ריבועית לפני הנושא של גרף הפונקציה. הטכניקה כה בדרך כלל נוקסים היא "ההשלמה לריבוע", לפעמים ניתנת גם הטכניקה של השימוש ב"פרוק לגורמים". S.M.P (1), Stein (2), Mansfield and Bruckheimer (3) (באחרון לא ניתן מושג הפונקציה כלל).
ספרים אלה אשר אינם קושרים את פתרון התבניות וגרף הפונקציה, שונים זה מזה בדרך בה הם מביאים בפני התלמיד את גרף הפונקציה. נזכיר כאן ספר מאת D.R. Burleson (4), המשמש כקורס מכין לסטודנטים בקולג' בארה"ב. בהשוואה לספרים הנמצאים בספרית המחלקה מציג הספר גישה אלגברית יוצאת דופן למציאת גרף הפונקציה. בוחרים בנקודה קבועה A על הגרף (הבלתי ידוע) של $y = ax^2 + bx + c$. בודקים את השיפועים $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, בינה ובין נקודה B ה"נעה" על הגרף. מקבלים באופן זה את שיפועי המיתרים השונים AB, כאשר A קבועה ו B "נעה". כאשר הנקודה הנעה B מתקרבת ל A ככל שנרצה, מתקבל בקצת "סלחנות מתמטית" כי שיפוע המשיק בנקודה, הוא פונקציה של ערך x באותה נקודה. מכאן עוד צעד אחד לבדיקת ערך x של הנקודה ששיפוע המשיק שלה הוא אפס (הקודקוד)...

בספרי מתמטיקה לפי השיטות החדשות, הנהוגות עתה בארץ, מובאים הנושאים כקשורים ביניהם. גם באחד הספרים של ה S.M.S.G (5), נמצא את הנושאים מוגשים בדרך דומה. דרך זו, הנותנת את הקשר בין הנושאים, מתחילה בדרך כלל בגרף של $y = ax^2$. את הגרף של $y = ax^2$ משרטטים מנקודותיו, בדרך אמפירית ע"י הצבת מספרים מתחום ההגדרה. לומדים את תכונותיו - שעורי הקודקוד, הסימטריה, השפעת סימנו וגודלו של a על צורת הגרף. אחר כך מזיזים את הפרבולה $y = ax^2$ במישור, עד לקבלת גרף פונקציה מהצורה $y = a(x-n)^2 + m$. לבסוף מראים כי כל פונקציה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$, אפשר להעביר לצורה: $y = a(x-n)^2 + m$.

נוכל למצוא כאן מגוון רב של צורות ורמות הגשה של מושג "ההזזה" והשימוש בו: בספרי "תכנית רחובות" מגדירים הזזה של נקודות המישור, כאשר מערכת הצירים נשארת קבועה (6). בספרי לימוד אחרים בארץ מגדירים הזזה של מערכת הצירים במישור כאשר נקודותיו קבועות (7) ו (8). יש ספרים כמו S.M.S.G (5) הנוקטים בהזזה אמפירית אנטואיטיבית בלבד, ויש המנסים לתת רמה מתמטית פורמלית יותר לתאור ההזזה והשימוש בה, (6) ו (7). בעזרת גרף הפונקציה אפשר למצוא את קבוצת האמת של $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$ בדרך גרפית. השקילות של $y = ax^2 + bx + c$ לצורה $y = a(x-n)^2 + m$ בהוראת הגרף, עולה שוב כאשר מחפשים את קבוצת האמת של המשוואה הריבועית. בונים את דרך הפתרון האלגברי על ידי מציאת הx-ים המתאימים לנקודות ההתאפסות של הפונקציה, ומשתמשים בצורה $y = a(x-n)^2 + m$ כדי למצוא x-ים אלו.

הספרים שהזכרנו לעיל (5, 6, 7, 8) נוקטים בדרך זו פחות או יותר.

נראה לנו כי לתלמידי הרמה הגבוהה מתאימה "גישה מאחדת" בהוראת המתמטיקה. כלומר, קישור הנושאים השונים, בנית נושא אחד מנושא אחר, תקיפת אותו נושא בדרכים מתמטיות שונות, שימוש באותה דרך מתמטית לתכנים שונים וכד'.

