על בניות גיאומטריות והמכשירים לביצוען

מאת אסתר רמתי
ביה"ס התיכון הדתי המקיף ע"ש רוגוזין, אשקלון.

בין הקשיים שהתלמיד המצוי רואה בגאומטריה בולטות בעיות הבניה. רוב התלמידים מחפשים דרך מיוחדת לכל בניה ולכן שואלים: "איך עושים את זאת?" אינם תופסים את העקרון אשר ביסוד תורת הבניות ולכן אינם שואלים: "מדוע בונים כך ולא אחרת".

נדמה לי שאחת הסיבות למצב הזה היא חוסר דיוק בביטויים מסוימים בהם אנחנו, המורים, התרגלנו להשתמש. אני מתכוונת לביטויים:

א) "בניה בעזרת סרגל ומחוגה בלבד".
ב) "בניה מדויקת".

תפיסה נכונה של שני הביטויים האלה מאפשרת גם הבנת ההגבלה של סרגל ומחוגה כאמצעי בניה בלעדיים.

מהגבלת השימוש במכשירים האלה מגיעים באופן טבעי לשאלה הנוספת: "האם נוכל להמציא מכשירים אשר אינם מקובלים בגאומטריה האוקלידית כדי לבצע בניות אשר לא מצאו את פתרונן עד כה?"

מטרת המאמר הזה היא איפוא כפולה:

1) לברר את תוכנם והיקפם של הביטויים "בניה בעזרת סרגל ומחוגה בלבד" ו "בניה מדויקת" ואת האפשרות לבצע בגאומטריה האוקלידית בניות

א) בצורה מדויקת; ב) בקירוב.

2) המצאת דרכים ומכשירים אחרים מאשר סרגל ומחוגה המקובלים בגאומטריה האוקלידית כדי לבצע בדיוק בניות שהגאומטריה האוקלידית נותנת לבצע רק בקרוב.

א. "בנה בעזרת סרגל ומחוגה בלבד!"

על התלמיד לבנות משיק למעגל נתון דרך נקודה נתונה. הוא מעביר את הסרגל דרך הנקודה כך שהוא נוגע במעגל ...
האם אין זה "בעזרת סרגל בלבד"?
על תלמיד אחר לבנות מעגל בעל מרכז נתון אשר נוגע במעגל נתון. הוא חג מסביב הנקודה הנתונה מעגל שיש לו רק נקודה אחת משותפת עם המעגל הנתון ...
האם אין זה "בעזרת מחוגה בלבד"?
השגיאה היא בבטוי הבלתי-מדויק "בעזרת סרגל ומחוגה בלבד". התרגלנו להשתמש בבטוי הזה כאילו היה פרושו מובן מאליו. למעשה מותר לבצע אך ורק מספר פעולות מוגדרות היטב. ואלו הן:

בעזרת סרגל מותר להעביר 1) ישר כלשהו.

2) ישר דרך נקודה נתונה בכיוון כלשהו.

3) ישר דרך 2 נקודות נתונות.

בעזרת המחוגה מותר לחוג מעגל

1) ברדיוס כלשהו מסביב נקודה כלשהי.

2) ברדיוס נתון מסביב נקודה כלשהי.

3) ברדיוס נתון מסביב נקודה נתונה.

4) ברדיוס נתון מסביב נקודה נתונה.

כל הבניות המותרות בגאומטריה האויקלידית מבוססות על שילוב של שתיים או יותר מבין הבניות הנ"ל.

ב. "בניה מדויקת" - מהי?

ביטוי זה דורש גם כן בירור. אף בניה מעשית אינה מאה אחוז מדויקת! היא רק תמונה מקורבת עד כמה שאפשר של הבניה "האידיאלית". הבניה המדויקת קיימת רק במחשבה, בו בזמן שהבניה המעשית תלויה במכשירים בעלי דיקנות מוגבלת: כך הנקודה המצויירת אינה "צורה גאומטרית חסרת מימדים"; הקו הישר המשורטט אינו "בעל אורך בלבד" ... וכו'.

