כיצד תוכל לחצות זוית

מאת מרי קופר
תרגום: עדנה אטקין

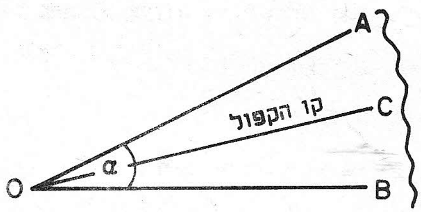
"בכמה דרכים שונות תוכל לחצות זוית?" זה היה אתגר שהובא לפני, בהלצה, על-ידי אחד מאנשי הקבוצה שהכינה יחידת לימוד בנושא הבניות הגאומטריות, ביום עיון שהתקיים בירושלים. (יום עיון זה נערך בחסותו של משרד החינוך והתרבות בישראל).

עד מהרה הפכה ההלצה לאתגר של ממש. החיפוש אחר דרכי בניה שונות (לא כולן בהכרח מועילות, מעשיות, או אף בלתי-תלויות לחלוטין) הוא הרעיון המרכזי שהנחה מאמר זה. אני מתארת כאן סדרה של שעורי חזרה על המשפטים הגאומטריים היסודיים הנלמדים בכיתה ט' של חטיבת הביניים בארץ. מאחר שלא הוטלו שום הגבלות, הייתי חופשיה להציג כל שיטה מתאימה. אתחיל בהבאת שיטות בהן לא דרושות מיומנויות במחוגה וסרגל (ולכן מתאימות יותר לבית הספר היסודי מאשר לחטיבת הביניים).

בכל המובא להלן, נניח שהזוית החדה α ($\measuredangle AOB$) נתונה (משורטטת על פיסת נייר).

1. שיטות ללא שימוש במכשירים גיאומטריים

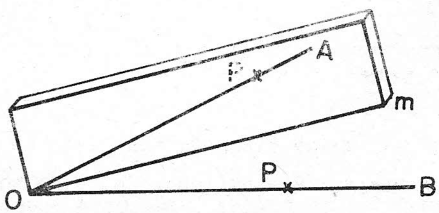
א) גזור את הזוית וקפל את הנייר כך שהישר OA יפול על הישר OB, פתח. קו הקיפול יהיה חוצה הזוית.



ציור 1

ב) שימוש בפלסטיק שקוף למחצה*

סמן נקודה P על אחת משוקי הזוית. העמד את חתיכת הפלסטיק במאונך למישור עליו משורטטת הזוית (ראה ציור), והזז אותה עד שההשתקפות של P בפלסטיק תראה על השוק השניה של הזוית. המיקום של פלסטיק זה יציין את חוצה הזוית.

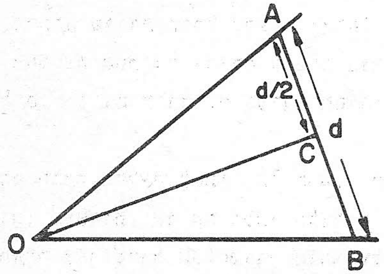


ציור 2

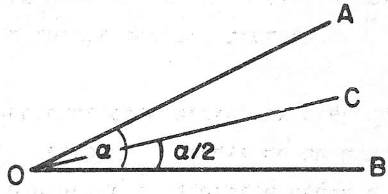
*בפלסטיק שקוף למחצה (Mira) הכוונה לפלסטיק שנתן בעת ובעונה אחת לראות דרכו מה שמצוי מאחוריו והשתקפות של מה שנמצא לפניו.

2. שיטות המבוססות על מדידות

א) מדוד את הזוית α בעזרת מד-זוית, חשב את $\frac{\alpha}{2}$, בנה זוית $\sphericalangle COB = \frac{\alpha}{2}$ (ציור 3). חוצה הזוית הוא OC.



