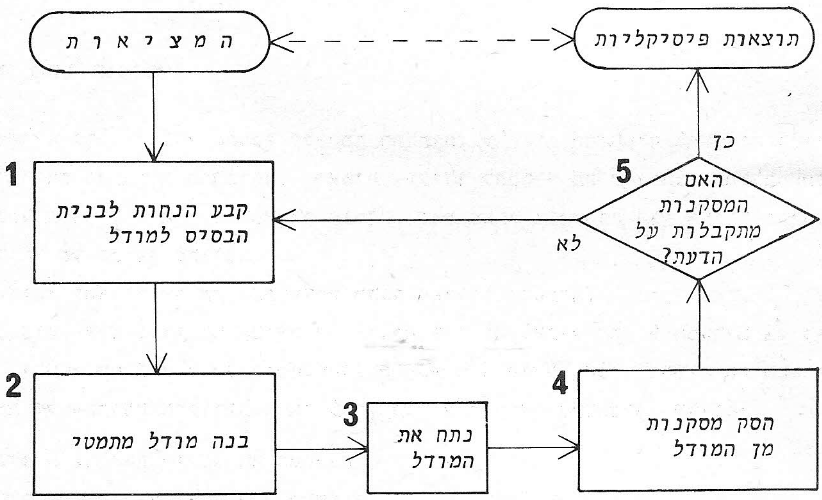
תחבורה, דרך המלך אל הפונקציות

מאת: ג.א. בייקר
תרגום : עדנה אטקין

הדוגמא שלהלן מדגימה מספר רעיונות בהם נעזרים בשיקולים ברורים אודות פונקציות, תחומיהן, הטווחים והגרפים שלהן. הכוונה היא לבנות מודל מתמטי של זרימת תחבורה, ולצורך זה ניעזר בתרשים הזרימה הבא, הממחיש את התהליך של בניית מודל מתמטי.

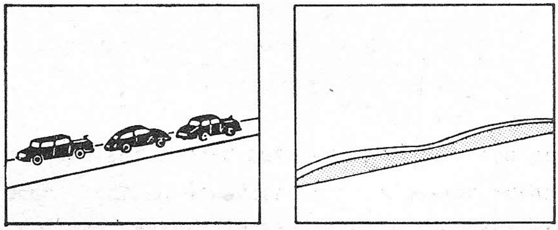


הקטעים הבאים מסומנים בהתאם למיספור של המרכיבים שבתרשים הזרימה.

1. קביעת הנחות לבניית הבסיס למודל

מאליו מובן כי כלי רכב נעים לאורך דרכים.
לצורך המודל נניח כי דרך היא כביש ישר, בעל נתיב אחד, ללא צמתים המאפשר נהיגה קלה.
ואמנם מפישוטים כגון אלה ניתן לבנות מודל (ראשוני) הניתן לבקרה.
אין מכוניות המצטרפות אל המכוניות שבדרך, ואין כאלו העוזבות את הכביש; אין תקלות וכמו כן לא תהיינה תאונות.

מושגים אלה ניתנים לניסוח כעקרון של "חוק שימור המכוניות", עקרון אליו נחזור בהמשך. ההנחה האחרונה היא מן הסוג שמתמטיקאים ופיזיקאים עושים לעתים תכופות. אם כן, לצורך המודל שלנו, ניקח סכין דמיונית ו"נמרח" את המכוניות כמו ריבה על פני הכביש כולו.



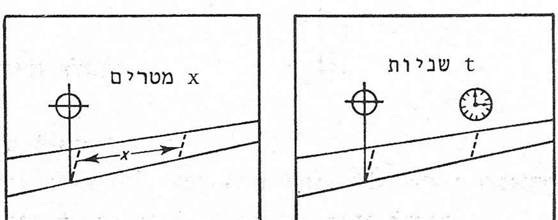
ציור

2. בניית מודל מתמטי

קיימת אפשרות לבנות מודל מתמטי על-סמך ההנחות, על-ידי התיחסות למשתנים המספיקים כדי להגדיר את התנהגות התחבורה. ראשית, עלינו להבהיר מה כוונתנו במילה "משתנה". אין די בכך שנאמר, "יהי t משתנה הזמן", זאת מאחר והמשתנה הוא התוית הניתנת לאיבר כלשהו של קבוצה מסוימת.
אם כך, עלינו להגדיר את הקבוצה עצמה כחלק מאפיון המשתנה.
לעתים תכופות, אנו מגדירים קבוצה כה גדולה שיכולה להכיל את כל המקרים העולים על הדעת, וכאשר משיגים מידע נוסף מחקירת הבעיה והמודל, אנו תוחמים את המשתנה בתת-קבוצה של הקבוצה המקורית. אי לכך, כדי לקבוע את המשתנים, עלינו:

i) להחליט איזו אות תייצג את המשתנה.
ii) להגדיר את הקבוצה בה ישתנה המשתנה.