העובדה שהשרטוט הוא רק תמונה ממחישה של הבניה ה"אידיאלית" אינה די ברורה ללא-מתמטיקאי ולתלמיד הממוצע. נדמה לי שזאת אחת הסיבות שחובבי המתמטיקה ממשיכים לנסות את כוחם בבניות עליהן הוכיחו לפני כ 100 שנה שאין להם פתרון בעזרת סרגל ומחוגה. המפורסמות ביותר בין בעיות הבניה האלו הן:

א) "תרבוע המעגל", ז.א. בנית ריבוע שהיקפו שווה להיקף מעגל נתון.

ב) "הכפלת הקוביה", ז.א. בנית המקצוע הצדדי של קוביה שנפחה שווה לפעמיים נפח קוביה נתונה.

ג) "שילוש הזווית", ז.א. חלוקת זווית נתונה לשלוש זוויות שוות.

לכל הבעיות האלו קיימות בניות (בעזרת סרגל ומחוגה) בהן הסטיה מן הבניה האידיאלית היא כל כך קטנה שאי-אפשר לגלות אותה באמצעים גאומטריים, כי אם על-ידי חישוב בלבד. אבל הסטיה קיימת ובעיני המתמטיקאי בניה מקורבת אינה מדויקת. מתמטיקאים שאפו לבצע את הבניות הנ"ל עוד ועוד במשך 2000 שנה. אך בשנת 1882 הוכיח לינדמן (Lindman) את חוסר-האפשרות לבנות בסרגל ומחוגה בלבד צורות גאומטריות שבטויין האלגברי הוא ממעלה גבוהה מ-2, או של ביטויים טרנסצנדנטיים*. ההוכחה הזאת שמה קץ למאמצים של

---

*בעברית מוצאים את ההוכחה ב"אתגר". (עלון לתיכון מס' 1 שהופיע מטעם הפקולטה למתמטיקה בטכניון, חיפה. ע"י ד"ר ג. סון, תשל"ה).

מתמטיקאים לבצע את הבניות, כי "תרבוע המעגל" למשל, היה דורש בניה של המספר הטרנסצנדנטי

$$x = \frac{\pi}{2}$$

"הכפלת הקוביה" שקולה לפתרון המשוואה מן המעלה השלישית

$$x^3 = 2$$

ו"שילוש הזווית" מתאים להתרת המשוואה מן המעלה השלישית

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

בה $\sin(3\alpha)$ הוא מספר נתון.

מן העובדות האלו נוצר אתגר חדש בשני כיוונים:

I) המצאת בניות מקורבות בעזרת סרגל ומחוגה (אך לא מדויקות) של הבניות הנ"ל והערכת הדיוק שבהן.

II) החיפוש אחרי מכשירים (שונים מסרגל ומחוגה בלבד) לשם ביצוע בניות מדויקות.

בעזרת שתי המגמות האלה ניתן להעשיר את שעורי הגיאומטריה והן גם יכולות להוות חומר מעניין לחוגי מתמטיקה.

Iא. בניות מקורבות וחישוב סטית הערך המקורב מן הערך המדויק על-ידי התלמיד לפי מספרים מקורבים נתונים.

אם נתון קטע באורך היחידה התלמיד יודע לבנות

1) קטע באורך p פעמים היחידה, כאשר p הוא מספר רציונלי (ע"י הכפלת קטע היחידה או חלוקת הקטע ביחס מסוים).

2) קטע השווה לשורש הריבועי של מספר רציונלי a (ע"י בנית הממוצע ההנדסי בין a ו 1).

הוא ישתמש בבניות האלו כדי לבנות קטעים שאת אורכם הציעו בתקופות שונות כקטעים מקורבים לקטע באורך π ואשר נתנו לבניה בעזרת סרגל ומחוגה במובן ההנדסה האויקלידית. (בעית הבניה הזאת כמובן שקולה ל"תרבוע המעגל" מכיוון שחצי הקטע הבנוי בדרך הזאת ישווה לצלע הריבוע הדרוש.) אחרי ביצוע הבניה על התלמיד לחשב בכמה אחוזים סוטה הבניה שלו מן הערך ה"אידאלי" של π, שהוא $\pi = 3.14159...$.

