מודל "קורי העכביש" - דוגמא לשימוש במשוואות הפרש בכלכלה

מאת:
יואב כסלו
המחלקה לכלכלה ומנהל
הפקולטה לחקלאות
האוניברסיטה העברית, רחובות

חנה ליפסון
המחלקה לכלכלה ומנהל
הפקולטה לחקלאות
האוניברסיטה העברית, רחובות
ומכון ויצמן למדע

מטרת המאמר הינה הצגת מודל מתמטי המתאר דינמיקה של מערכת כלכלית. התיאוריה, הכלכלית והמתמטית, תהיה מופשטת ומבוססת על הנחות מיוחדות לה שתפורטנה בהמשך. הנחות כאלה הן חיוניות לבנייתה של כל תאוריה, כלומר לבניית מודל פשוט וניתן לתפישה מושגית של עולם מציאותי מורכב.

השוק התחרותי ושווי המשקל הכלכלי

השוק למוצר מסויים, נאמר תות-שדה, נתפס כמקום המפגש בין כוחות הביקוש וההיצע; במילים פשוטות: בין הצרכנים הבאים לקנות תות-שדה לבין היצרנים הבאים למכור את תוצרתם. לשם פשטות נתעלם מקיומם של מתווכים.

חשוב להדגיש שהשוק הוא "שוק תחרותי". דבר זה פרושו שמספר הצרכנים - הקונים, גדול מאד ובדומה גם מספר היצרנים - המוכרים גדול. אם, לעומת זאת, מספר הקונים קטן, הם עשויים להתארגן ולנהל מאבק כלכלי בו קובעים שיקולים טקטיים של תגובה ותגובה שכנגד. במקרה זה אי אפשר לראות את הכמות המבוקשת כפונקציה של המחיר בלבד ותמונת השוק המוצגת במאמר זה לא תתאים אז לתאור השוק המציאותי.

גורמים רבים משפיעים על הכמות הנרכשת בשוק מכל מוצר, ביניהם: הכנסת הצרכנים, הרגלי צריכה, מחירי מוצרים היכולים לשמש תחליף למוצר בו אנו עוסקים, ואחרים. לשם פשטות, נניח שהשפעות כל הגורמים הללו קבועות ושניתן, לכן, להתעלם מהן בדיון שלנו ולמקד את המבט בהשפעת מחיר המוצר על הכמות הנקנית. אנו גם נתעלם מן התנודות של המחיר מיום ליום ונתיחס למחיר הממוצע לעונה כאל המחיר היחיד השורר בשוק במשך כל העונה. עם זאת יוכל המחיר, כפי שיפורט להלן, להשתנות מעונה לעונה.

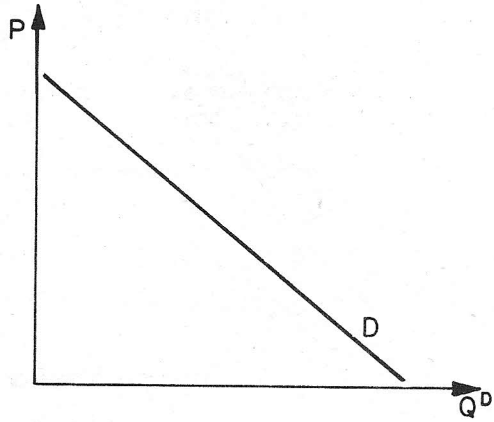
בדרך כלל, ככל שהמחיר גבוה יותר ירכשו הצרכנים כמויות קטנות יותר. במחירים נמוכים יחסית תקנינה כמויות גדולות. את ההתאמה הזו בין מחיר המוצר(P)לבין הכמות הנקנית מבטאת פונקצית הביקוש שנסמנה בסימול D. לצורך הדיון נניח שפונקצית הביקוש היא פונקציה לינארית של מחיר המוצר בלבד ותרשם בצורה הבאה:

$$D : P \longrightarrow a - bP$$

a , b מספרים חיוביים.