נחוצה לנו מסגרת יחוס ואיזושהי מידה של זמן - זאת מאחר ותחבורה משמעה תנועה.



יהי:

x - המרחק לאורך הכביש מנקודה קבועה מסוימת, הנמדד במטרים.

t - הזמן שחלף מרגע מסוים נתון, הנמדד בשניות.

אין טעם בהגבלת אורך הדרך, לכן נגדיר $x \in R$, (כאשר R מסמל את קבוצת המספרים הממשיים).

אי אפשר לשער כי ניתן להוליך את הזמן לאחור, לכן נגדיר:
$t \in R_0^+$ (כאשר R_0^+ מסמל את קבוצת הממשיים החיוביים ואת האפס).

קיימים שלשה משתנים המתארים את מצב זרימת התחבורה:

k - צפיפות התחבורה, הנמדדת במכונית למטר $\left(\frac{\text{מכונית}}{\text{מ'}}\right)$.

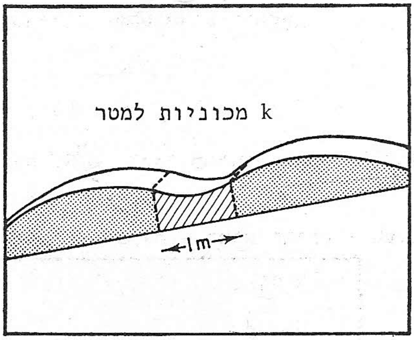
v - מהירות התחבורה, הנמדדת במטרים לשניה $\left(\frac{\text{מ'}}{\text{שנ'}}\right)$.

q - שטף התחבורה, הנמדד במכוניות לשניה $\left(\frac{\text{מכונית}}{\text{שנ'}}\right)$.

הבה נבחן ביתר פרוט במה כוונתנו ל-k, q ו-v והקבוצות בהן הם משתנים, כשאנו זוכרים שהקבוצות כולן הינן תת קבוצות של הממשיים.

k: צפיפות התחבורה מודדת כמה מכוניות למטר ישנן.
נאפשר מקרה בו הדרך ריקה, כלומר:

$$k \geq 0$$



אך גם אם המכוניות צפופות פגוש לפגוש, קיים גבול לצפיפותן, לכן:

$$0 \leq k \leq k_j$$

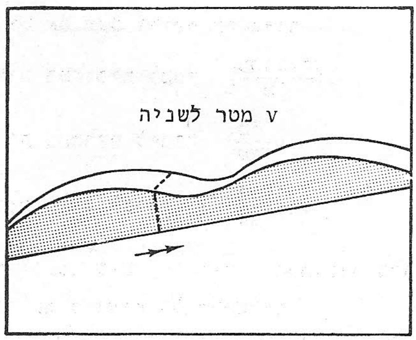
כאשר k_j היא הצפיפות בפקק תנועה.

לדוגמא, אם נניח שהאורך הממוצע של מכונית הוא 4 מ', אזי:

$$k_j \simeq \frac{\text{מכונית}}{\text{מ'}} 0.25$$

אם כך, נגדיר כי המשתנה k שייך לקבוצה $[0, k_j]$, כלומר, קבוצת המספרים בין 0 ל-k_j.

v: מהירות התחבורה, מבחינה מסוימת, היא מהירותה של כל מכונית בנפרד; אך במודל שלנו, כמובן, אין אנו מתיחסים יותר לכל מכונית בנפרד - אם תעדיף, חשוב על v כעל יחידת מידה המודדת את מהירותו של חלקיק ריבה.



קורה שמכוניות עומדות בפקק תנועה, לכן

$$v \geq 0$$

מאידך, בכביש הפתוח, המהירות המקסימלית חסומה.
לכן:

$$v \in [0 , v_{max}]$$

הערך של v_{max} יכול להיות $57 \frac{\text{מ'}}{\text{שנ'}}$, זהוי מהירות השווה ל-100 מיליון בשעה. (158 קמ"ש)

q: שטף התחבורה מודד את כמות המכוניות - כמות הריבה - העוברת נקודה נתונה בשניה.