הנה כמה מבין הערכים האלה:

א) בתנ"ך ובתלמוד מופיע הערך המקורב 3

ב) ארכימדס מציע: $\frac{25}{7}$

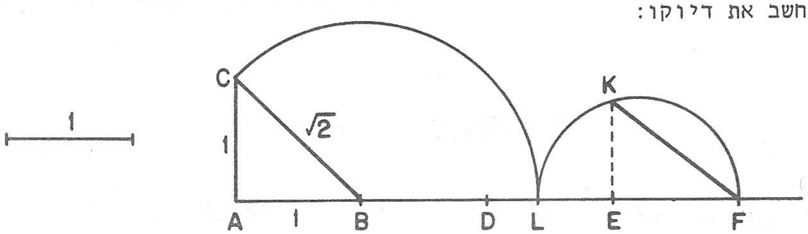
ג) דירר מציע: $\frac{25}{8}$

ד) פטולומאוס מציע: $3\frac{17}{120}$

ה) מתמטיקאים שונים הציעו $\sqrt{10}$ או $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ או $3 + \frac{1}{10}\sqrt{2}$

עבור מקצוע הקוביה אשר נפחה שווה כפליים נפח הקוביה שמקצועה הוא היחידה הציע המתמטיקאי האיטלקי מסקרוני (Mascheroni, 1797) את הערך המקורב $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

כדוגמה לבניות וחישובים דומים אחרים, נבנה כאן את הקטע המתאים למקצוע קוביה זו ונחשב את דיוקו:



שרטוט מס' 1

א) בנית משולש ישר זווית שווה-שוקיים ABC, בו $1 = AC = AB$ $\sqrt{2} = BC$.

ב) $3 = BF$ יחידות $(1 = EF = DE = BD)$.

ג) קשת ברדיוס $\overline{BC}$ מסביב B חותך את BF ב L. $3 - \sqrt{2} = \overline{LF}$.

ד) חצי מעגל על $\overline{LF}$ כקוטר.

ה) אנך ב E על LF חותך את חצי המעגל ב k. לפי משפט אויקלידס

$$EF \times LF = \overline{KF}^2$$

ומכאן $$\sqrt{3 - \sqrt{2}} = \overline{KF}$$

<u>חישוב הסטיה:</u> בעזרת לוגריתמים בעלי 7 מקומות עשרוניים

מקבלים $\sqrt{3 - \sqrt{2}} = 1.2592800$

בו בזמן $\sqrt[3]{2} = 1.2599209...$

הסטיה היא, איפוא, קטנה מ 0.0007 ז.א. ש $\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ הוא ערך מקורב טוב מאוד עבור $\sqrt[3]{2}$, או $(3-\sqrt{2})$ הוא פתרון מקורב טוב מאד של המשוואה

$$x^3 = 2$$

:. הצגת בניה מקורבת על-ידי המורה -
על התלמיד לחקור אחרי הבניה ולחשב בכמה אחוזים היא סוטה מן הערך המדויק

(i) קרוב ל"תרבוע המעגל"

1) קוחנסקי (Kochanski) הציע בשנת 1685 בנית תרבוע המעגל בצורה הבאה:

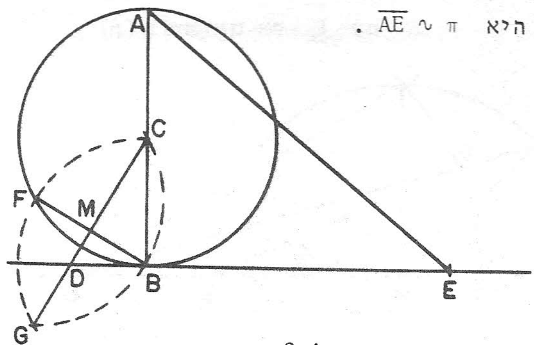
$\overline{AB}$ הוא קוטר באורך 2 יחידות.

$\overline{BF}$ שווה לרדיוס המעגל (1 יחידה).

$\overline{CG}$ האנך האמצעי של $\overline{BF}$ חותך את המשיק ב B בנקודה D.

מקצים DE שווה 3 פעמים $\overline{BC}$.

הטענה היא $\overline{AE} \sim \pi$.



שרטוט מס' 2

חישוב הדיוק:

לפי הבניה $\overline{CB} = \overline{FB} = 1$

$DE = 3 \times \overline{BC} = 3$ יחידות.