אם יוצאים מנקודת ראות כזו של קישור בין הנושאים השונים, עולה מיד הנושא של ראית הפרבולה כמקום גיאומטרי. בספרים של "תכנית רחובות" (6) לרמה א', קושרים באמת מושג זה עם מושג ההזזה של הנקודות כדי לקבל מ $y = ax^2$ את $y = a(x-n)^2 + m$, אך הפיתוחים המתמטיים המתלווים לתהליך רבים ויתכן כבדים מדי לגיל בו נמצאים התלמידים.

בגישה שפתחנו לאחרונה, שונה הדרך המתמטית מכל מה שהזכרנו לעיל. זו גישה המאחדת בתוכה את הנושאים השונים, אך נמנעת מחלק מהחסרונות המתלווים לשיטות הבנויות על הזזה.

בעקבות הפונקציה הריבועית

גישה זו מתאימה לתלמידים ברמה הגבוהה במתמטיקה בכיתה ט' או י'.

יחודיה של גישה זו הם:

I) הגישה, בסדר בו היא מובאת, נותנת אפשרות של למידה בדרך של גלוי מודרך. כלומר, התלמידים מגלים בעזרת שאלות מובילות את עיקרי הדברים.

II) הגישה היא "גישה מאחדת", הקושרת לתמונה כללית אחת, נקודות שונות השייכות לנושא. בעיקר גרף הפונקציה הריבועית תורם לפתרון תבנית הפסוק המתאימה, כאשר ראית הפרבולה כמקום גיאומטרי משמשת מוטיבציה לגלוי הגרף וחיזוק לשלבים השונים.

III) המהלך עד ל"גלוי" הגרף של הפונקציה הריבועית הכללית, קצר יותר מאשר בשיטת ההזזה. הפיתוחים האלגבריים קצרים וקלים יותר.

לפני שנתחיל בתאור המהלך המתמטי נקדים כמה מלים על הקשר בין הפרק, כפי שהוא מובא כאן, לרקע ולידע המתמטי של התלמידים הלומדים אותו:
לתלמידים ברמה א', הלומדים לפי הסדרה "פרקי מתמטיקה" מתאים המהלך בשלמותו. בפרק הקודם ל"פונקציות ותבניות פסוק ריבועיות" (פרק ד' בספר ד' אלגברה II), עסקו התלמידים במציאת תבנית פסוק של מקומות גיאומטריים פשוטים (מעגל, אליפסה, ואנך אמצעי) בעזרת הביטוי האלגברי למרחק בין שתי נקודות. התחלנו לכן כאן בסעיף:
$y = ax^2 + bx + c$ כמשוואת מקום גיאומטרי. כאמור משמש סעיף זה כמוטיבציה לסעיף הבא אחריו העוסק ב"גלוי" תכונות הגרף בטכניקות אלגבריות.
תלמידים שלא למדו את תכונת המרחק בין שתי נקודות ולא עסקו במציאת תבניות פסוק למקומות גיאומטריים, לא יעברו את הסעיף הראשון אלא יתחילו מיד בשני ("הגלוי" של גרף הפונקציה). כל מה שעליהם לדעת למהלך זה הוא: הכרת מערכת הצירים, טכניקה אלגברית פשוטה, משוואת קו ישר, ומושג הסימטריה לגבי ישר.

נתחיל עתה בהצגת הגישה עצמה. הגישה בנויה מ 3 חלקים.

כיוון שרצינו להראות את עיקרי הדברים, מבלי להלאות את הקורא, יכול להוצר הרושם כי הדרך המוצגת היא "לינארית", כלומר מצביעה על מהלך הוראה מחייב. למעשה, יש במהלך שלהלן "פרשות-דרכים" אשר בהן תלמידים יכולים לבחור ולפתח דרכים שונות כדי להגיע לאותו שלב של אנפורמציה. ראה למשל "גלוי הגרף" בדרך גיאומטרית לעומת דרך אלגברית (עמ' 5).

<u>הערה</u>: כדי להקל על הקורא, נכתבו סעיפי המהלך המתמטי לתלמיד בכתב מיוחד, החומר למורה אותו צריך להורות בכיתה נכתב בכתב רגיל, והערות מיוחדות למורה בתוך מסגרת.

I $y = ax^2 + bx + c$ כמשוואת מקום גיאומטרי

א) העצ לכל אחד מתלמידיך נקודה וישר המקביל לציר x ובקש מהם למצוא את משוואת המקום הגיאומטרי של נקודות המרוחקות מרחק שווה מן הנקודה והישר.
(כדאי לבחור מראש את הנקודה והישר כך שהמשוואות לא תהיינה מסובכות מדי).

