משוואות פונקציונליות ופונקציות קוויות

לזכרו של מורה ומחנך לאהבת המתמטיקה, שלמה לקר ז"ל (1925-1977) במלאת שנה למותו.

עובד ע"י נורית זהבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

במסגרת ההנחיה מטעם קבוצת המתמטיקה הגיעו אלינו הדים על מורה למתמטיקה המלמד בעפולה, עולה חדש שהעברית בפיו עודנה מחוספסת ודלה, אך ההתלהבות והמסירות מכסות על קשיי השפה, ובכיתותיו המתמטיקה פורחת ומשגשגת! אין הוא מרכין ראש בפני קשיים ומנסה דרכים שונות להשגת מטרותיו.

החלטנו שכדאי להזמינו לפגישה במחלקתנו. הוא בא וכולנו כאחד התרשמנו מאישיותו התוססת והמתסיסה. בקשנו אותו לתת יד בפגישותינו עם מורים. יראו הם עד כמה אין שפה דלה פוגעת בעושרה של שפת המתמטיקה.
יפה התבטא אחד מתלמידיו - ירבו מורים כאלה בתוכנו, אך שיחיו יותר שנים...

בהשתלמות למורי מתמטיקה בקיץ תשל"ד נשא שלמה לקר ז"ל הרצאה בפני מורים שהשתלמו בנושא הפונקציות. הוא הציג שלבים ביצירת פונקציות המתארות התאמה ביחס ישר על ידי משוואה פונקציונלית.
בעקבות הרצאתו ולזכרו נטפל כאן בנושא זה.

בתכנית המתמטיקה של החטיבה העליונה מופיע הנושא משוואות פונקציונליות בפרק העוסק בפונקציה המעריכית[1]. חשבנו שרצוי כי מורי המתמטיקה בחטיבת הביניים יכירו את נושא המשוואות הפונקציונליות ולכן בקשנו ממר לקר להגיש זאת בהשתלמות המורים.

במאמר הנוכחי נראה כיצד ניתן לקבל פונקציות קויות מתוך מערכת דרישות.

נרשום לדוגמא תרגיל העוסק בהצבה בפונקציה:

נתונה פונקציה מ R אל R , $f(x) = 2x^2 + 5$

מצא את $f(3)$, $f(5)$, $f(8)$.

עשוי להמצא תלמיד אשר יציע לחסוך בזמן ובמקום לחשב את $f(8)$, לחבר את $f(3)$ ו $f(5)$ ולרשום $f(8) = f(5) + f(3) = 78$ וזה לא נכון!
על ידי הצבה בפונקציה הנתונה מתקבל $f(8) = 133$.

[1] בתיק שבבים מס' 11 הופיע מאמר <u>הפונקציה המעריכית</u> מאת פרופ' ש. עמיצור. במאמר מתואר תהליך של יצירת פונקציה על ידי מערכת דרישות שבמרכזן עומדת הדרישה המבוטאת על ידי המשוואה הפונקציונלית $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$.

נשאלת השאלה: האם קיימות פונקציות אשר לגביהן מותר לחבר $f(x_1)$ ו- $f(x_2)$ על מנת לקבל $f(x_1 + x_2)$? כלומר, האם קיימות פונקציות המקיימות את המשוואה הפונקציונלית

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{(לכל } x_1 \text{ ו- } x_2 \text{ ב } R\text{)}$$ [2]

אפשר לערוך רשימה של פונקציות ולבצע בהן הצבות מספריות. כעבור נסיונות מועטים אנו מוכנים לשער כי השויון מתקיים לגבי פונקציות שהן מהצורה $f(x) = ax$. לא קשה גם לאשר השערה זו ובעזרת חוק הפילוג להוכיח את המשפט:

פונקציות מ R אל R, מהצורה $y = ax$ מקיימות את המשוואה הפונקציונלית

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ לכל x_1 ו- x_2 ב R.

מצאנו, אם כן משפחה של פונקציות המקיימות את המשוואה הפונקציונלית הנ"ל. האם יש עוד? נמשיך לנסות לחפש ללא הצלחה ואז ננסה להוכיח את המשפט ההפוך:

הפונקציות היחידות מ R אל R אשר מקיימות את המשוואה הפונקציונלית $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, הן מהצורה $f(x) = ax$.

נתון:

(1) f פונקציה מ R אל R.

(2) לכל x_1 ו x_2 ממשיים קיים $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

נראה מה אפשר להסיק מנתונים אלה.

(א) נוכיח כי $f(0) = 0$

לפי (2) $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$

מכאן $f(0) = 0$

(ב) נוכיח כי לכל x $f(-x) = - f(x)$

לפי (א) ו (2) $0 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) + f(x)$

מכאן $f(-x) = - f(x)$

הפונקציה f מוגדרת לכל x, את ערכה בנקודה מסויימת השונה מאפס, למשל $x = 1$ נסמן על ידי a.

כלומר $f(1) = a$, a ממשי.

עתה נבטא את ערכי הפונקציה בנקודות אחרות בעזרת a.

---

[1] משוואה זו נקראת על שמו של Cauchy שפתר אותה ב 1821.