השטף יכול להעצר כליל - כבפקק תנועה; אך האם הוא יכול לגדול ללא חסם?
אינטואיטיבית נראה שלא כך הוא.
כמו כן, יש לנו גבול שנכפה ע"י האילוצים הקודמים על הערכים של k ו-v.
אף אם המכוניות היו צפופות פגוש לפגוש (k_j), כולן נעות במהירות הממוצעת המכסימלית (v_{max}), אזי עדין יהיה מספר סופי שיעבור נקודה נתונה כלשהי בכל שניה, לכן:

$$q \in [0\ ,\ q_c]$$

כאשר q_c הוא גבול הקיבולת של שטף המכוניות לאורך הדרך.

כאן מסתיים החלק הראשוני של בנית המודל המתמטי. הנחנו יסודות פשוטים; בצעד הבא ננתח את המשתנים שהוגדרו ונראה כיצד הם מתקשרים זה לזה, כלומר, נמצא את הפונקציות שבמודל.

3. נתוח המודל

בפרק זה נבנה את הפונקציות המקשרות בין המשתנים. המשתנים שבדיון הם x, t, k, v ו-q. שלושת האחרונים הם מדידות שתתבצענה בנקודות מסוימות לאורך הדרך (x) ובזמן מסוים (t) ולכן, הפונקציות הראשונות שתוגדרנה הן אלה המקשרות בין x ו-t לבין k, v ו-q.

לפיכך, אם נתונים ערכים עבור x ו-t, קיימים לנו בתיאוריה - ערכי k, v ו-q. היינו קיימות לנו שלוש פונקציות שתחום כל אחת היא הקבוצה:

$$R \times R_o^+ ,$$

זוהי המכפלה הקרטזית של הקבוצות בהן x ו-t משתנים בהתאמה. הטווח של כל פונקציה היא אחת מבין הקבוצות שמצאנו לעיל עבור המשתנים k, v ו-q.
את זאת נוח יותר לבטא בסימון המקובל בפונקציות.
נסמן K, V ו-Q את הקבוצות המתאימות ל-k, v ו-q בהתאמה.

$$K : (x\ ,t) \quad k \qquad\qquad (x\ ,t) \in R \times R_o^+$$
עם טווח $[0\ ,k_j]$

$$V : (x\ ,t) \quad v \qquad\qquad (x\ ,t) \in R \times R_o^+$$
והטווח $[0\ ,v_{max}]$

$$Q : (x\ ,t) \quad q \qquad\qquad (x\ ,t) \in R \times R_o^+$$
והטווח $[0\ ,q_c]$

4. הסקת מסקנות מן המודל

האם ניתן למצוא קשרים בין k, v ו-q?

אנו נצפה, שכאשר צפיפות התחבורה היא אפס, המכוניות ינועו במהירותן המכסימלית, v_{max}, מאחר ואין להן שום מכשול בדרכן. ככל שהצפיפות תגבר, מהירות המכוניות תקטן, עד כי, בפקק תנועה, תעצורנה.

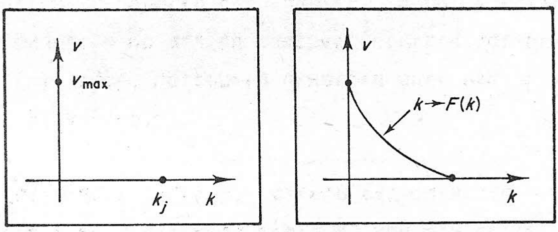
זהו העיקר ביחס שבין הצפיפות והמהירות. נאפיין זאת בעזרת פונקציה, F.

כיצד יראה הגרף של F, כלומר, כיצד תתנהג הפונקציה F? אנו יכולים לקבוע שתי נקודות על הגרף:

i) $(0, v_{max})$, היינו המהירות המכסימלית המושגת כאשר הצפיפות היא אפס.

ii) $(k_j, 0)$, כלומר המכוניות עוצרות בפקק תנועה.

את שארית הגרף נשלים על סמך ההנחה שככל שהצפיפות עולה, מהירות המכוניות יורדת. (שים לב שכאן אנו משלימים את המעגל סביב הלולאה התחתונה של תרשים הזרימה המקורי לבנית המודל).