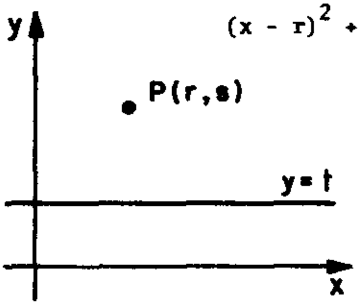
ד ו ג מ א ו ת:

1. הנקודה $(2\ ,\ 1)$ והישר $y = -1$ (המשוואה תהיה $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$)
2. הנקודה $(2\ ,\frac{17}{16})$ והישר $y = \frac{15}{16}$ (המשוואה תהיה $y = 4x^2 - 16x + 17$)
3. הנקודה $(3\ ,-1)$ והישר $y = -2$ (המשוואה תהיה $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3$)
4. הנקודה $(1,-3\frac{3}{4})$ והישר $y = -4\frac{1}{4}$ (המשוואה תהיה $y = x^2 - 2x - 3$)

בסיכום בכיתה יגיעו למסקנה כללית כי משואת המקומות הגיאומטריים של נקודות, המרוחקות שווה מנקודה נתונה $P(r\ ,s)$ וישר $y = t$, הן מהצורה $y = ax^2 + bx + c$.

כדי לתת תוקף כללי לבאמר לעיל נביא את הפיתוח הכללי.
משוואת הנקודות $(x\ ,y)$ המרוחקות מרחק שווה מנקודה $p(r\ ,s)$ ומישר $y = t$ המקביל לציר x, תהיה:

$$(x - r)^2 + (y - s)^2 = (y - t^2)$$



ואחרי פיתוח מתקבל:

$$y = \frac{1}{2(s - t)}x^2 + \frac{r}{t - s}x + \frac{r^2 + s^2 - t}{2(s - t)}$$

<u>הערות</u>

1) כיוון שהישר $y = t$ מקביל לציר x, המרחק מהנקודה P אליו הוא כמרחק בין שתי נקודות בעלות אותו שעור x.

2) לא נראה לנו כי יש להביא פיתוח זה בפני התלמידים אלא אם תבוא דרישה לכך מצדם.

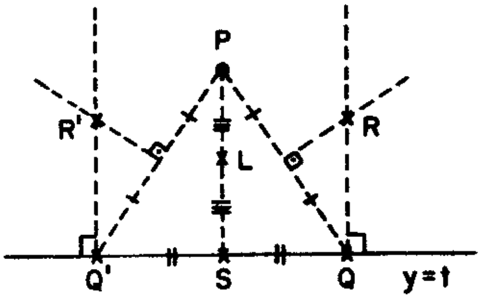
כיוון שבמקרים של מעגל ואנך אמצעי קל היה לנחש את הגרף של המקום הגיאומטרי, תתעורר מיד גם כאן השאלה. כיצד "נראה" מקום גיאומטרי זה של נקודות?

ב) *מצא בדרך הנדסית מספר נקודות השייכות למקום הגיאומטרי שאת משוואתו מצאת ב א.*

אפשר להשתמש בתכונה הגיאומטרית ולמצוא נקודות על הגרף.

<u>דוגמא:</u>

נתונה הנקודה P והישר $y = t$,
(ראה שרטוט).



ניקח נקודה Q על הישר $y = t$
ונעלה בה אנך ל $y = t$.
נקודת הפגישה R של אנך זה עם
האנך האמצעי לקטע $\overline{PQ}$ היא נקודה
על המקום הגיאומטרי ($\overline{PR} = \overline{RQ}$).

בוודאי יהיו תלמידים שיציעו את הנקודה L כנקודה על
המקום הגיאומטרי, כאשר L היא אמצע הקטע $\overline{PS}$.
$\overline{PS}$ אנך ל $y = t$. יתכן ויציעו אף את הנקודה R'
המתקבלת בעזרת Q' שעל $y = t$ כאשר $\overline{Q'S} = \overline{QS}$.
אפשר בדרך גיאומטרית זו להגיע לתכונות הפרבולה:
כלומר, הנקודה L הנ"ל, היא ה"נמוכה" ביותר, לכל
נקודה אחרת (R) אפשר לקבל נקודה סימטרית (R'),
ציר הסימטריה הוא הישר PL וכד'...