נסמן את תבנית המספר $a - bP$ ב- Q^D ; הכמות הנקנית היא:

$$Q^D = D(P) = a - bP \qquad (1)$$



ציור 1 - פונקצית הביקוש

הערה: נוהג מקובל בכלכלה לרשום את הכמות על הציר האופקי, אפילו כאשר היא המשתנה התלוי.

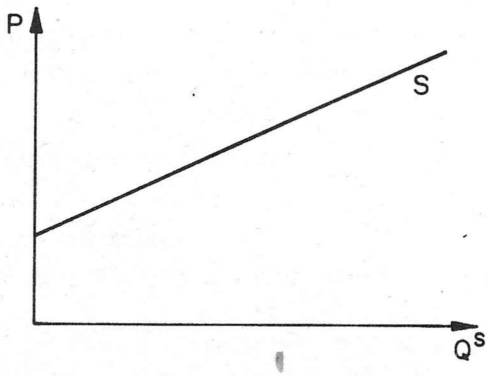
על הכמות שהיצרנים מביאים לשוק - ההיצע - משפיעים גורמים רבים; בעיקר, אולי, מחירי גורמי היצור - עבודה, חנמרי גלם; ושוב נניח לשם פשטות שגורמים אלה כולם קבועים ונרשום את הכמות המוצעת, כפונקציה לינארית של מחיר המוצר בלבד; פונקציה זו תסומן ב- S:

$$S : P \longrightarrow c + dP$$

c ,d מספרים חיוביים.

הכמות המוצעת היא:

$$Q^S = S(P) = c + dP \qquad (2)$$



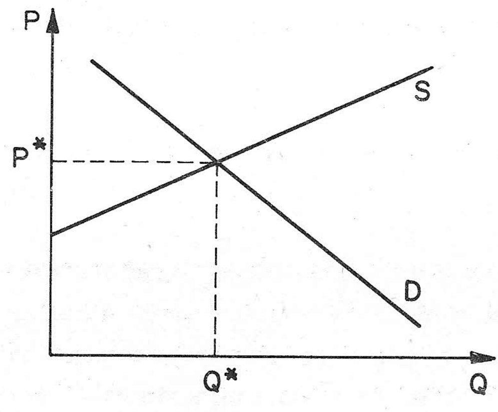
ציור 2 - פונקצית ההיצע

במחיר גבוה יביאו היצרנים כמויות גדולות יחסית לשוק, במחירים נמוכים - כמויות קטנות (ציור 2).

בשוק לתות-שדה יתקיים שווי משקל אם המחיר יהיה כזה שהכמות Q^S שהיצרנים מביאים לשוק תהיה שווה לכמות Q^D שהצרכנים לוקחים מן השוק, ולא נוצרים עודפים או מחסורים כלשהם. פורמלית: P^* הוא מחיר שווי משקל ו-Q^* כמות שווי משקל אם במחיר זה

$$Q^S = Q^D = Q^* \qquad (3)$$

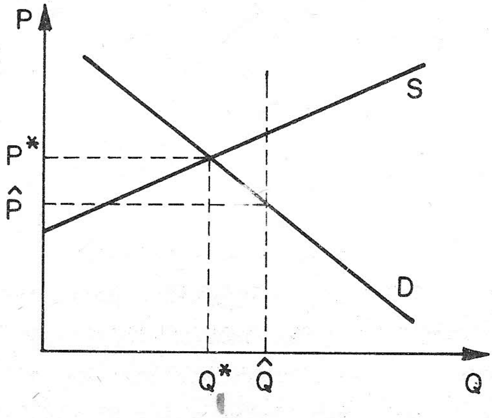
הנקודה (Q^*,P^*) המציינת צמד של כמות ומחיר של שווי משקל, היא נקודת החיתוך של קו הביקוש D עם קו ההיצע S (ציור 3).