זוהי מסקנתנו הראשונה, אם כי משנית. ניתן לרשום פורמלית:

$$F : k \quad v \qquad k \in [0, k_j]$$

כאשר הטווח של F הוא $[0, v_{max}]$.

אפשר להגדיר את F בדרך אחרת:

F היא הפונקציה כך שמתקיים:

$$V = F \circ K \quad \text{(הרכבת } F \text{ על } K\text{)}$$

טרם נסיק מסקנות נוספות, רצוי להבטיח לעצמנו שמסקנתנו הראשונה, אינה טפשית (שלב 5 בתרשים הזרימה).

בדיקה שהטענה היא על הפסים הנכונים ניתנת על-ידי תקנות התנועה המופיעות בכבישים. הרשות המוסמכת קבעה טבלת "מרחק עצירה מינימלי".

מהירות	מרחק עצירה
(מיליון/שעה)	(רגל)
20	40
30	75
40	120
50	175
60	240

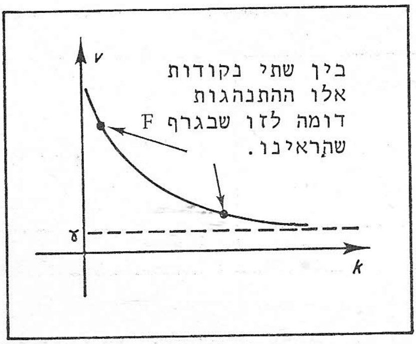
הרשות מייעצת לנהג שישמור מרחק מן הרכב שלפניו על-פי "מרחק העצירה המינימלי" המתאים למהירותו. בלי קשר ליחידות המדידה, עולה מתוך הטבלה הנוסחה הבאה:

$$* \; a\cdot\frac{1}{k} = \frac{v^2}{20} + v$$

עבור קבוע מתאים a. (מרחק העצירה פרופורציוני ל $\frac{1}{k}$ ולכן יסומן $a\cdot\frac{1}{k}$).
זה מהווה את חוק ההעתקה, F שיהיה:

$$F : k \longrightarrow (\alpha + \frac{\beta}{k})^{\frac{1}{2}} + \gamma$$

עבור קבועים מתאימים α , β ו-γ.



הסכם זה מראה כי לטווח רחב יחסית של ערכי k ו-v, המסקנה שלנו היתה "שווה".

המסקנה הבאה שהיא הפורה ביותר, נובעת מהתבוננות במימדים של k, v ו-q.

היות ו-

$$\dim(k \times x) = [\frac{c}{m}] \times [\frac{m}{s}] = [\frac{c}{s}] = \dim q$$

c - מסמן מכוניות, m - מסמן מטרים, s - מסמן שניות.

---

* אם מחשבים מתוך הטבלה את מנות ההפרשים מסדר ראשון עבור $\Delta v = 10$ מתקבלים הערכים: 35, 45, 55, 65. רואים כי מנת ההפרשים מסדר שני היא גודל קבוע. לכן קיימת פונקציה ממעלה שניה $d = Av^2 + Bv + C$ (d - מרחק העצירה) אשר כל הנקודות המתקבלות מן הטבלה שייכות לה. ע"י הצבת ערכים אפשר לקבל כי $C = 0$ $B = 1$ $A = \frac{1}{20}$.

הרי: $q = \lambda kv$ עבור מספר ממשי כלשהו λ.

אך מאחר ושטף של 1 מכונית לשניה נוצר על-ידי צפיפות של מכונית אחת למטר המרכבת ממכוניות הנעות ב-1 מטר לשניה, $\lambda = 1$.

לפיכך: $q = kv$

כך ש: $q = k \cdot F(k)$

זה מאפשר לנו להגדיר את הפונקציה f, עבורה:

$$k \in [0\ ,\ k_j] \qquad f : k \longrightarrow q$$

כאשר הטווח של f הוא: $[0\ ,\ q_c]$.