משולש CMB בעל זוויות $90°$, $60°$, $30°$ (לפי בניה)

משולש CBD דומה למשולש CMB (זוויות שוות)

מכאן $DB = \frac{CB}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $BE = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

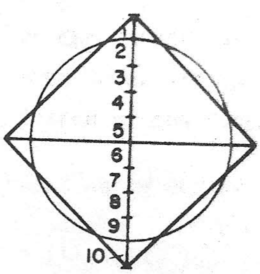
לפי משולש ABE: $AE = \sqrt{BE^2 + AB^2} = \sqrt{(3-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 2^2}$

בעזרת לוגריתמים בעלי 5 מקומות עשרוניים מגיעים ל-

$\overline{AE} \sim 3.1416...$

הסטיה מ π היא,איפוא,קטנה מ 10^{-5} !

2) הצייר הגרמני דירר (Dürer) הציע בשנת 1525 לחלק את אלכסון הריבוע ל 10 חלקים שווים ולבנות מעגל על 8 מתוך החלקים האלו (השווה שרטוט מס' 3). הקורא לא יתקשה בחישוב הדיוק!



שרטוט מס' 3

על הבניה היפה הבאה ועל החישוב המתאים שמעתי מפרופסור פרון (Perron) באוניברסיטת מינכן.

<u>הבניה:</u> יש לשלש את הזווית x (שרטוט 4).

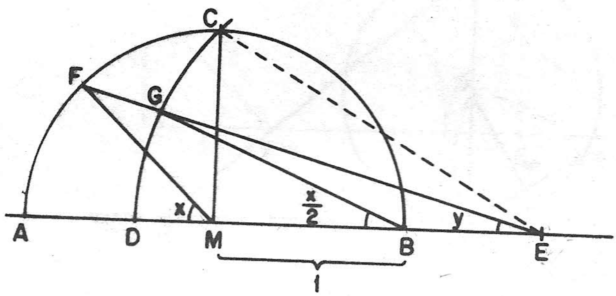
בונים: (א) מעגל מסביב M בעל רדיוס 1.

(ב) מעגל מסביב B בעל רדיוס $\overline{BC}$ השווה $\sqrt{2}$.

(ג) $\overline{AB} = \overline{EC} = 2$.

(ד) מחברים את B עם E.

(ה) מחברים את E עם G.



שרטוט מס' 4

מן הבניה נובע (לפי משולש MEC) $ME = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

$BE = \sqrt{3} - 1$

$\sphericalangle EGB = \frac{x}{2} - y$

<u>הטענה היא:</u> $\sphericalangle y = \frac{1}{3}(\sphericalangle x)$

הקשר החישובי בין הזוויות x ו y נובע ממשפט הסינוסים במשולש GBE:

$$\frac{\sin(\frac{x}{2} - y)}{\sin y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

מכאן:

$$\cot y = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2}\cos(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2})} \qquad (1)$$

עד כאן התלמיד אשר למד את הנוסחאות הטריגונומטריות יבין את החישוב. הוא יחשב למספר זוויות x את הזוויות y המתאימות לפי משוואה מס' 1, כדי להיווכח עד כמה קטנה הסטיה של y מ $\frac{x}{3}$.

אמנם הקורא (המורה) יתענין בודאי בחישוב המלא של הסטיה המכסימלית:

מ (1) נובע

$$y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2})}{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2}\cos(\frac{x}{2})} \qquad (2)$$

נסמן את הסטיה ב ε:

$$\varepsilon = \frac{x}{3} - y \qquad (3)$$

הנגזרת הראשונה היא:

$$(4)\quad \varepsilon' = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}\cos(\frac{x}{2})}{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

הנגזרת השניה:

$$(5)\quad \varepsilon'' = \frac{-\sin\frac{x}{2}}{4\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos(\frac{x}{2}))^2} < 0$$

עבור $x = 0$ ו $x = \frac{\pi}{2}$ הסטיה שווה ל 0, כלומר $y = \frac{x}{3}$

עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$ יש לסטיה מכסימום כאשר $\varepsilon' = 0$