<u>הערה:</u>

אם תלמידים לא "גילו" את כל זאת מן הבניה הגיאומטרית
אין להכנס לזה כיוון שבכך יפסידו את גורם ההפתעה
שבגלוי הגרף בדרך האלגברית המוצעת להלן.
זוהי איפוא אחת "מפרשות הדרכים" אותן הזכרנו לעיל;
תלמידים יכולים להמשיך ולגלות את הגרף בדרך גיאומטרית
אז אלגברית, כאשר על המורה בשלבים מסוימים לדאוג
להשלמת שלבים חסרים.

II <u>בעקבות הגרף של הפונקציה הריבועית</u>

- חלק זה הוא כאמור תחילתו של המהלך האלגברי שהוא חוט השדרה של הגישה המובאת כאן. תלמידים שלא עסקו קודם במרחק בין שתי נקודות ובמקומות גיאומטריים יתחילו בחלק זה.

א) האם $y = ax^2 + bx + c$, *מתאר פונקציה מהמספרים הממשיים אל המספרים הממשיים?*

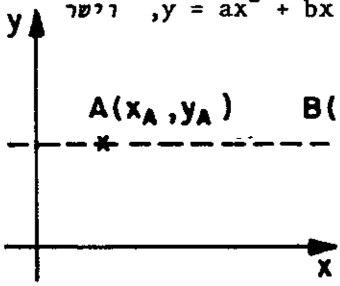
מהי המסקנה מכך לגבי הגרף?

- הגרף מתאר פונקציה כיוון שלכל ערך של x קיים ערך אחד ויחיד של y. הגרף הוא איפוא גרף של פונקציה, או במלים אחרות; כל ישר מקביל לציר y חותך את הגרף בנקודה אחת ויחידה.

ב) *נתונים נקודה* $A(x_A, y_A)$ *כלשהי <u>על הגרף</u> של* $y = ax^2 + bx + c$, *וישר מקביל לציר* x *העובר דרכה.*

האם קיימת נקודה נוספת B *המשותפת לישר ולגרף?*

מהי המסקנה מתשובתך לגבי הגרף?



- אם קיימת לנקודה A שעל הגרף נקודה נוספת B כמבוקש, הרי שעור y_B שלה שווה ל y_A. נסמן את שעור x של B כ- x_B ונקבל:

$$ax_B^2 + bx_B + c = ax_A^2 + bx_A + c \Longleftarrow y_B = y_A$$

$$a(x_B^2 - x_A^2) + b(x_B - x_A) = 0$$

כיוון שההנחה היא שיש נקודה <u>נוספת</u> מתקיים $x_A \neq x_B$

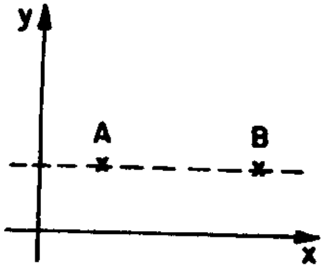
ונקבל אחרי חילוק ב $x_B - x_A$:

$$a(x_B + x_A) + b = 0$$

ומכאן $x_B = -\frac{b}{a} - x_A$

את מה שקיבלנו כאן יש לפרש כך: אם רק קיימת $B \neq A$, ל A שעל גרף הפונקציה, אז B היא <u>יחידה</u>, כיוון שלכל פונקציה a ו b הם מספרים $(a \neq 0)$.

מצאנו כי לנקודות (A) על גרף הפונקציה, יש נקודות "תואמות" (B), כאשר כל זוג של נקודה ונקודה תאומה (A ו B) נמצא על קו מקביל לציר x.



המסקנה מכך לגבי הגרף כי הוא עשוי <u>שני ענפים</u>.

ג) *מצא עבור הנקודה* $A(x_A, y_A)$ *כלשהי שעל הגרף, את אמצע הקטע* $\overline{AB}$. *נסמן את נקודת האמצע* $M(x_M, y_M)$. *מה תוכל לומר על הנקודה* M, *עבור קטעים* $\overline{AB}$ *שונים?*

מהי המסקנה מכך לגבי הגרף?