ציור 3

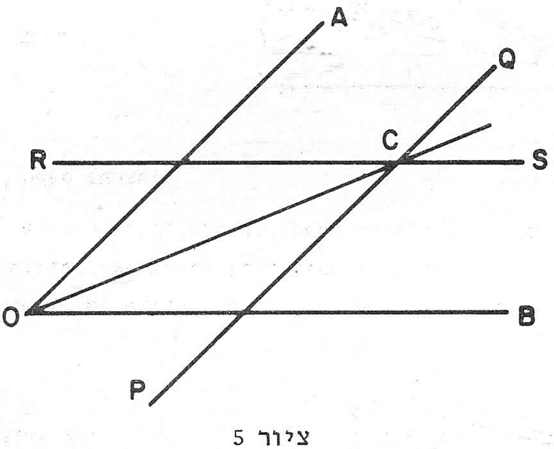


ציור 4

ב) סמן על שוקי הזוית נקודות A ו B בעזרת מדידה כך ש OA = OB (ציור 4) חבר את A עם B, מדוד וסמן AB = d. חשב את $\frac{d}{2}$ וסמן את הנקודה C כך ש- $AC = \frac{d}{2}$. (הבנייה מבוססת על תכונות משולש שווה שוקיים). OC הוא חוצה הזוית.

3. שימוש בגוף בעל שני מקצועות מקבילים וישרים

הבניה מתבצעת בעזרת סרגל בלתי מכוייל בעל שני צדדים מקבילים קבועים. (שיטה זו מתוארת ב-[1]).

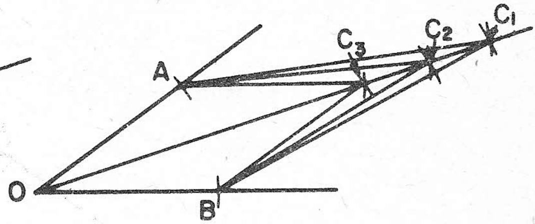


ציור 5

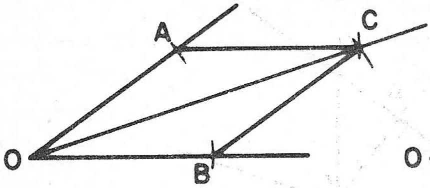
שים את צידו האחד של הסרגל לאורך OA, ומתח קו PQ מצידו השני. חזור על כך לאורך השוק OB וסמן את RS בהתאמה (ציור 5). נקודת החיתוך של PQ ו RS היא הנקודה C. חוצה הזוית הוא הישר OC.

4. שימוש בסרגל ומחוגה

סוף סוף אנו בתחום המוכר לנו!



ציור 6



ציור 7

א) שיטה המבוססת על הדרך המקובלת לחציית זוית.
בציור 6 מופיע השרטוט של סדרת צורות דמויות עפיפון, אחת מהן הוא מעוין, כבציור 7.

האלכסון של מרובעים אלה חוצה את הזוית AOB.

תרגיל זה יכול לשמש כנקודת מוצא לחזרה על תכונות מרובעים, או על תכונות משולשים חופפים. כמו כן אפשרי לשאול:

(i) באלו מרובעים האלכסונים חוצים את הזויות?

(ii) באלו מרובעים חוצים האלכסונים רק זוג זויות אחד?

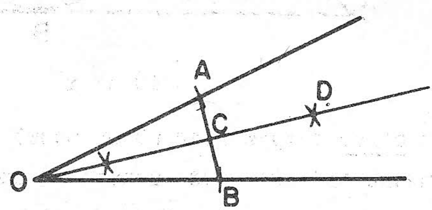
(iii) מתי יהיו האלכסונים שווים?

(iv) האם הישרים OC ו AB יחצו תמיד זה את זה?

(v) מתי יהיו ישרים אלה מאונכים זה לזה?

שאלות אלו ואחרות מהוות שעת כושר לחזור על תכונות מרובעים, במיוחד על-ידי מיונם על-פי תכונות אלכסוניהם.