ציור 3

דינאמיקה

מה יקרה אם הכמות שתגיע לשוק תהיה שונה מכמות שווי המשקל; למשל $\hat{Q}$ בציור 4 שהיא גדולה מכמות שווי המשקל Q^*?



ציור 4: השוק לתות שדה

תופעה זו עשויה להגרם על-ידי מזג אוויר טוב מן הרגיל בעונת הגידול או על-ידי טעות בחישובי היצרנים.

אם המוצר אינו ניתן לאכסון, המחיר שיקבע בשוק יהיה $\hat{P}$, הנמוך מ-P^*.
רק במחיר זה יצליחו המוכרים להפטר מכל הכמות שהביאו עמם לשוק.

עתה מתעוררת בעיית הדינאמיקה של השוק: כיצד יגיבו היצרנים על העובדה שמחיר המוצר נמוך ממחיר שווי המשקל? האם יבינו מיד שטעו ובפעם הבאה יביאו את הכמות Q^*? התשובה לשאלות אלו מותנית באופי תהליכי הייצור ותגובות היצרנים למחירים. במוצר חקלאי, תות-שדה למשל, הכמות המוצעת בעונה זו נקבעה כבר לפני חודשים אחדים כאשר החקלאים קבעו את היקף השטחים שיזרעו - לאחר הזריעה אין הכמות שתגיע לשוק ניתנת לשינוי (להוציא המקרה הקיצוני בו המחיר יהיה כה נמוך שלא יהיה כדאי לחקלאים לאסוף את יבולם כלל). תנודות מחירי תות-שדה בעונה מסויימת בתחום די רחב לא תשפענה על הכמות המשווקת באותה עונה.

כיצד קובעים החקלאים בעונת הזריעה כמה לזרוע? הם קובעים זאת לפי צפיותיהם לגבי המחירים בעתיד *.

הנחה פשוטה היא שציפיותיהם הן כאלה שהם מצפים שהמחיר השנה יהיה שווה למחיר שקיבלו בעונה שעברה ולכן המחיר שקובע את הכמות המוצעת בשנה t, אינו המחיר בשנה t אלא המחיר בשנה שקדמה לה, $t-1$. מאידך הצרכנים קובעים את הכמות הנקנית השנה לפי המחיר השורר בשוק בעונה זו. כדי לבטא את התלות הזו בזמן, נוסיף את משתנה הזמן t למערכת המשוואות שלנו ונרשום:

$$Q_t^D = a - bP_t \qquad (1')$$

$$Q_t^S = c + dP_{t-1} \qquad (2')$$

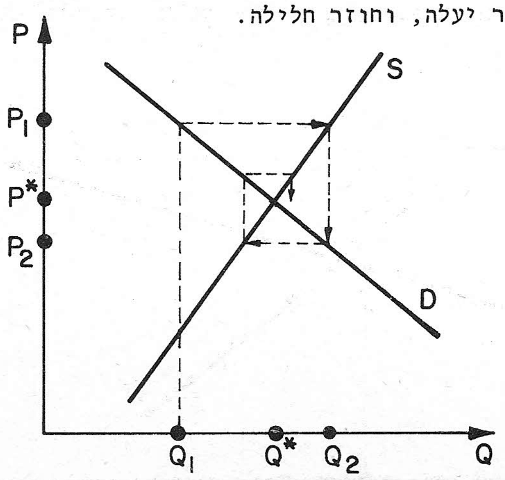
כאשר P_t, למשל, מסמן את המחיר בשנה t.

---

* בנקודה זו חשוב להזכיר שאנו עוסקים בשוק תחרותי. בתחרות, כל יצרן רואה לפניו שווקים שבהם נקבעים מחירים על-ידי כוחות שמחוץ לשליטתו; לכן הוא מייצר בהתאם למחיר שהוא צופה שישרור בשוק. כל יצרן פועל עצמאית ואין כל אפשרות, בקיום תחרות כשמספר היצרנים גדול מאד, שהיצרנים יבינו שעליהם לפעול כיחידה אחת ולהקפיד ולחזור לרמת היצור המשותפת Q^* או לכל רמה מתאימה אחרת.

