הוכחת נוסחאות טריגונומטריות בדרך אנליטית

מאת: דוד בן חיים

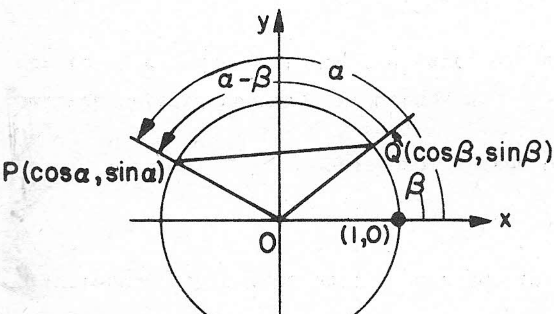
תחילת מעשה מגדירים את המעגל הטריגונומטרי (בעל רדיוס יחידה ומערכת צירים קרטזית במרכזו) ואת שעור ה-x של נקודה על המעגל כ-$\cos\alpha$ ושעור ה-y שלה כ-$\sin\alpha$, כאשר α מספר ממשי המבטא את אורך הקשת או גודל הזוית.

מכאן ניתן לעבור להוכחת הנוסחאות של

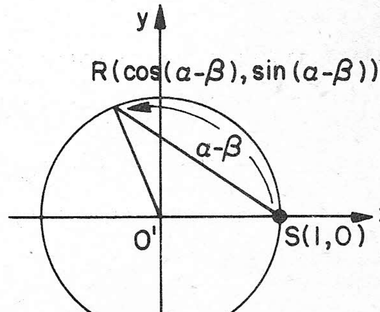
$$\cos(\alpha \pm \beta) \quad \text{ו} \quad \sin(\alpha \pm \beta)$$

נוכיח תחילה את הנוסחה ל $\cos(\alpha - \beta)$:

נשרטט שני מעגלי יחידה כבציורים 1 ו-2:



ציור 1



ציור 2

בציור (1) משורטטות הקשתות α, β וסומנה גם הקשת $\alpha-\beta$ ב-PQ

בציור (2) משורטטת הקשת $\alpha-\beta$ החל מהנקודה (1,0) והיא מסומנת ע"י SR

שעורי הנקודות P, Q, R ו-S מסומנים בציור והערכים שלהם נובעים מההגדרות של ה-sin וה-cos.

המפתח לתוצאה שלנו היא העובדה שהקטעים PQ ו-RS שווים מאחר והם צלעות במשולשים החופפים OPQ ו O'RS, או מיתרים מול אותה קשת.

נביע עתה את השוויון הזה בעזרת נוסחת המרחק בין שתי נקודות, כלומר:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

ונקבל, לפי ציור (1)

$$(PQ)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$= 2 - 2(\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta)$$

כמו כן, עפ"י ציור (2)

$$(RS)^2 = [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha-\beta) - 0]^2$$

$$= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

מהשוואת $(PQ)^2 = (RS)^2$ נקבל

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta \qquad (1)$$

עתה נוכל לפתח נוסחה נוספת, זו של $\sin(\alpha-\beta)$,כאשר ידוע לנו ש-

$$\cos(\alpha-\tfrac{\pi}{2}) = \sin\alpha$$

ואכן

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos[(\alpha-\beta) - \tfrac{\pi}{2})] = \cos[\alpha - (\beta+\tfrac{\pi}{2})]$$

ועפ"י (1)

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(\beta+\tfrac{\pi}{2}) + \sin\alpha\sin(\beta+\tfrac{\pi}{2})$$

או

$$\sin(\alpha-\beta) = -\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

לסיכום, ניתן לקבל בדרך אנליטית, שונה מזו המקובלת בעזרת גאומטרית המישור (זויות ששוקיהן מאונכות בהתאמה), את הנוסחאות

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \cos\alpha\ \sin\beta$$

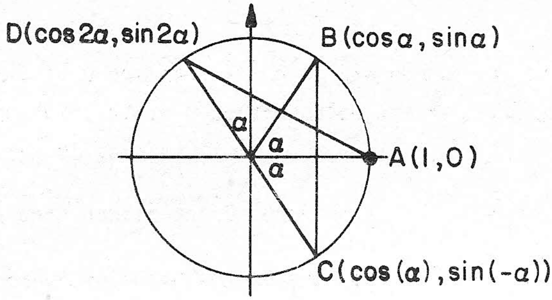
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$$

מן הנוסחאות שלעיל ניתן לקבל כמקרים פרטיים:

$$\sin2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\ \cos\alpha$$

$$\cos2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

בדומה לדרך ההוכחה של נוסחה (1) אפשר להוכיח ישירות את זו עבור $\cos 2\alpha$



כאן $\overline{AD} = \overline{BC}$ לכן $\overline{AD}^2 = \overline{BC}^2$

$$\overline{BC} = \sin\alpha - (\sin -\alpha) = 2\sin\alpha$$

$$\overline{BC}^2 = 4\sin^2\alpha$$

$$\overline{AD}^2 = (\cos 2\alpha - 1)^2 + \sin^2 2\alpha$$

משוויון הקטעים

$$4\sin^2\alpha = \cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 + \sin^2 2\alpha$$

$$4\sin^2\alpha = 2 - 2\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha$$

