

התרומה שבתמורה-שעשועון*

מעובד ע"י: עדנה אטקין

הרי לפניכם אחד מאותם נושאים המובאים בחברותא, אשר למרות היותם "קלילים", יסודם בתחומים בסיסיים של המתמטיקה.

בקש מאחד מחבריך לבחור כרצונו מספר כלשהו בן שלוש ספרות. אמור לו כי המספר יכול לכלול אפסים משמאל (076), או שתי ספרות זהות (242, 007) ואף שלוש ספרות זהות.

לאחר שבחר את המספר, בקש ממנו לרשום ולסכם את חמש התמורות המתקבלות ממספר זה באופן הבא: אם בחר במספר שכל ספרותיו שונות, תהיינה כל חמש התמורות שונות זו מזו ושונות מהמספר שבחר.

אם במספר שבחר שתי ספרות זהות תתקבלנה רק שתי תמורות שונות, לכן בסכום יחזור פעמיים על כל אחת משתי התמורות ויוסיף כמספר חמישי את המספר שבחר. אם כל ספרות המספר הנבחר זהות, יסכם מספר זה חמש פעמים.

לדוגמא: אם בחר חברך את המספר 262, עליו לרשום ולסכם את חמשת המספרים הבאים:

$$\begin{array}{r} 226 \\ 226 \\ 622 \\ 622 \\ \hline 262 \\ 1958 \end{array}$$

עתה, בקש מחברך לאמר לך אך ורק את סכום חמשת המספרים שרשם (1958). בעזרת אינפורמציה זו בלבד תוכל לאמר לו במהירות ובודאות באיזה מספר בחר וכמובן, אלו מספרים סיכם.

התהליך למציאת המספר ה"נסתר":

א. נסמן:

x - המספר שבחר חברך

N - סכום חמשת המספרים שסיכם

d - סכום הספרות של המספר N

חשב את $2d$, חלק מספר זה ב-9 ומצא את השארית שנסמנה ב-R.

*מאמר זה מבוסס על:

M.T.L. Bizley, "A Christmas party piece". The Mathematical Gazette, December 1975(Vol. 59, pp. 264-266).

ב. בצע את הפעולה $222 \cdot R - N$ ובדוק אם ביטוי זה חיובי. אם אמנם קבלת מספר שאינו קטן מאפס הריהו המספר המבוקש. במידה שנתקבלה תוצאה קטנה מאפס, הוסף לביטוי כפולות של המספר $1998 = 222 \cdot 9$ עד שתתקבל בפעם הראשונה תוצאה הגדולה מאפס. תוצאה זו היא המספר, x , הנדרש.

ג. יתכן שטעית בחישוב או המספר (N) שנמסר לך על ידי חברך אינו נכון (בטעות או בזדון). אי לכך לפני שתכריז על המספר המבוקש, בדוק אם סכום הספרות של התוצאה שקבלת הוא $R + 9K$ כאשר K הוא מספר הפעמים שהוספת 1998.

דוגמא 1:

המספר שקבלת מחברך הוא $N = 1958$, כפי שהוזכר בדוגמא לעיל.

$$d = 1 + 9 + 5 + 8 = 23 \quad \text{כאן}$$

ולכן, אחרי חלוקת $2d$ ב-9 נקבל כי $R = 1$.

מכאן

$$222 \cdot R - N = 222 - 1958 = -1736$$

נתקבל מספר שלילי, לכן הוסף 1998.

$$-1736 + 1998 = 262 \quad \text{המספר המבוקש הוא, לכן}$$

$$2 + 6 + 2 = 10 = 1 + 9 \quad \text{כבקורת תבצע}$$

עתה תוכל להכריז כי ריעך בחר את המספר 262 וסיכם את 622 ו-226 פעמיים כל אחד, בנוסף ל-262.

דוגמא 2:

חברך מסר לך את המספר $N = 2630$

כיצד תאמר לו איזה מספר בחר?

$$d = 2 + 6 + 3 = 11 \quad \text{הפעל את התהליך וחשב:}$$

$$R = 4 \quad \text{לכן השארית של חילוק} \quad 2d = 2 \cdot 11 = 22 \quad \text{ב-9 היא}$$

$$222R - N = 222 \cdot 4 - 2630 = -1742 \quad \text{לפיכך}$$

היות והמספר שלילי, הוסף לו 1998 פעם אחת.

$$-1742 + 1998 = 256 \quad \text{ואכן}$$

טרם תבשר לו את "הנתיחוש" הנכון, בצע את הבדיקה הדרושה.

$$2 + 5 + 6 = 13 = 4 + 9 \cdot 1 \quad \text{ואמנם}$$

לכן המספר שבחר חברך הוא 256 וחמשת התמורות שסיכם הן 652, 625, 562, 265 ו-526.