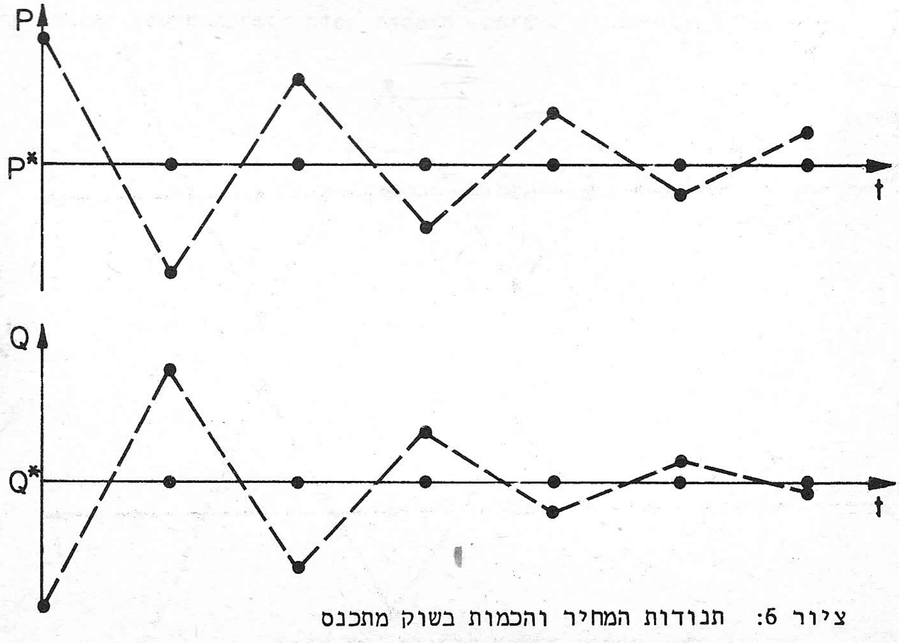
קורי עכביש

עתה, משלבנו את השיקולים הדינמיים של תגובת היצרנים למודל שלנו, נשאל איך תתנהג המערכת הכלכלית אם, בשנה מסויימת (נקרא לה השנה הראשונה) תגיע לשוק כמות Q_1 שאיננה Q^*. אם למשל $Q_1 < Q^*$ תמכר כמות זו באותה שנה במחיר P_1 שיהיה גדול ממחיר שווי המשקל P^* (ציור 5). היצרנים, שיצפו שמחיר זה יתקיים גם בשנה הבאה, יכינו שטחי מזרע שיספקו בשנה השניה תות שדה בכמות Q_2 שהיא גדולה מ-Q_1, ולכן ירד המחיר ל-P_2. כתגובה על ירידת המחיר יצמצמו היצרנים את השטחים ויביאו בשנה השלישית פחות תות-שדה לשוק - המחיר יעלה, וחוזר חלילה.



ציור 5: שווי משקל יציב במודל קורי העכביש

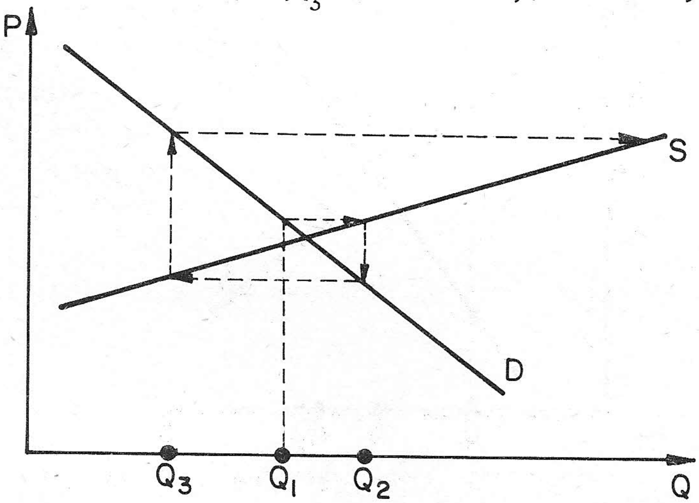
התפתחות זו ניתנת להצגה גם במישור הזמן והכמות או במישור הזמן והמחיר (ציור 6).