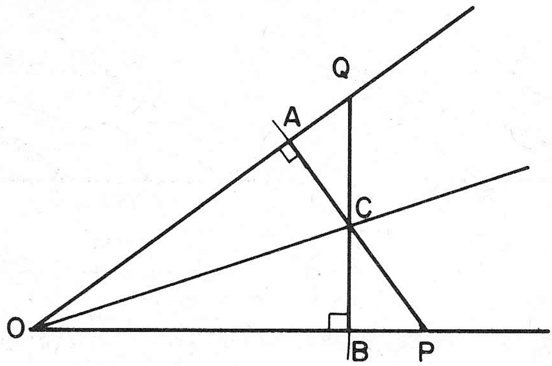
ב) נניח שלאחר בנית $OA = OB$, לא מאפשרים להשלים את שרטוט המרובע OACB; האם עדיין ניתן לבצע את בניית חוצה הזוית?



ציור 8

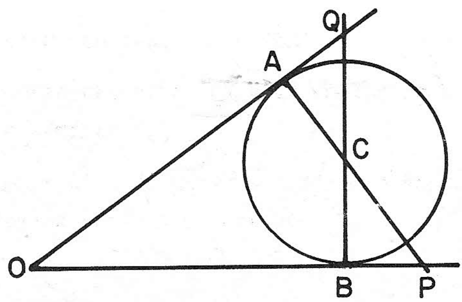
בציור 8, AB נבנה כך שיווצר משולש שווה שוקיים (ציור 8). עתה בנה את האנך האמצעי לקטע AB. כאן אפשר לחזור על תכונות משולש שווה שוקיים, בניית האנך האמצעי וההוכחה שלה ומשפטי המקום הגיאומטרי. האם אי פעם יהיה המשולש שלנו שווה צלעות?

ג) צא גם הפעם מ $OA = OB$, אך במקום להשלים את הבניה למשולש שווה שוקיים OAB העלה אנכים ל OA בנקודה A ול- OB בנקודה B. (ציור 9).



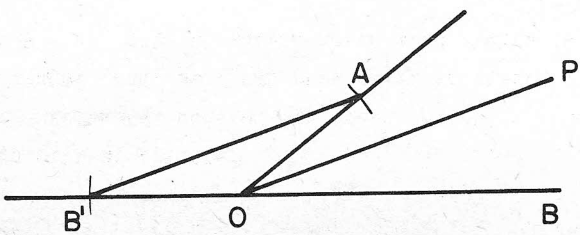
ציור 9

הישרים AP ו BQ נחתכים בנקודה C. OC הוא חוצה הזוית הנדרש.
המשולשים AOC ו BOC הם שני משולשים ישרי-זוית וחופפים; לכן, בהקשר זה; ניתן לחזור על תכונות משולשים ישרי-זוית.
כמו-כן בנייה זו מעלה בדעתי משפט אחר, מאחר שהנקודה C מהווה את מרכז המעגל הנוגע בשוקי הזוית OA ו OB בנקודות A ו B. השוקיים משיקות למעגל שמרכזו ב-C ורדיוסו CA (ציור 10). כאן זו ההזדמנות לחזרה על תכונות משיקים מנקודה מחוץ למעגל אל המעגל.



ציור 10

ד) מה קורה כשלא נאפשר לשרטט משולש שווה שוקיים <u>בפנים</u> הזוית החדה הנתונה? כלומר, לא נרשה לשרטט את הישרים $OA = OB$ כפי שתואר בבניות הקודמות?
נניח שניתן במקום זאת לשרטט $OA = OB'$ (ציור 11), כאשר B' נמצאת על המשכה של BO.