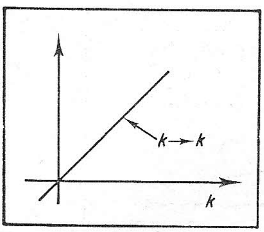
כדי למצוא את הגרף של f, נשתמש בנוסחה:

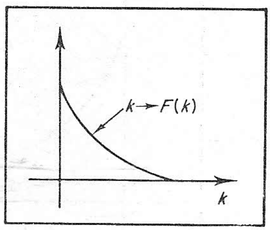
$$q = k \cdot F(k)$$

היינו, q מתקבל ע"י כפל התמונות של k תחת שתי הפונקציות:

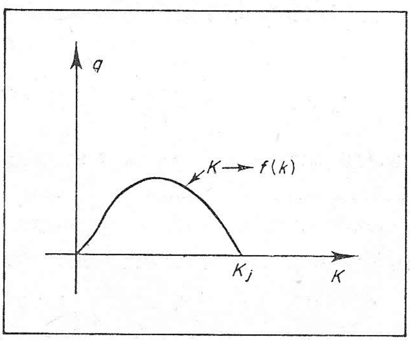
$$k \longrightarrow k \qquad k \in [0\ ,\ k_j] \qquad k \longrightarrow F(k)$$

כלומר: $f = (k \longrightarrow k) \times (k \longrightarrow F(k))$





קל לראות את התוצאה של כפל שתי הפונקציות הללו.
לגרף של f תהיה הצורה הבאה:



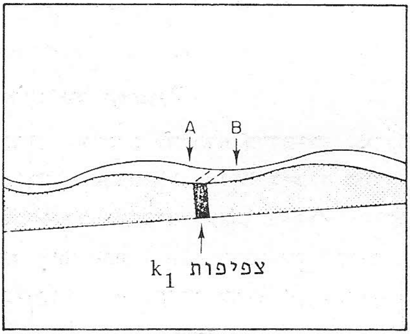
קיימות שתי דרכים נוספות לכתיבת f. זאת כי ניתן לאמר:

f היא הפונקציה כך ש- $Q = f \circ K$.

או:

f היא הפונקציה כך ש: $K \times (F \circ K) = f \circ K$.

הגרף מראה שיש ערך ל-K עבורו יש ל- q מכסימום.
זה אינו בלתי צפוי, מאחר והנחנו קודם לכן ש: $q \varepsilon [0 , q_c]$, לכן אף אושר קיומו של גבול הקבולת של השטף.
לפני שנוכל להמשיך במסקנותינו, עלינו לשלב בדיון את אחת מהנחותינו המקוריות - "חוק שימור המכוניות".
נבצע זאת תוך הסתכלות באשר קורה לצפיפות k.
במיוחד, נרכז את תשומת לבנו לנקודה בעלת צפיפות k_1, ונעריך כיצד על הנקודה לנוע כדי לשמור על צפיפות הקבועה ב-k, זאת אומרת, בכל מקום שהנקודה נמצאת, הצפיפות תהיה k_1.



נניח שנציב שני משקיפים, A ו-B , מכל צד של הנקודה בעלת הצפיפות k_1 ונפקוד עליהם לנוע באותה מהירות שהנקודה נעה - נקרא למהירות זו U. מאחר והם נעים, יבחינו המשקיפים בערכי q שונים מערכים שיבחינו בהם משקיפים נייחים. נניח שהם יקראו $\overline{q}_A$ ו- $\overline{q}_B$ בהתאמה.

אזי:

$$\overline{q}_A = q_A - k_A \cdot U \qquad (1)$$

$$\overline{q}_B = q_B - k_B \cdot U \qquad (2)$$

נזכור שאף מכונית אינה אובדת או נוצרת ספונטנית וצפיפות המכוניות ברווח שבין A ו- B נשארת קבועה ב- k_1.

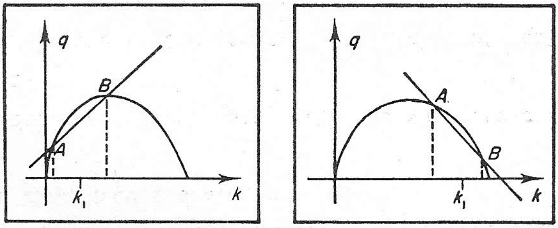
לכן:

$$\overline{q}_A = \overline{q}_B$$

זהו "חוק שימור המכוניות", והוא מאפשר לנו להשוות את אגפי ימין של משוואות (1) ו- (2).

נמצא כי:
$$U = \frac{q_B - q_A}{k_B - k_A}$$

נוכל לפרש זאת על גרף הפונקציה f .