ציור 6: תנודות המחיר והכמות בשוק מתכנס

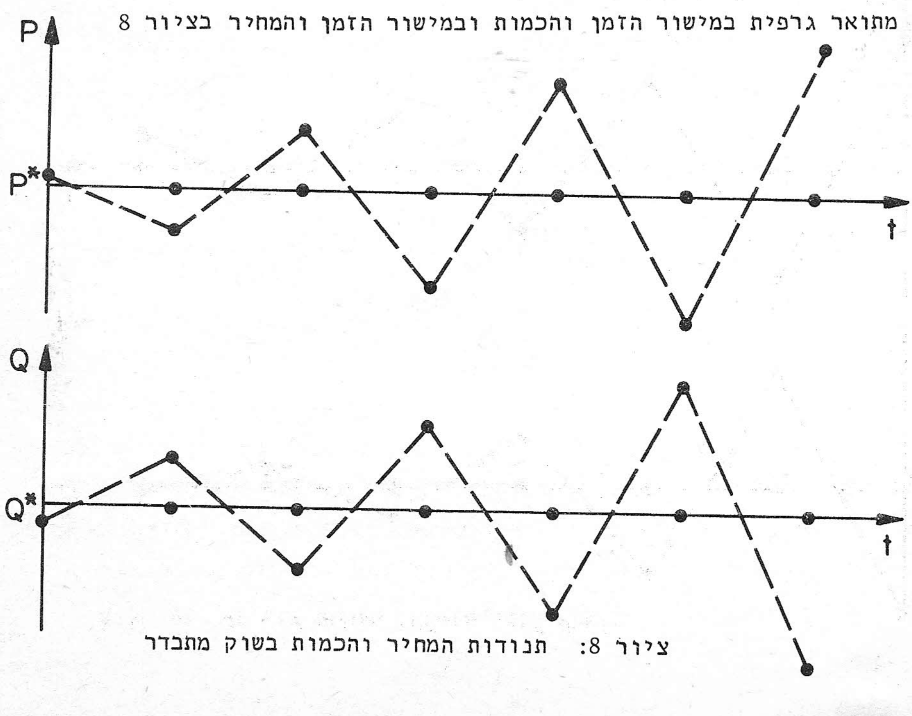
התנודות השנתיות של המחירים והכמויות בציורים 6,5 הולכות וקטנות עם הזמן והשוק מתכנס למצב שווי משקל (Q^*, P^*). אולם לא בכל מקרה ילכו התנודות ויקטנו מתקופה לתקופה, ולא בכל מקרה יתכנס השוק לשווי משקל.

בציור 7, מוצגת האפשרות של שוק מתבדר. סטיה קלה משווי משקל תביא לתנודות הולכות וגדלות במחירים ובכמויות: נניח שבשנה ראשונה הגיעה במקרה הכמות Q_1. בשנה שאחריה יביאו היצרנים את הכמות Q_2 (נבדוק שהמחיר שיקבע בשנה הראשונה אמנם יגרום לכך שהכמות Q_2 תוצע בשנה השניה), בשנה השלישית Q_3, וכן הלאה. השוק "יברח" משווי משקל.