ציור 11

חבר את 'AB ושרטט את OP מקביל ל-'AB. המשולש 'OAB הוא שווה שוקיים כך שזויות הבסיס שוות. כמו כן

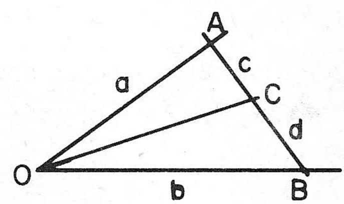
$\sphericalangle OAB' = \sphericalangle AOP$ (זויות מתחלפות)

$\sphericalangle OB'A = \sphericalangle POB$ (זויות מתאימות)

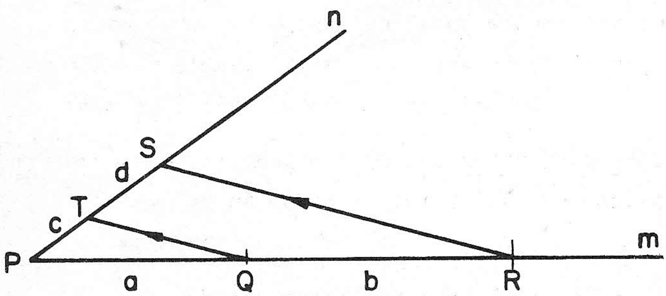
לכן OP הוא חוצה הזוית AOB.
(זוהי חזרה על זויות בישרים מקבילים).

ה) בבניות האחרונות יצאנו משרטוט משולש שווה שוקיים. נניח עתה שבניה זו אסורה! במקום זאת אנו יכולים לבנות משולש <u>כלשהו</u> OAB.
נניח שכבר מצאנו את חוצה הזוית OC, אזי

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{CB} \quad \text{או} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{ציור } 12)$$



ציור 12

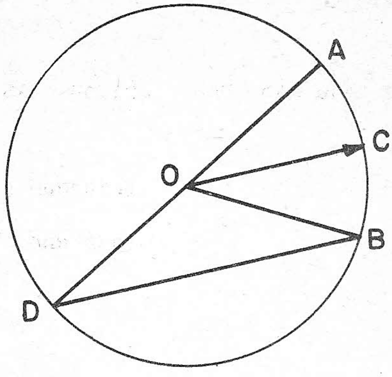


ציור 13

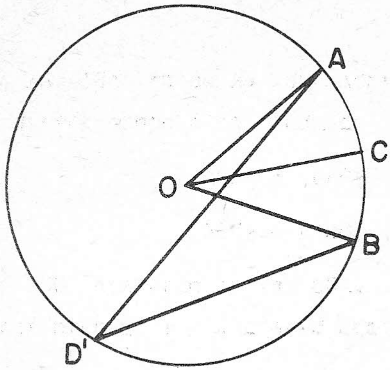
הבעיה עתה היא למצוא את מקומה של הנקודה C. את זה ניתן לבצע על-ידי בנית עזר כפי שמצויין בציור 13:
שרטט ישר m וסמן עליו PQ = a ו QR = b. שרטט ישר n בזוית כלשהיא ל-m וסמן עליו (c+d =) PS = AB. חבר את SR, ובנה ישר מקביל ל SR דרך הנקודה Q כך שיחתוך את PS בנקודה T. אזי T מחלקת את PS ביחס $\frac{a}{b}$.
נחזור אל ציור 12:

על AB, סמן AC = PT = c ו CB = TS = d.
(כאן המקום לחזרה על משפט תלס, חלוקת ישר ליחס נתון, חוצה זוית, והיחס של שוקי הזוית לחלוקת הישר שמול הזוית).

ו) נדון שוב במשולש שווה שוקיים. במקום לשרטט בבניה את הקשתות, נשרטט מעגל שלם, כך שהזוית הנתונה היא עתה הזוית במרכז המעגל. עתה יש לנו קולר לתלות בו את כל התכונות של זויות במעגל.



ציור 14



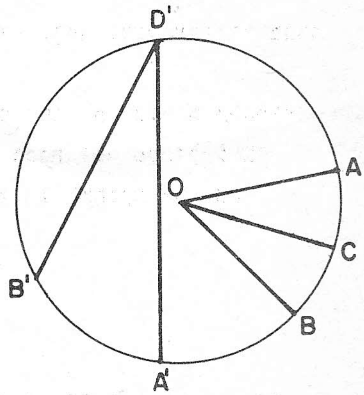
ציור 15

בציור 14 הרדיוס AO יוצר את הקוטר AD. הזוית ADB היא הזוית ההיקפית הנשענת על הקשת AB, והזויות המרכזית הנשענת על אותה הקשת היא הזוית AOB; לכן $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$. הקטע OC המקביל ל- DB משלים את בניית חוצה הזוית.