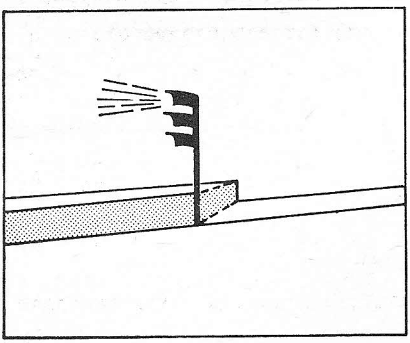


שיפוע המיתר AB מייצג את המהירות, U, של צפיפות התחבורה k_1. עבור k_1 קטן, כלומר תחבורה דלילה, הצפיפות נעה קדימה, אך עבור k_1 גדול יותר, הצפיפות נעה אחורה.

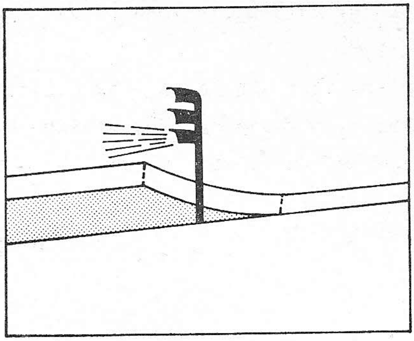
5. האם המסקנות מתקבלות על הדעת?

בתופעה שתוארה ניתן להבחין לעיתים קרובות בדרכים, במיוחד בתחבורה צפופה. מאחר והתוצאה היא שמכוניות מגיעות קרוב ל"קפאון" למרות שהדרך לפנים יכולה להיות פתוחה יחסית. תוכל להבחין בכך ברוב הדרכים בעצמך - ודאי היית בשיירה של מכוניות בדרכך למקום נופש. ברגע אחד אתה זוחל, ברגע שני קיים חיפזון כדי להשיג את האיש שלפנים. אף-על-פי-כן, הבה נחזור לצעד 4, ונסיק את המסקנה הסופית מן המודל.

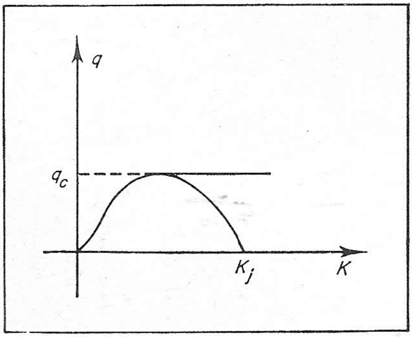
נתייחס למצב המתהווה בקבוצה של רמזורים.



כשהאורות אדומים, צפיפות k_j - פקק תנועה -נוצרת מאחורי הרמזורים, כשהדרך לפנים פתוחה. אחר כך האורות מתחלפים לירוק.



במהרה, נוצרת צפיפות תחבורה נמוכה לפני הרמזור ושיפוע המיתר בגרף של f אומר לנו שמצב צפיפות זה נע קדימה. מאחורי הרמזור, הצפיפות עדיין גבוהה (למרות שפחות מ-k_j) וצפיפות זו נעה אחורנית. על פי הרציפות (אפשר להווכח) צפיפות מסוימת, ברמזור, למעשה נשארת עומדת.



מהגרף אנו רואים שצפיפות מסוימת זו העומדת קבועה - כלומר, הערך של k המביא למשיק בעל שיפוע אפס - היא הצפיפות שמעתיקה לערך המקסימלי של q. לערך זה כבר קראנו q_c, גבול קבולת השטף.

ושוב נשאל - האם המסקנות מתקבלות על הדעת?
תוצאה זו מספקת שיטה נוחה מאוד למדידת הכמות המכסימלית של תחבורה שדרך יכולה להכיל. השיטה היא להעמיד אוסף רמזורים בדרך ולתת לפקק תנועה ארוך להיוצר. כל מה שנותר הוא למנות את מספר המכוניות העוברות את הרמזורים ביחידת זמן כשהאור מתחלף לירוק.

מן ההנחות היסודיות שקבוצות מסוימות של איברים יתנו הסבר מתאים להתנהגות התחבורה, בססנו את מסקנותינו בראשונה על ההגדרות של מספר פונקציות. בכל שלב ניתן היה למצוא אי אלו אישורים למסקנות במונחים של "תוצאות פיסיקליות". אך חקר המודל לא חייב להסתיים כאן.
בכך הוכן רק הרקע לפתוחים נוספים.