ציור 7: שוק מתבדר

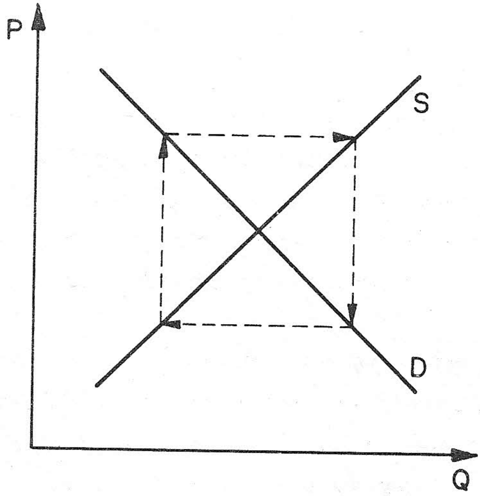
התהליך מתואר גרפית במישור הזמן והכמות ובמישור הזמן והמחיר בציור 8



ציור 8: תנודות המחיר והכמות בשוק מתבדר

תאורטית, יכול אולי שוק מתבדר להתנדנד עד אין סוף. מעשית דבר זה לא יקרה: כשתגדלנה התנודות משנה לשנה, יבינו החקלאים את משמעותן והנבונים שבהם דוקא יצמצמו שטחיהם לאחר עונה של מחירים גבוהים וירחיבום לאחר עונת מחירים נמוכים.

האפשרות השלישית היא זו של שוק מטלטל בו התנודות של המחירים והכמויות נשארות בגודל קבוע. השוק אינו מתבדר, אך גם אינו מתכנס לשווי משקל (ציור 9).
זהו שוק שיהיה מאופיין בסירוגיות. בשנה אחת המחירים יהיו גבוהים ובאחרת, בהגיע כמויות גדולות יחסית לשוק, הם יהיו נמוכים; ושוב יצומצמו השטחים, יעלו המחירים וחוזר חלילה.



ציור 9: שוק מטלטל

מתמטיקה

נתרגם עתה את מודל קורי העכביש לשפת המתמטיקה. בין השאר ניתן בטוי מתמטי להבדל בין שלושת המקרים שמצאנו.
נרשום שוב, למען הנוחות, את פונקצית הביקוש וההיצע ואת משוואת שווי המשקל:

$$Q_t^D = a - bP_t \qquad (1')$$

$$Q_t^S = c + dP_{t-1} \qquad (2')$$

$$Q_t^S = Q_t^D \qquad (3)$$

נשווה את Q_t^D ו- Q_t^S

$$a - bP_t = c + dP_{t-1}$$

או

$$bP_t + dP_{t-1} - (a - c) = 0$$

$$t = 1,2,3, \ ....$$

רווח הזמן שאנו דנים בו הוא שרירותי; נוח להתחיל בזמן $t = 0$ ולכן נחליף במשוואה האחרונה את t ב- $t+1$

ונרשום:

$$(4) \qquad bP_{t+1} + dP_t - (a - c) = 0 \qquad t = 0,1,2,3, \ ...$$

בעזרת משוואה (4) אפשר "לבנות את ההסטוריה" של המחירים. אם ידוע המחיר ההתחלתי P_0 שבו נמכרה הכמות ההתחלתית, Q_0 בשוק, אפשר לעקוב אחרי שנוי המחיר משנה לשנה בעזרת המשוואה. זאת אפשר לעשות צעד צעד: בהנתן P_0, אפשר לחשב את P_1, בעזרת P_1 נחשב את P_2 וכן הלאה. אולם, חישוב כזה יכול להיות מיגע וקשה לגלות בדרך חישוב כזאת את חוקיות התנהגות השוק כפי שהתבטאה בציורים 4-9.