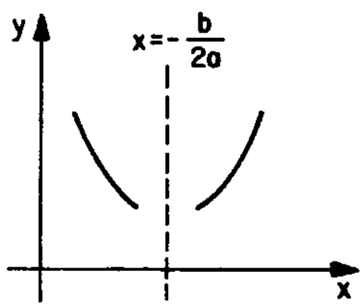
הצורה ל x_M [illegible]

שעור y של אמצע הקטע הוא $y_M = y_A = y_B$

שעור x של אמצע הקטע הוא $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

קיבלנו בסעיף הקודם כי $x_A + x_B = -\frac{b}{a}$

לכן $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$



כיוון ש A ו B נקודות מייצגות כלשהן, קיבלנו כי לגבי כל פונקציה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$, ל M - אמצע הקטע של זוגות הנקודות A ו B, יש שעור x קבוע. במלים אחרות; כל הנקודות M נמצאות על ישר המקביל לציר x, הישר $x = -\frac{b}{2a}$.

לגבי הגרף נוכל להסיק, כי שני ענפי הגרף <u>סימטריים</u> זה לזה לגבי הישר $x = -\frac{b}{2a}$.

ד) *פונקציה מהצורה* $y = ax^2 + bx + c$ *מוגדרת עבור כל* x, *במלים אחרות לכל* x *קיימת נקודה מתאימה* A *על גרף הפונקציה.*

קח עתה כ A *את הנקודה ששעור* x *שלה היא:* $x_A = -\frac{b}{2a}$, *חשב את* y_A.

$$y_A = a(-\frac{b}{2b})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c$$

$$y_A = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = c - \frac{b^2}{4a}$$

ה) *הנקודה A המיוחדת שאת שעוריה חישבת בסעיף ד), נמצאת על ישר הסימטריה של הגרף. מה תוכל להסיק מכך לגבי הנקודה $B(x_B, y_B)$ ה"תאומה" לה (ראה ההגדרה בסעיף ב')?*

האם מסקנתך נמצאת בסתירה למה שמצאת בסעיף ב)?

מה אומרת מסקנתך לגבי הגרף?

- הנקודה A נמצאת על הגרף ועל ציר הסימטריה. מתוך הגדרת הסימטריה נובע כי אין לה נקודה "תאומה" B כנ"ל, <u>השונה</u> ממנה.
הוכחנו שאם קיימת B אז היא יחידה לכן אין שום נקודה על הגרף ששעור y שלה הוא y_A אותו מצאנו בסעיף ד).

ממצא זה אינו בסתירה למה שמצאנו ב ב) אלא להפך הוא סוגר ומשלים את מה שמצאנו שם. מהלך הפיתוח המתמטי בסעיף ב) התחיל ב "אם קיימת לנקודה A על הגרף נקודה נוספת B..." ובפיתוח המתמטי השתמשנו בהנחה כי A ו B שונות זו מזו. עתה בהוסיפנו את השיקולים הגיאומטריים שמצאנו בסעיף ג) גילינו נקודה אחת על הגרף שהיא יחידה ב"גובה" זה, (אין אחרת בעלת אותו שעור y).

שים לב! יתכן ויהיו תלמידים אשר כתשובה על סעיף זה ינסו להציב באופן תמים בביטוי: $x_B = -\frac{b}{a} - x_A$ את $x_A = -\frac{b}{2a}$, וזאת כדי למצוא את B במקרה זה. פיתוח זה יוביל אותם למסקנה כי: $$x_A = x_B \quad , \quad x_B = -\frac{b}{2a}$$ מסקנה זו נכונה כביכול ומאשרת את מה שמצאנו מתוך השיקולים הגיאומטריים לעיל. יש לדון עם התלמידים על דרך זו ולהראות כי בטעות יסודה: - הבטוי $x_B = -\frac{b}{a} - x_A$ התקבל מתוך ההנחה $x_B \neq x_A$ (ראה סעיף ב'), ולכן לא ניתן להשתמש בו במקרה שלפנינו.

המסקנה לגבי הגרף: - הגרף עשוי שני "ענפים סימטריים" הנפגשים בנקודה אחת שעל ציר הסימטריה. כאן כדאי כבר לקרוא לנקודה זו שעל ציר הסימטריה בשם קודקוד.

ו) *סכם כיצד מה שמצאת בסעיפים א) עד ה) תורם לאנפורמציה על צורת הגרף של פונקציות מהצורה* $y = ax^2 + bx + c$.

- את האנפורמציה אליה הגיע התלמיד דרך המהלך המיוצג בסעיפים א) - ה) אפשר לסכם כך:

i) הגרף של $y = ax^2 + b + c$ הוא סימטרי כלפי הישר $x = -\frac{b}{2a}$,
כלומר הוא שני ענפים.

ii) כיוון שהגרף הוא גרף של פונקציה, לכל x יש ערך אחד ויחיד של y. כלומר, הענפים "היוצאים" מנקודה אחת על ישר הסימטריה, חייבים ללכת ולהתרחק אחד מהשני.