עתה נגלה מה מסתתר מאחורי ה"טריק" הזה ונביא את הוכחת התהליך.

הוכחה

יהי המספר שנבחר $x = 100a + 10b + c$

את הסכום, S , של ששת המספרים, הכוללים את המספר הנבחר x וחמש התמורות שלו,

נקבל כך:

$$\begin{aligned}
 S &= 100a + 10b + c \\
 &100b + 10a + c \\
 &100b + 10c + a \\
 &100c + 10a + b \\
 &100c + 10b + a \\
 &\underline{100a + 10c + b}
 \end{aligned}$$

שים לב! בסכום מופיעה כל אחת מהספרות פעמיים בעמודת המאות, פעמיים בעמודת העשרות ופעמיים בעמודת היחידות. כל ספרה תוכפל איפוא ב- $2 \cdot 111$.

$$S = 222(a + b + c)$$

הסכום, N , של חמש התמורות שמסר החבר הוא:

$$N = S - x = 222(a + b + c) - (100a + 10b + c)$$

עתה, לצורך ההמשך ולנוחות החישוב בתהליך, נשתמש בעובדה הכללית הבאה:
אם A הוא מספר כלשהו ו- B הוא המספר המתקבל מסכום ספרותיו של A , אזי

$$A = B \pmod{9}$$

כלומר, השארית המתקבלת מחלוקת A ב- 9 זהה לשארית המתקבלת מחלוקת B ב- 9 .
למשל, אם

$$\begin{aligned}
 A &= 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta \\
 &= (999\alpha + 99\beta + 9\gamma) + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)
 \end{aligned}$$

$$A = 9(111\alpha + 11\beta + \gamma) + B$$

$$A = B \pmod{9}$$

היינו

$$N = d \pmod{9} \quad \text{בשעועון שלפנינו}$$

$$2N = 2d \pmod{9}$$

יכן

מכאן ברור כי השארית מחלוקת $2N$ ב- 9 זהה לזו המתקבלת מחלוקת $2d$ ב- 9 .
בהמשך ההוכחה נראה כי עלינו למצוא את שארית חלוקת $2N$ ב- 9 , אך למען פשטות ונוחות תהליך מציאת המספר, שהוזכר לעיל, נבצע חלוקת $2d$ ב- 9 .

$$2N = 2S - 2x$$

נרשום, אם כן

$$= 444(a + b + c) - (200a + 20b + 2c)$$

$$= 244a + 424b + 442c$$

$$= (243a + 423b + 441c) + a + b + c$$

$$= 9(27a + 47b + 49c) + a + b + c$$

כלומר:

$$2N = a + b + c \pmod{9}$$

בצורת הצגה זו קיבלנו מספר $a + b + c$ שתחום השתנותו הוא $0 \leq a + b + c \leq 27$ (מאחר ו- a, b, c בין 0 ל-9 כל אחד).

נניח, לכן, כי

$$a + b + c = 9K + R$$

כאשר את R , השארית, אנו מבקשים למצוא ו- K יכול לקבל את הערכים $0, 1, 2, 3$.
המספר המבוקש, x , ניתן על ידי:

$$\begin{aligned}x &= S - N \\&= 222(a + b + c) - N \\&= 222(9K + R) - N \\&= 222R - N + 1998K\end{aligned}$$

המספר היחיד הידוע לנו הוא N ומתוכו חישבנו את R . לכן את המספר x נמצא על-ידי חישוב $222 \cdot R - N$, בדיקה אם התוצאה היא שלילית, אם כן, יש להוסיף K פעמים את 1998 עד שתתקבל תוצאה שאינה שלילית.

המספר שנקבל הוא יחיד מאחר וקיים רק ערך אחד של K עבורו יתקבל x חיובי ובעל שלוש ספרות.

התהליך שתואר נכון עבור מספר בגודל כלשהו אלא שעבור מספר בעל יותר משלוש ספרות תאלץ לגזור זמן רב מדי מחבריך.