לניתוח חוקיות זו נבנה נוסחה למציאת המחיר P_t שאינה מצריכה את חישוב המחירים בתקופות הקודמות ל-t. המטרה היא למצוא בטוי למחיר כפונקציה של הזמן t. כיוון ש-t נמדד בשנים שלמות וחיוביות בלבד, זוהי פונקציה שתחומה המספרים הטבעיים. במשוואה (4) מופיע יחד עם המחיר P_t בתקופה t גם המחיר P_{t+1}, בהפרש זמן של שנה אחת. למשוואות כאלו קוראים בשם משוואות הפרש. שים לב שאיברי קבוצת האמת (הפתרונות) של משוואות הפרש הם פונקציות ולא מספרים. (מי שמכיר משוואות דיפרנציאליות בודאי שם לב הן לדמיון והן לשוני: קבוצת האמת של משוואה דיפרנציאלית מכילה פונקציות שתחומן המספרים הממשיים, ואילו במשוואות הפרש מדובר בפונקציות שתחומן המספרים הטבעיים).

כדי לפשט את הסימון נחלק את (4) ב-b

נסמן $\frac{-d}{b} = \alpha$ ו- $\frac{a - c}{b} = \beta$

ונקבל

$$(5) \qquad P_{t+1} = \alpha P_t + \beta$$

עתה נציג דרך לפתרון כללי של משוואה (5).

עיין תחילה במקרה ש- $\beta = 0$. קל לוודא שהפונקציה P_t שתפתור את המשוואה: $P_{t+1} = \alpha P_t$ היא:

$$(6) \qquad P_t = \alpha^t P_0$$

כאשר הערך ההתחלתי P_0 נתון.

במקרה הכללי בו $\beta \neq 0$ נלך תחילה בשיטת "צעד, צעד" ונפתח את משוואה (5) לערכי t שונים $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ ...

$$P_1 = \alpha P_0 + \beta$$

$$P_2 = \alpha P_1 + \beta = \alpha(\alpha P_0 + \beta) + \beta = \alpha^2 P_0 + (\alpha + 1)\beta$$

$$P_3 = \alpha P_2 + \beta = \alpha^3 P_0 + (\alpha^2 + \alpha + 1)\beta$$

עתה קל לראות (בעזרת האינדוקציה השלמה) כי הפתרון ל-t כלשהו הוא

$$P_t = \alpha^t P_0 + (\alpha^{t-1} + \alpha^{t-2} + \ldots + \alpha + 1)\beta \tag{7}$$

נוכל להשתמש בנוסחת הסכום של טור הנדסי ולרשום:

$$P_t = \alpha^t P_0 + \frac{1 - \alpha^t}{1 - \alpha}\beta \tag{8}$$

כאשר נציב $\beta = 0$ ב- (8) נקבל את משוואה (6).

אם נרשום את (8) בצורה

$$P_t = \frac{\beta}{1 - \alpha} + \left(P_0 - \frac{\beta}{1 - \alpha}\right)\alpha^t \tag{8'}$$

יקל עלינו לראות את התכונות הבאות של הפתרון P_t:

I) אם הערך ההתחלתי P_0 יהיה $P_0 = \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$

יהיה גם $P_t = \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$ עבור כל t: פונקצית הפתרון תהיה קבועה.

II) במקרה ש- $P_0 \neq \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$ נבחין ב- 3 מקרים:

א) $0 < \alpha < 1-$ ($\alpha < 0$ בהכרח, כי $\alpha = \dfrac{-d}{b}$ ו $d, b > 0$)

נמצא כי α^t שואף לאפס והפתרון P_t מתכנס לערך $\dfrac{\beta}{1 - \alpha}$, כאשר t שואף לאינסוף.

ב) אם $\alpha < -1$ כאשר t ישאף לאינסוף, ישאף α^t לאינסוף והפתרון יתבדר.

ג) אם $\alpha = -1$ יופיעו רק שני ערכים של P_t ויתקבלו לסירוגין שני פתרונות:
כאשר t זוגי יהיה $P_t = P_0$, כאשר t אי-זוגי יהיה $P_t = \beta - P_0$,
זהו המקרה של השוק המטלטל המתואר בציור 9.