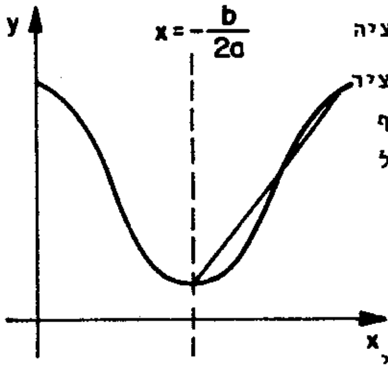
iii) כיוון שישר המקביל לציר x חותך את הגרף בשתי נקודות לכל היותר, ענפי הגרף חייבים "לעלות בהתמדה" או "לרדת בהתמדה" (במלים אחרות הפונקציה היא מונוטונית), והנקודה שעל ישר הסימטריה היא נקודת האכסטרמום של הפונקציה, כלומר הנקודה "הנמוכה" ביותר או "הגבוהה" ביותר.

יהיו תלמידים אשר בדיון על צורת הגרף יעלו הצעות שונות. קל להפריך הצעות של צורות גרף בהן ל x-ים מסויימים מתאימים שני ערכי y, או הצעות בהן ישר מקביל לציר x חותך את הגרף ביותר משתי נקודות. קשה יותר להפריך את ההצעה הבאה (ראה שרטוט). אם נלך לפי סיכום שלבי האנפורמציה, הרי שבהצעה זו:

i) צורת הגרף סימטרית

ii) הגרף מתאר פונקציה

iii) כל ישר מקביל לציר x חותך את הגרף בשתי נקודות לכל היותר.



מצד שני על גרף כזה קיימים מיתרים החותכים אותו ביותר משתי נקודות (ראה השרטוט).

כדי להוכיח <u>שלא קיים</u> מקרה כזה נוכיח כי הגרף של $y = ax^2 + bx + c$ עבור $a > 0$ מקיים את אי-השוויון הבא:

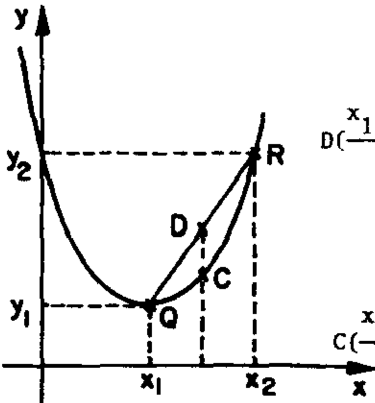
$$\text{I} \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

לכל x_1 ו x_2 מתחום ההגדרה של הפונקציה.

ניתן את הפרוש הגיאומטרי לאי שויון זה:

$Q(x_1 , y_1)$ ו $R(x_2 , y_2)$

שתי נקודות כלשהן על גרף הפונקציה.



D - אמצע הקטע $\overline{QR}$,
כלומר שעוריה הם:

$$D\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right)$$

C - שעל גרף הפונקציה,

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$$

קיום אי השויון לעיל אומר כי שעור y_D גדול משעור y_C, או במלים אחרות, נקודה על אמצע מיתר של הגרף נמצאת תמיד מ"על" הגרף. צריך להוכיח איפוא $y_D > y_C$ או $y_D - y_C > 0$

הוכחה:

$$y_D = \frac{a(x_1^2 + x_2^2)}{2} + \frac{b(x_1 + x_2)}{2} + c$$

$$y_C = \frac{a(x_1 + x_2)^2}{4} + \frac{b(x_1 + x_2)}{2} + c$$

$$y_D - y_C = \frac{2ax_1^2 + 2ax_2^2}{4} - \frac{ax_1^2 - 2ax_1x_2 + ax_2^2}{4} =$$

$$= \frac{ax_1^2 + 2ax_1x_2 + ax_2^2}{4} = \frac{a(x_1 + x_2)^2}{4} > 0$$

מ.ש.ל.