או $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$(6)\quad \cos x = 11 - 6\sqrt{3}$$

$$x = 52°34'37'' \Longrightarrow \frac{x}{3} = 17°31'32.2''$$

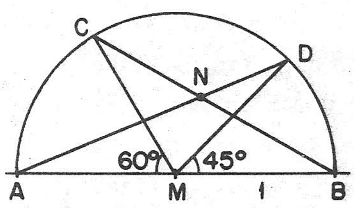
הצבה של (6) בתוך (1) נותן את ה y המתאים: $y = 17°23'6''$

<u>השגיאה המכסימלית</u> בבניה הזאת היא איפוא

$$\varepsilon_m = (\frac{x}{3} - y) = 8'12''$$

(ii) <u>קרוב של "הכפלת הקוביה"</u>

1) הויגנס (Huygens, 1629-1695) דווח על הבניה המקורבת הבאה:
במעגל בעל רדיוס באורך יחידה, $AM = BM = 1$, בונים את הזוויות המרכזיות $45°$ ו $60°$.
(השווה שרטוט מס' 5). מחברים את C עם B ואת D עם A.
שני הקטעים $\overline{CB}$ ו $\overline{AD}$ נחתכים בנקודה N.



שרטוט מס' 5

<u>הטענה היא:</u> אורך הקטע $\overline{AN}$ שווה בקרוב ל $\sqrt[3]{2}$.

<u>חישוב הקרוב:</u> במשולש ANB הזווית ליד $A = 22.5°$
(זווית היקפית על הקשת $\widehat{BD}$)

הזווית ליד $B = 30°$
(זווית היקפית על הקשת $\widehat{AC}$)

לפי משפט הסינוסים במשולש ANB מקבלים

$$\overline{AN} = 2 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 22.5°}$$

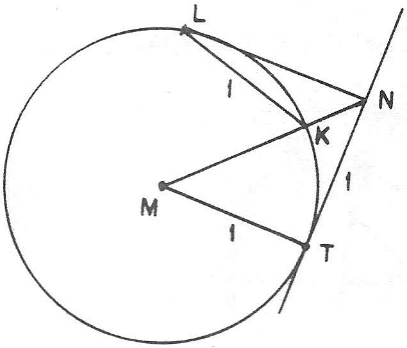
בעזרת לוגריתמים בעלי 7 מקומות עשרוניים:

$\overline{AN} = 1.2604720$

לכן הסטיה מן הערך $\sqrt[3]{2} = 1.2599209$ קטנה מ 0.0006 !

2) עבור בנית מקצוע של קוביה בעלת נפח כפול מקוביה בעלת נפח היחידה, הביא מסקרוני (השווה פרק IA. במאמר הזה) את הבניה אשר בשרטוט מס' 6:

במעגל בעל רדיוס 1 בונים משיק בנקודה כלשהי, T, ומקצים עליו $\overline{TN} = 1$. הקטע MN (שאורכו $\sqrt{2}$) חותך את המעגל ב K. קשת מסביב K ברדיוס 1 חותכת את המעגל ב L. הטענה היא ש $\overline{LN} \sim \sqrt[3]{2}$. הקורא יחשב בנקל את אורך הקטע LN וסטיתו מן הערך המספרי של $\sqrt[3]{2}$ (~ 1.2599209).



שרטוט מס' 6

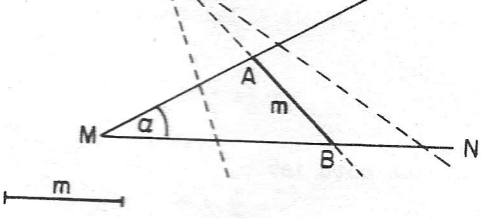
II) החיפוש אחרי מכשירים (שונים מסרגל ומחוגה בלבד) לשם ביצוע בניות מדויקות.

בכל התקופות - ובלתי תלוי בהוכחת ההגבלה בבניות באמצעים האויקלידיים - חיפשו אחרי מכשירים אשר יאפשרו בניות מדויקות בעזרת פעולות נוספות שונות מאלו המותרות בבניות האויקלידיות. (השווה עם הפרק הנ"ל, "בסרגל ומחוגה בלבד"). מתקבל על הדעת שגם המכשירים האלה אינם מאפשרים בניה מדויקת של מספר טרנסצנדנטי (π). אבל הם מרשים התרת משוואות מן המעלה השלישית וביניהן אלו שמוליכות ל"שילוש הזווית" או ל"הכפלת הקוביה". (השווה עם הפרק הנ"ל על "בניה מדויקת" - מהי?)