לכן

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

מכאן נוכל לעבור ל $\sin 2\alpha$:

$$\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha$$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2$$

$$= 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

לפיכך $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

אולימפיאדת מתמטיקה בנתניה

מאת: אביגדור רוזנטולר

באולימפיאדה מתמטית איזורית שהתקיימה לראשונה בנתניה השתתפו תלמידים מצטיינים במתמטיקה, מכל בתי הספר בעיר, הלומדים בכיתות חטיבת הביניים. מפעל זה הוכיח עצמו כמצליח ביותר וראוי לכן לחיקוי.

הרי לפניכם מספר שאלות מתוך השאלון שהוגש למתחרים:

1) כמה אפסים עומדים בסופו של המספר המתקבל אחרי כפל כל המספרים מ 16 עד 101 ועד בכלל? (נמק תשובתך).

2) קבע את הספרות החסרות (נמק תשובתך).

```
      * * *
  ×   * * 8
      -----
      * * *
    * * * *
  * * * *
  -----------
  * * * * * 0
```

(האם קיימת רק תשובה אחת?)

3) מספר מסויים מסתיים בספרה 9 (ספרת היחידות). אם נעביר את הספרה האחרונה להתחלת המספר, נקבל מספר הגדול פי 9 (פי תשע) מהמספר הנתון. מהו המספר הקטן ביותר העונה לדרישות הללו? (נמק תשובתך).

4) לפניך מלבן ובו 96 משבצות. במלבן רשומים 9 מספרים. מלא את המשבצות הריקות כך שסכום ארבעה מספרים בכל ארבע משבצות סמוכות (גם לאורך וגם לרוחב) יהיה 29.

	5					8									
					1		10								
6	10														
			2					4							
				7											

5) הבעלים: יעקב, משה, אביגדור וראובן ונשותיהם: טובה, רות, אסתר ומרים הלכו לקניות בשוק. כל אחד מהם קנה מצרכים במחיר שעולה כל מצרך אחד.
קבע מהם בני הזוג (בעל ואשתו) אם ידוע שאביגדור קנה יותר מרות ב-35 מצרכים, טובה קנתה יותר ממשה ב-43 מצרכים ואסתר קנתה פחות מיעקב ב-4 מצרכים. כמו כן ידוע שכל בעל שלם יותר מאשתו ב-256 לירות.

6) בשק נמצאים 1977 כדורים. שני תלמידים משחקים כשכל אחד רשאי לקחת לסירוגין 3,2,1 ....98, 99 כדורים.
זה שלוקח את מנת הכדורים האחרונה הוא המנצח. לפי איזו תכנית צריך לשחק התלמיד המתחיל את המשחק, כדי לנצח?

"פרדוקס"?

מורה המלמד בחטיבת הביניים דווח על "פתרון" למשוואה $x-x^2 = 1$ שקיבל מאחד מתלמידיו:

$$x - x^2 = 1$$

$$1 - x = \frac{1}{x}$$

עבור $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

אולם $x - x^2 = 1$

ולכן $x + \frac{1}{x} = x - x^2$

$$\frac{1}{x} = - x^2$$

$$x^3 = - 1$$

$$x = - 1$$

אך הבעיה היחידה היא ש $x = -1$ אינו פתרון המשוואה המקורית.

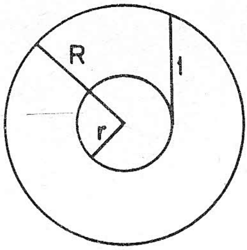
---

*הרעיון הוא על-פי

Webb, R., "The case of the spurious root", The Mathematical Gazette, June 1977 (Vol. 61, p. 132-133).

חידה

נתונים שני מעגלים קונצנטרים. רדיוס המעגל הגדול הוא R ורדיוסו של המעגל הקטן הוא r. מנקודה כלשהי על המעגל הגדול מעבירים משיק למעגל הפנימי שאורכו יחידה (ראה שרטוט).



מהו שטח הטבעת?

<u>פתרון</u>

נזכור תחילה שהרדיוס r מאונך למשיק למעגל הקטן בנקודת המגע.

כמו כן, שטח הטבעת הוא $\pi R^2 - \pi r^2$

אך על-סמך משפט פיתגורס $R^2 - r^2 = 1$

לכן, שטח הטבעת $\pi(R^2 - r^2) = \pi$

פתרון זה נכון לכל R ו r כך שהמשיק למעגל הפנימי הוא יחידה.

דרך זו לפתרון מתאימה לתלמידי חטיבת הביניים בתנאי שידוע להם הקשר בין המשיק למעגל ורדיוסו.

האם ידועות לך דרכים נוספות לפתרון? אם כן, נשמח לפרסם את המענינות שבהן.