הערות:

1) כאשר $a < 0$ יהיה אי השויון המתאים

$$\text{II} \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

2) בעצם אי השויונים I ו II הם מקרים פרטיים של אי השויונים הכלליים הבאים:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \gtrless \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

כאשר $\alpha , \beta > 0$ ו $\alpha + \beta = 1$
I ו II שהוכחנו לעיל התקבלו כאשר $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

על פונקציה המקיימת אחד מאי השויונים הללו
לכל x_1 ו x_2 מתחום ההגדרה שלה אומרים
שהיא קמורה (קעורה) בתחום זה.
לגבי הפונקציה הריבועית, אומרים אי השויונות
I ו II כי הפונקציה הריבועית קעורה עבור
$a > 0$ וקמורה עבור $a < 0$.
נוהגים עתה ל"אחד" מושג זה תחת שם אחד.
כלומר פונקציה המקיימת אחד משני אי השויונות
נקראת **קמורה**. בחשבון דיפרנציאלי יפגשו
התלמידים שוב במושג זה.

ז) *נסמן את הנקודה המשותפת לגרף ולציר הסימטריה ב* $K(x_k, y_k)$. *שעורי נקודות סימטריות אפשר לבטא בצורה הבאה:* $x_k + \alpha$ *ו* $x_k - \alpha$ *כאשר* $\alpha \neq 0$ *(הסבר מדוע)?*
אם נשתמש ב $x_k = -\frac{b}{2a}$ *יהיו שעורי* x *של הנקודות הסימטריות* $-\frac{b}{2a} + \alpha$ *ו* $-\frac{b}{2a} - \alpha$.
נסה לבטא את שעורי ה y *של הנקודות הסימטריות בעזרת* y_k, *מקדמי הפונקציה ו* α.

- שעורי y של הנקודות הסימטריות שוים זה לזה. נמצא באופן כללי את התמונות של $-\frac{b}{2a} \pm \alpha$ לפי הפונקציה.

$$y = a(\frac{-b}{2a} + \alpha)^2 + b(\frac{-b}{2a} + a) + c$$

$$y = \frac{b^2}{4a} - b\alpha + a\alpha^2 - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y = c - \frac{b^2}{4a} + a\alpha^2$$

או

$$y = y_k + a\alpha^2$$

ח) השתמש במסקנותיך ובחישוביך מהסעיפים הקודמים כדי לשרטט באופן יעיל גרפים של פונקציות ריבועיות.

שלבי השרטוט יהיו:

i) מציאת שעורי הקודקוד של הפונקציה הנתונה.

ii) מציאת השעורים של נקודות סימטריות.

iii) שרטוט הגרף על ידי העברת הקו שבין הנקודות.

בשלב i) יעזר התלמיד במה שמצא בסעיף ד). שעורי הקודקוד של כל פונקציה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ הם:

$$x_k = -\frac{b}{2a} \qquad y_k = c - \frac{b^2}{4a}$$

בשלב ii) יעזר התלמיד במה שמצא בסעיף ז). שעורי x של נקודות סימטריות הן $x_k \pm \alpha$ ושעורי ה y המתאימים $y_k + a\alpha^2$

אפשר להציע לתלמיד לערוך לעצמו טבלת שעורי נקודות בצורה הבאה:

$$X_k = \qquad\qquad Y_k =$$

ואח"כ

α	$x_k - \alpha$	$y_k + a\alpha^2$

עתה הגיע השלב בו בא הקשר בין גרף הפונקציה $y = ax^2 + bx + c$, לבין פתרונות תבניות הפסוק מהצורה:

$$ax^2 + bx + c \gtreqless 0$$

II <u>*נקודות ההתאפסות של הפונקציה*</u>

א) כששרטטת גרפים לפונקציות ריבועיות שונות, חתכו חלק מהם את ציר x וחלק לא. מהו התנאי האלגברי לשתי אפשרויות אלה? (הנח $a > 0$).

מן השרטוט מגיעים למסקנה כי מספר נקודות ההתאפסות של הפונקציה תלוי בשעור y של K נקודת הקודקוד.

כאשר $a > 0$ מתקבל כי עבור:

$y_K > 0$ לפונקציה אין נקודת התאפסות.

$y_K = 0$ לפונקציה נקודת התאפסות אחת.

$y_K < 0$ לפונקציה שתי נקודות התאפסות.