IIא. "תחימות"

במספר גדול של המכשירים האלה משתמשים, כפעולה נוספת, ב"תחימה" בין שוקי זווית α של קטע מסוים m אשר נמצא על ישר העובר דרך נקודה P.

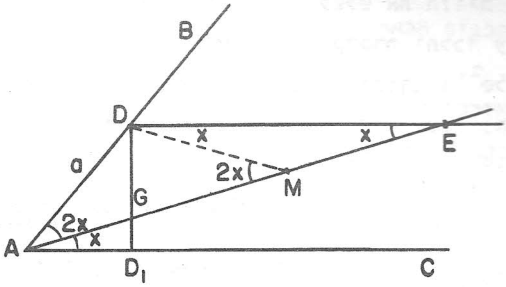
שרטוט מס' 7 עשוי להבנת ההגדרה הזאת: נתונים קטע m, זווית LMN ונקודה P. בין כל הישרים דרך P ישנו אחד ורק אחד שחותך את שוקי הזווית $\alpha = \measuredangle LMN$ בנקודות A ו B כך ש $\overline{AB} = m$. ישר זה תוחם את הקטע m בין שוקי הזווית α.



שרטוט מס' 7

בהמשך המאמר כמה שרטוטים שעל עקרונם כמה מכשירים בהם נעזר ב"תחימה".

1) בשרטוט מס' 8, D היא נקודה על השוק AB של הזווית BAC במרחק a מקדקד הזווית.



שרטוט מס' 8

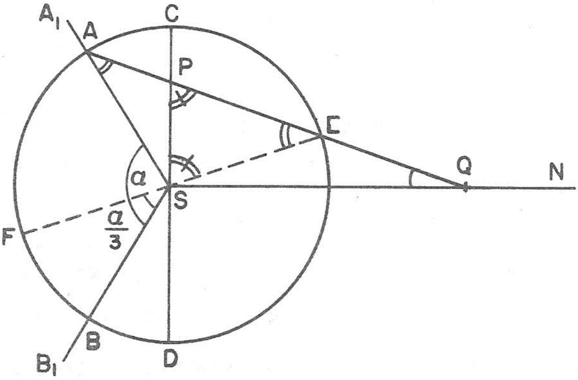
$AC \parallel DE$; $DD_1 \perp AC$

ישר דרך A תוחם בין הישרים DD_1 ו DE קטע EG השווה ל 2a.

הטענה היא

$\sphericalangle EAD_1 = \frac{1}{3}\sphericalangle BAC$

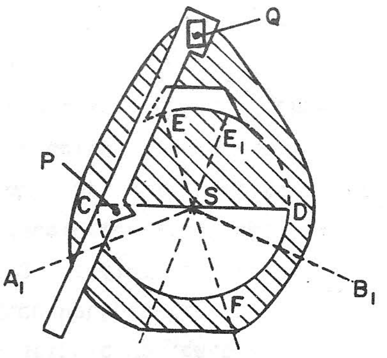
ואמנם DM הוא תיכון ליתר במשולש GDE ומכאן ומן הבניה נובע חישוב הזוויות כמסומן בשרטוט.



שרטוט מס' 9

2) על עקרון דומה מבוסס שרטוט מס' 9. A_1SB_1 היא זווית מרכזית במעגל. SQN חוצה את הזווית הקהה בין השוקיים A_1S ו B_1S. CD קוטר המאונך ל SN. תוחמים בין CD ו SN קטע PQ באורך קוטר המעגל ואשר נמצא על ישר העובר דרך A (נקודת היתוך של A_1S עם המעגל) וחותך את המעגל ב-E. ES חותך את המעגל שנית ב F. קל להוכיח כי $\sphericalangle FSB_1 = \frac{1}{3}\sphericalangle A'SB'$.