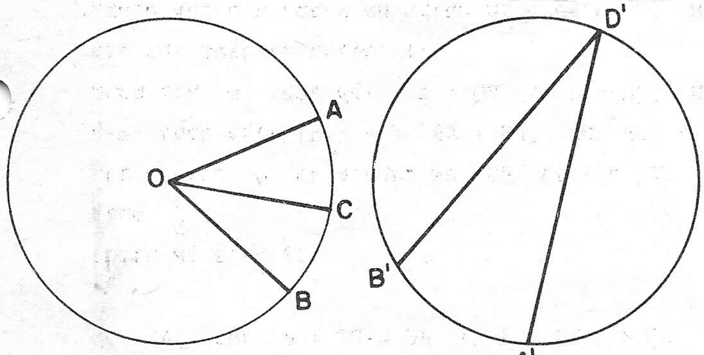
ז) במקום לשרטט את הקוטר AD נוכל לשרטט מיתר כלשהו AD', ובאופן דומה לקבל $\sphericalangle AD'B = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$ (ציור 15). כאן עלינו להעתיק את הזוית $\sphericalangle AD'B$ כך שקדקדה יהיה ב-O, בכדי להשלים את הבנייה.

ח) אין צורך להגביל עצמנו לשימוש באותה הקשת AB. נוכל לשרטט זוית מתאימה $\sphericalangle A'D'B'$ על כל קשת שווה באורכה על אותו המעגל (ציור 16), או על מעגל אחר בעל אותו הרדיוס (ציור 17).

השיטות האחרונות מהוות שדה נרחב לחזרה על מעגל והזויות בו.



ציור 16

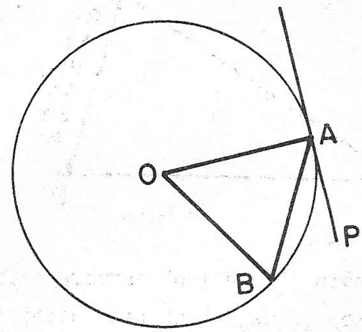


ציור 17

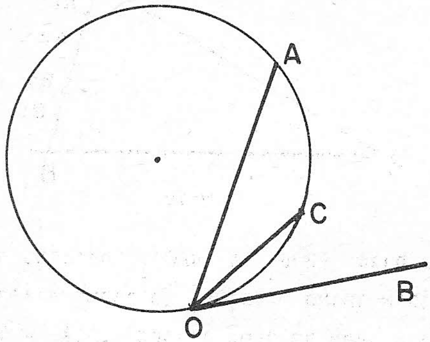
ט) לאחר שמיצינו את השימוש בזוית היקפית, נפנה את תשומת לבנו לזויות שיוצר המשיק. תהיה הזוית הנתונה, AOB, זוית מרכזית במעגל (ציור 18).
אם המשיק יבנה בנקודה A, אזי הזוית בין המשיק והמיתר שווה למחצית הזוית שבמרכז המעגל הנשענת על אותו מיתר.

כלומר: $\sphericalangle BAP = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$

עתה נותר להעתיק את $\sphericalangle BAP$ לנקודה O.



ציור 18

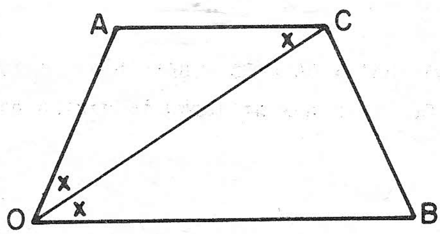


ציור 19

י) אם, לעומת זאת, הזוית הנתונה AOB היא זוית בין מיתר ומשיק למעגל (ציור 19), אזי הנקודה C שהיא אמצע הקשת AO מקיימת $\sphericalangle COA = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$.