את y_K חישבנו בחלק II סעיף ד), קיבלנו $y_K = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

מכאן נקבל את התנאים האלגבריים. בניח $a > 0$

$y_K > 0 \Rightarrow 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow 4ac > b^2$ — אין נק' התאפסות

$y_K = 0 \Rightarrow 4ac - b^2 = 0 \Rightarrow 4ac = b^2$ — נק' התאפסות אחת

$y_K < 0 \Rightarrow 4ac - b^2 < 0 \Rightarrow 4ac < b^2$ — שתי נק' התאפסות

ב) הנח כי אנו עוסקים בפונקציה שהגרף שלה <u>חותך</u> את ציר x. השתמש בעובדה כי נקודות ההתאפסות של הפונקציה גם הן נקודות סימטריות כדי למצאן באופן כללי.

בחלק II סעיף ז' מצאנו כי שעורי נקודות סימטריות באופן כללי הן

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \alpha \qquad\qquad y = c - \frac{b^2}{4a} + a\alpha^2$$

בנקודות ההתאפסות $y = 0$ לכן:

$$0 = c - \frac{b^2}{4a} + a\alpha^2$$

ומכאן

$$a\alpha^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

כלומר ערכי α בנקודות ההתאפסות:

$$\alpha = \pm \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

ומכאן הצורה הכללית לערכי x של נקודות ההתאפסות של הפונקציה היא:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

אפשר עתה ל"סגור את המעגל", ולקבל שוב את אותם תנאים אלגבריים למספר הפתרונות של המשוואה הריבועית מהסתכלות בצורה הכללית של הפתרונות, (סימנה של הדיסקרמיננטה).

- את קבוצת האמת של אי השויון הריבועי במשתנה אחד מקבלים בדרך אלגברית בעזרת פתרונות המשוואה הריבועית המתאימה ושיקולים הקשורים בגרף.

סיכום

הצגנו ראשי פרקים לגישה מתמטית חדשה בהוראת הנושא המוכר של "פונקציות ותבניות פסוק ריבועיות". (יש לזכור כי הצגנו בעיקר את המהלך המתמטי, ופחות את יישומו היומיומי בכיתה. ביישום כזה, אחרי ש"נמצא" הגרף של הפונקציה הריבועית, באופן כללי או על ידי דוגמאות, יש לעסוק בבעיות הקשורות בפונקציה ריבועית; - בעיות מינימום ומכסימום; בעיות הקשורות בפתרון גרפי של תבניות פסוק ריבועיות וכד'... באופן דומה, אחרי מציאת נקודות ההתאפסות של הפונקציה, יש לעסוק בבעיות הקשורות בפתרון תבניות פסוק ריבועיות).

הגישה שהצגנו מציעה לתלמידים ברמה הגבוהה ולמוריהם, שורה של שעורים מהנים, הבנויים על גלוי עצמי של התלמידים.

הגישה מאחדת שלושה נושאים מתמטיים באופן טבעי; קושרת ובונה את הנושא האחד מקודמו:

- הראיה של $y = ax^2 + bx + c$, כמשוואת מקום גיאומטרי של נקודות, מגבירה את הסקרנות בדבר צורתו של מקום גיאומטרי זה. - כך נבנית התחלה מוטיבציונית למהלך החקר ב"עקבות" הגרף.
- המודעות האלגברית לסימטריה של הגרף, תורמת למציאת פתרונות המשוואה הריבועית בדרך אלגברית.

בנוסף לזה, נראה לנו כי בגישה זו קיים איזון בין פעילות מתמטית אינטואיטיבית, שהיא יסודה של פעילות מתמטית, לבין הטכניקה האלגברית הקשורה בסעיפים השונים של מהלך זה.

ספרות

1. S.M.P., Book I, Cambridge University Press, 1973.
2. E.I. Stein, *Modern Algebra Step by Step,* Second Book. American Book Company, 1971.
3. D.E. Mansfield and M. Bruckheimer, *Mathematics A New Approach,* Book 4, Chatto and Windus, 1965.
4. D.R. Burleson, *Topics in Precalculus Mathematics,* Prentice Hill Inc., 1974.
5. S.M.S.G. Unit No. 10, *First course in Algebra,* Part II, Yale University Press, 1961.
6. "תכנית רחובות", ספר ד' *אלגברה* II. הוצאת המחלקה להוראת המדעים מכון ויצמן למדע, 1972-1973.
7. אלגברה חלק ג', *פונקציות ותחשיבים.* המחלקה להוראת המדעים האוניברסיטה העברית (הנסוי של עמיצור), 1971.
8. מ. משלר, *אלגברה לשנת הלימודים השמינית,* הוצאת עם עובד 1970.