3) בהסתמך על הבניה הקודמת המציא המתמטיקאי האיטלקי אמאדורי (Amadori) במאה ה 14 את מכשירו לשילוש הזווית:



שרטוט מס' 10

השטח המקוקו בשרטוט מס' 10 עשוי מקרטון או מעץ. CD הוא קוטר חצי מעגל בעל מרכז S, אשר חתוך בתוך השטח הזה. EE_1 היא קשת שניה של אותו המעגל. החלק השני של המכשיר הוא סרגל אשר בקצהו האחד בורג, Q, הנתן להזזה בחריץ קטן מלבני בכיוון הישר QS המאונך ל CD. בורג שני, P, יכול לנוע לאורך CD. המרחק PQ שווה ל CD. הנקודות Q ו P חייבות להמצא בדיוק בקו

ישר עם מקצוע הסרגל. כדי לשלש את הזוית A_1SB_1 מכניסים אותה באופן סימטרי בתוך חצי העיגול החתוך כך שקדקדה יתלכד עם המרכז, S, של החתך. מסובבים את הסרגל עד שיעבור דרך נקודת החיתוך, A של שוק הזוית עם חצי המעגל. במצב זה הסרגל יקבע על הקשת השניה של המעגל נקודה E.
ההמשך של ES עד F נותן את הזוית FSB_1 שהיא שליש של הזוית הנתונה A_1SB_1. (בהתאם לשרטוט מס' 9).

4) תחימת קטע בין שוקי זוית מאפשרת גם בנית מכשירים ל"הכפלת נפח קוביה".

הבעיה היא: מציאת אורך b של מקצוע הקוביה שנפחה כפליים מנפח קוביה נתונה (בעלת מקצוע a); כלומר לבנות את b כך ש

$$b^3 = 2a^3$$

או

$$b = a\sqrt[3]{2}$$

בכל התקופות הציעו מכשירים לבנית הביטוי $\sqrt[3]{2} = x$; רובם מבוססים על בנית הפרופורציה הממושכת

$$a:b = b:c = c:2a$$

בה a הוא מקצוע הקוביה המקורית ויש לקבוע את b ו c כדי לפתור את המשוואה $b^3 = 2a^3$.

ואומנם מן החלק הראשון של הפרופורציה נובע $b^2 = a\cdot c$

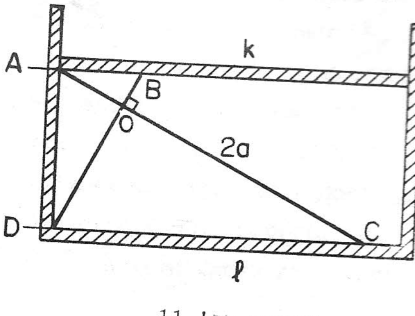
מן החלק השני $c^2 = 2ab$

ומשני השיוויונים האלו $b^4 = a^2c^2 = 2a^3b$

$b^3 = 2a^3$

מתקבל על הדעת שמנסים לבנות את הפרופורציה הממושכת הנ"ל בעזרת משולשים דומים. אך מכיוון שהיא כוללת את <u>שני</u> המשתנים (b ו c) צריכים גם כאן להעזר באמצעים שונים מ"סרגל ומחוגה בלבד" כדוגמת תחימת קטעים בין שוקי זוית.

כבר אפלטון (Plato) (427-347) הציע את המכשיר הבא:
בתוך מסגרת עץ קבוע קרש (k) מקביל לבסיס המסגרת (ℓ). ניתן להזיזו מעלה ומטה. שני סרגלים היוצרים ביניהם זוית ישרה מסתובבים מסביב נקודת חיתוכם O (שרטוט מס' 11). השוקיים a ו 2a קבועות. תוחמים את מערכת הסרגלים בין k ו ℓ עד שנוצרים המשולשים הדומים AOB ו COD. בהם $c = DO$, $b = AO$. b הוא הגודל הדרוש בהתאם לחישובים הנ"ל.