(ג) נוכיח כי עבור m טבעי $f(m) = a\cdot m$

$f(1) = a$

לפי (2) $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2a$

$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 3a$

וכך הלאה, לכל m טבעי

$$f(m) = a\cdot m$$

(ד) על סמך (ב) ו (ג) מתקבל כי לכל k שלם מתקיים $f(k) = a\cdot k$

(ה) נוכיח כי

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

במקרה של שלושה מחוברים, על סמך (2)

$$f(x_1 + x_2 + x_3) = f(x_1 + x_2) + f(x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$$

וכך אפשר להוכיח לכל מספר סופי של מחוברים.

(ו) נוכיח כי עבור כל מספר רציונלי $\frac{k}{m}$, $f(\frac{k}{m}) = a\cdot\frac{k}{m}$

לפי (ד) $a\cdot k = f(k) = f(\frac{k}{m}\cdot m) =$

לפי (ה) $= f(\frac{k}{m} + \frac{k}{m} + \dots + \frac{k}{m}) = m\cdot f(\frac{k}{m})$

מכאן $f(\frac{k}{m}) = a\cdot\frac{k}{m}$

לסיכום, ראינו כי אם פונקציה מקיימת את המשוואה הפונקציונלית (2) אזי לכל z רציונלי $f(z) = a\cdot z$.

עתה עלינו לעבור למספרים האירציונליים. לא הצלחנו להראות כי לכל x ממשי מתקיים $f(x) = ax$ בלי הוספת דרישה נוספת.[3]

אם $a > 0$ הפונקציה f עולה עבור המספרים הרציונליים ואם $a < 0$ הפונקציה יורדת. נניח כי $a > 0$. דרישה טבעית היא שהפונקציה תהיה עולה עבור כל הממשיים. אם כך, נוסיף לנתונים (1) ו (2) את הנתון:

(3) הפונקציה f עולה.

הערה: עבור $a < 0$ נדרוש כי f תהיה פונקציה יורדת. אם לא נבחין בסימן של a נדרוש מונוטוניות של f.

---

[3] Cauchy דרש שהפונקציה תהיה רציפה. אחר כך מצאו שמספיק לדרוש רק רציפות בנקודה אחת או דרישות אחרות לגבי f.

מקור לקריאה:

Aczel J., Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press, NeW York and London, 1966.

(ז) נוכיח כי לכל x_0 ממשי $f(x_0) = ax_0$

f מוגדרת לכל x ממשי, לכן נסמן $f(x_0) = t_0$, (שים לב, a, t_0 ו x_0 הם מספרים מסויימים). נסמן את ההפרש בין t_0 ו- ax_0 ב d_0, כלומר $t_0 = ax_0 + d_0$, ונוכיח כי d_0 חייב להיות אפס.

אם $d_0 \neq 0$ אז x_0 ו $x_0 + \frac{d_0}{a}$ הם שני מספרים ממשיים שונים. ישנו משפט האומר כי בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר רציונלי.

לפיכך נרשום $x_0 < \frac{k}{m} < x_0 + \frac{d_0}{a}$ (או בכיוון הפוך אם d_0 שלילי).

מאחר ו $x_0 < \frac{k}{m}$

על סמך נתון (3) $f(x_0) < f(\frac{k}{m})$

כיוון ש $f(x_0) = t_0 = ax_0 + d_0$

נקבל ש $ax_0 + d_0 < a\cdot\frac{k}{m}$

ומכאן $d_0 < a(\frac{k}{m} - x_0)$

מאחר ו $\frac{k}{m} < x_0 + \frac{d_0}{a}$

הרי ש $d_0 > a(\frac{k}{m} - x_0)$

נוצרה סתירה, לכן d_0 חייב להיות אפס ו $f(x) = ax$

נוכל להמשיך ולשאול, האם גם פונקציות קווית אשר עבורן $f(0) \neq 0$ יכולות להתקבל על ידי משוואה פונקציונלית?

נתבונן לדוגמא בפונקציה מהצורה $f(x) = ax + 7$ לא קשה להראות, כי הפונקציה ממלאה את המשוואה הפונקציונלית

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 7$$

אפשר גם להוכיח את המשפט ההפוך, כי הפונקציות היחידות המהוות פתרון למשוואה זו הן מהצורה $f(x) = ax + 7$. ניתן לעשות זאת בדיוק באותם שלבים בהם הלכנו קודם. כאן נוכיח את המשפט האחרון על סמך המשפט שכבר הוכחנו.

תחילה נראה, כי אם הפונקציה $f(x)$ ממלאה את $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 7$ אזי הפונקציה $g(x)$ המוגדרת באופן הבא: $g(x) = f(x) - 7$ מקיימת את המשוואה $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$

ואמנם

$$g(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2) - 7 = f(x_1) + f(x_2) - 7 - 7 =$$

$$= f(x_1) - 7) + (f(x_2) - 7) = g(x_1) + g(x_2)$$

לכן $g(x)$ היא מהצורה $g(x) = ax$ ואז $f(x) = ax + 7$.