כדאי גם לשים לב שכיוון ש- $\alpha < 0$ "יתנדנד" הפתרון מסביב לערך $\dfrac{\beta}{1 - \alpha}$

כאשר $P_0 > \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$ ו t זוגי יהיה $P_t > \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$

t אי-זוגי יהיה $P_t < \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$

כאשר $P_0 < \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$ יתחלפו שני המצבים בהתאם.

בחזרה לכלכלה

נחזור לבעיה הכלכלית של השוק התחרותי.

נזכור כי סימנו $\alpha = -\frac{d}{b}$, כלומר α הוא יחס השיפועים - ביחס לציר המחיר - של עקומות הביקוש וההצע, והוא תמיד גודל שלילי. התעניינו בהתנהגות המערכת הכלכלית לאורך הזמן וראינו את תאורה הגרפי של התנהגות זו. עתה נפרש ונסביר אותה באמצעות הכלים המתמטיים שרכשנו.

נשים לב כי המחיר $$P^* = \frac{a-c}{b+d} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

הוא מחיר שווי המשקל של המערכת (זאת אפשר לראות על-ידי פתרון משוואה (3) שבה הצבנו (1) ו- (2)), ונרשום את (8') בצורה

$$P_t - P^* = (P_o - P^*)\alpha^t \tag{9}$$

כאשר $0 > \alpha > -1$, כלומר שפוע עקומת הביקוש ביחס לציר המחיר גדול בערכו המוחלט משפוע עקומת ההצע, נמצא כי הסטיה ממחיר שווי המשקל תלך ותקטן, והמערכת מתכנסת אל מחיר שווי המשקל P^* ואל כמות שווי המשקל Q^*, המתאימה. מצב זה מתואר בציורים 5 ו- 6.

אם לעומת זאת $\alpha < -1$, כלומר שפוע עקומת הביקוש קטן בערכו המוחלט משפוע עקומת ההצע, מתבדרת המערכת. (ציורים 7 ו- 8).

במקרה שעקומות ההצע והביקוש הן בעלות אותו השיפוע יהיה $\alpha = -1$ ויתקבל:

$P_t - P^* = P_o - P^*$ כאשר t זוגי,

$P_t - P^* = -(P_o - P^*)$ כאשר t איזוגי

והשוק מטלטל כמתואר בציור 9.

הערת סיכום

התיאוריה שהעלינו ופיתחנו היא מופשטת ועם זאת פשטנית מאד, שאם לא כן לא יהיה ניתן לראות את היער מפני העצים, ובהחלט מוצדק לשאול האם אמנם מתאר המודל הזה מציאות כלכלית? התשובה היא ללא ספק חיובית. במקרים לא מעטים, בעיקר לגבי מוצרים חקלאיים חד-שנתיים כירקות, קיימות תנודות במחירים ובכמויות שמתאימות יפה למודל קורי העכביש. אולם בארץ, בגלל התערבות המועצות, המתכננים, ונכונות התעשיה לקלוט כמויות גדולות של מוצרים חקלאיים בעונות שפע, אין התנודות הללו ניכרות במיוחד בשוק. דוגמא נוספת היא ענף הלול. במחקר שנערך לאחרונה לגבי ענף הפטימים (הענף המגדל עופות לבשר) נמצא שתכונות הביקוש וההצע בענף זה יוצרות שוק מתבדר.

ואמנם המועצה לענף הלול משקיעה מאמצים רבים בתכנון הענף, בקנית עופות ואחסונם בקרור בעונות שפע ובהוצאתם לשוק בעונות מחסור. אילו היה הענף יציב ומתכנס במהירות לשווי משקל, לא היה צורך בהתערבות המועצה. בארצות אחרות הובחנו מקרים מסובכים יותר. בארצות הברית, למשל, משולבת המחזוריות של גידול התירס במחזוריות ענף פטום החזירים - הצרכן העיקרי של גרעיני התירס. התמונה הכלכלית והמתמטית מורכבת למדי במקרה זה, אך העקרונות עליהם מבוססת התאוריה שלנו, נשמרים גם בו.