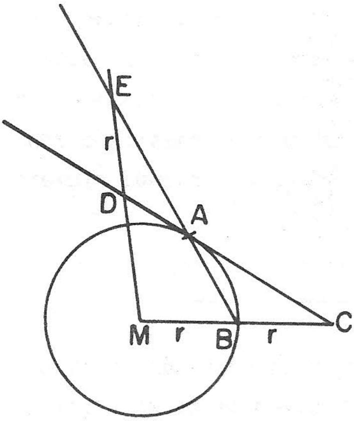
שרטוט מס' 11

5) ניוטון (Newton) הציע את הבניה הבאה:
במעגל מסביב M ובעל רדיוס r,
ממשיכים רדיוס אחד (MB) כאורכו עד C.
קשת מסביב B ברדיוס r חותכת את המעגל
ב A. בין המשכי הקטעים $\overline{AC}$ ו $\overline{BA}$
"תוחמים" על ישר העובר דרך M קטע DE
השווה ל r. (שרטוט 12) הטענה היא:

$$r:MD = MD:AE = AE:2r$$

כלומר: הקטע MD הוא המקצוע של הקוביה הכפולה.

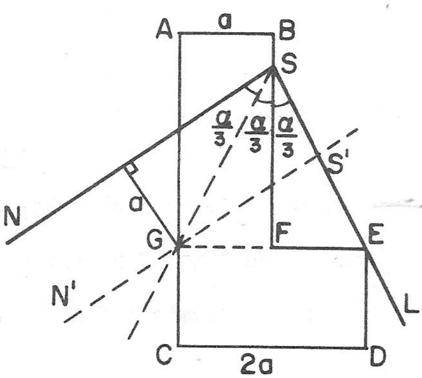
ניוטון הציע את הבניה בלי הוכחה. אך קל להוכיח את נכונותה על סמך משפט צ'יבא (Ceva) עבור המשולש EMB והחותך CD.



שרטוט מס' 12

IIב.1) <u>כמה מכשירים שאינם משתמשים בתחימה</u>

מכשיר נוח לשילוש הזווית הוא <u>זוויתון*</u> הבנוי בהתאם לשרטוט מס' 13 ($\overline{CD} = 2AB$). כאן לא מזיזים את המכשיר אלא את הנייר עליו משורטטת הזווית $NSL = \alpha$, ומעבירים בתוך הזווית קו עזר (N'S') מקביל לשוק NS במרחק a ממנו. מחליקים את הזווית מתחת הזוויתון כך שקדקדה S נמצאת על BF, השוק SL עוברת דרך E ומקביל ל S'N דרך G. מחפיפת שלושת המשולשים בשרטוט מתברר שילוש הזווית α.

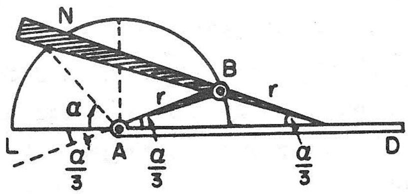


שרטוט מס' 13

---

*המכשיר המתואר במאמר של נחום יער על "אלברכט דירר ("שבבים" תיק 3) מבוסס על אותו עקרון כמו הזוויתן.

2) <u>מחוגה מיוחדת לשילוש הזווית</u> מבוססת אך ורק על קשרי זוויות במעגל ובמשולש (שרטוט מס' 14). שני חודי המחוגה נעים מסביב המפרק B. חוד אחד מסתובב על הציר A, השני מחליק לאורך הסרגל AD. השימוש במכשיר וחישוב הזוויות ברורים לפי הרשימות בשרטוט.



שרטוט מס' 14

לסיום: המכשירים המתוארים במאמר הזה מהווים רק כמה דוגמאות מתוך המספר הגדול הקיים. יש לציין ששיטת "תחימת קטע בין שוקי זווית" מאפשרת גם בנית מכשירים לשרטוט חתכי חרוט או קווים יותר מסובכים. לדוגמה: כדי לבנות מכשיר לשרטוט אליפסה נוח להשתמש בתכונתה שהיא המקום הגאומטרי של כל הנקודות המחלקות קטע שאורכו $(a + b)$ ביחס $a:b$, כאשר הקטע הזה נע כך שקצותיו נמצאים תמיד על השוקיים של זווית ישרה.
יתכן, ונקוה, שהמצאת מכשירים מתאימים יהיה אתגר לתלמידים המעונינים בעבודה מעשית.

ביבליוגרפיה:

1) "אתגר" (עלון לתיכון מס' 1, שהופיע מטעם הפקולטה למתמטיקה בטכניון, חיפה).

2) "גליונות מתמטיקה" כרך 3 מס' 1 ומס' 3 מכון ויצמן למדע; רחובות.

3) מאמר של נחום יער ב"שבבים" תיק מס' 3.