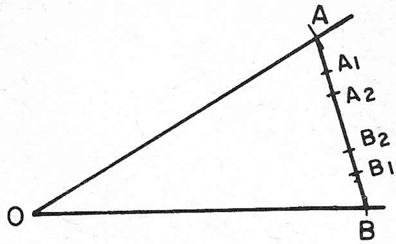
יא) שיטה נוספת שהעלתה לפני מתבססת על שימוש בטרפז. בנה ישר מקביל לקרן OB של הזוית, דרך נקודה כלשהי, A, הנמצאת על הקרן השניה של הזוית. קבע את AC כך שישווה ל- OA (ציור 20). חבר את OC. אזי $\sphericalangle ACO = \sphericalangle AOC = \sphericalangle COB$ ו OC הוא חוצה הזוית AOB.

ניתן כאן לעשות את הענינים מורכבים יותר כך שתהיה אמתלא לחזור על תכונות טרפזים שווי-שוקיים ואחרים.

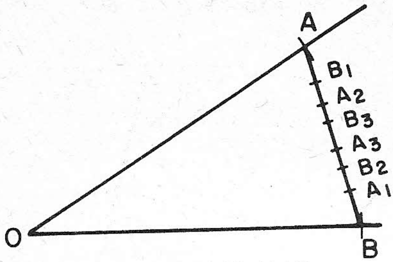


ציור 20

כל השיטות שתוארו לעיל הן סופיות. נציג עתה שיטה שבודאי מתכנסת לבנייה הנכונה, כשנתונים זמן וסבלנות אינסופיים. צא שוב מ $OA = OB$. חבר את AB. בחר בקשת הקטנה מ-AB. כשהמרכז ב-A שרטט קשת שתחתוך את AB בנקודה A_1. באותו אופן שרטט קשת כשהמרכז ב-B כך שתחתוך את AB בנקודה B_1. בציור 21 ניתן לראות את המקרה ש AA_1 ו BB_1 קטנים מ-$\frac{1}{2}AB$ ולעומת זאת בציור 22 מובא המקרה שהקשת גדולה מ-$\frac{1}{2}AB$ (אך קטנה מ-AB).



ציור 21



ציור 22

ברור שהזויות $\sphericalangle AOA_1$ ו $\sphericalangle BOB_1$ שוות כך שהבעיה מצטמצמת לחציית החלק הבלתי חצוי של הזוית המקורית $\sphericalangle A_1OB_1$. באותו אופן ניתן לבנות זוית חדשה A_2OB_2, כאשר $A_1A_2 = B_1B_2$. התהליך נמשך כך מספר אינסופי של פעמים. מאחר ובכל שלב הרדיוס קטן יותר מהקטע הבלתי חצוי, התהליך בודאי מתכנס.

אני מקוה שהקוראים יוכלו להציע בניות נוספות מעניינות ומרתקות כדי לצרף לרשימה זו.

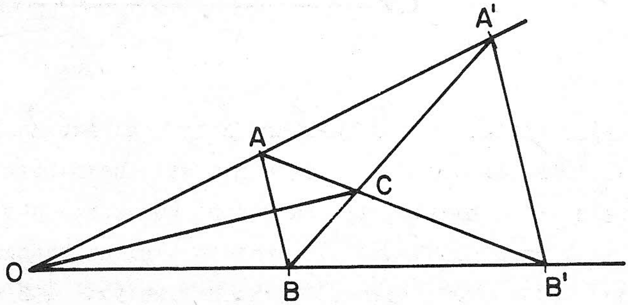
ספרות

(1) School Mathematics Project, Book T. p. 282
Cambridye University Press, 1966

<u>הערת המערכת</u>: נשמח לקבל הצעות נוספות. המעניינות שבהן תפורסמנה בעלונים הבאים.

תרומה ראשונה

בנה OA = OB ועל המשך הקרניים - בנה AA' = OA = OB = BB' (ציור 23). חבר את AB' ואת A'B. סמן את נקודת החיתוך של אלכסונים אלה ב-C. OC הוא חוצה הזוית AOB.



ציור 23